

33. L'ESIGENZA DI RENDERE PRATICO IL METODO DEGLI ALBERI DI CONFUTAZIONE.

Si consideri il seguente insieme dei tre enunciati:

$$\forall v_0 \neg Pv_0 v_0; \forall v_0 \forall v_1 \forall v_2 \neg \wedge \wedge Pv_0 v_1 Pv_1 v_2 \neg Pv_0 v_2; \neg \forall v_0 \forall v_1 \neg \wedge Pv_0 v_1 Pv_1 v_0.$$

I primi due caratterizzano le strutture d'ordine stretto, mentre il terzo afferma l'esistenza di un ciclo di due elementi, cosa impossibile in un ordine stretto. Sicché l'insieme di enunciati dato è non soddisfacibile. Questo risultato è ottenuto grazie a delle conoscenze che abbiamo nel caso specifico, ma non si è certo cercato di verificare che in ogni realizzazione almeno una delle tre formule è falsa, sicché potremmo non essere completamente sicuri dell'affermazione fatta: se una non conoscesse la dimostrazione del fatto prima ricordato sugli ordini stretti, potrebbe legittimamente domandarsi se, chissà mai, in qualche struttura inaspettata questi enunciati possono essere tutti interpretati nel vero. Avendo sviluppato il controllo sintattico conclusivo con la dimostrazione della validità e completezza del metodo degli alberi di confutazione, si potrebbe applicare questo metodo per una riprova che l'insieme dato è non soddisfacibile: si dovrebbe trovare un n tale che è chiuso l' n -esimo albero, T_n , della successione di alberi ottenuti a partire dall'insieme delle tre formule applicando alternativamente le regole 1 e 2.

Il processo di costruzione di questi alberi si avvia così.

T_0 è costituito dalla sola radice che è l'insieme dato di enunciati, ed è aperto.

T_1 oltre la radice avrà un solo altro nodo ottenuto dalla radice applicandole la regola $R_{1,0}$. Più precisamente il nuovo nodo, oltre gli enunciati della radice conterrà le seguenti formule:

$$\neg Pv_0 v_0, \neg Pv_1 v_1, \neg Pv_2 v_2, \forall v_1 \forall v_2 \neg \wedge \wedge Pv_0 v_1 Pv_1 v_2 \neg Pv_0 v_2, \\ \forall v_3 \forall v_2 \neg \wedge \wedge Pv_1 v_3 Pv_3 v_2 \neg Pv_1 v_2, \forall v_1 \forall v_3 \neg \wedge \wedge Pv_2 v_1 Pv_1 v_3 \neg Pv_2 v_3, \neg \forall v_1 \neg \wedge Pc_1 v_1 Pv_1 c_1, \\ =v_0 v_0,$$

dove la variabile v_3 è stata introdotta per evitare il fenomeno della cattura di variabili) e con c_1 si è indicato, per brevità, il nuovo simbolo di costante $c_{\neg \forall v_0 \forall v_1 \neg \wedge Pv_0 v_1 Pv_1 v_0}$ introdotto nell'analizzare l'unica formula di tipo $\neg \forall$. L'unica foglia di T_1 contiene 11 formule ed è aperta.

Non essendoci alcuna formula del tipo $\neg \wedge$ nella foglia di T_1 , l'insieme delle funzioni che scelgono o l'una alternativa o l'altra nelle formule di detto tipo è costituito solo dalla funzione vuota, sicché applicando R_2 a T_1 si ottiene l'albero T_2 che estende T_1 con un solo nuovo nodo dopo la foglia di T_1 che è uguale a quella foglia. L'unica foglia di T_2 è aperta.

T_3 si otterrà da T_2 estendendolo con un nuovo nodo dopo la sua unica foglia ottenuto applicando alla sua foglia la regola $R_{1,1}$. Questo nodo, oltre alle 11 formule già esplicitate, conterrà anche le seguenti formule:

$$\neg Pc_1 c_1; \neg Pv_3 v_3; \forall v_1 \forall v_2 \neg \wedge \wedge Pv_3 v_1 Pv_1 v_2 \neg Pv_3 v_2; \forall v_1 \forall v_2 \neg \wedge \wedge Pc_1 v_1 Pv_1 v_2 \neg Pc_1 v_2; \\ \forall v_2 \neg \wedge \wedge Pv_0 v_0 Pv_0 v_2 \neg Pv_0 v_2; \forall v_2 \neg \wedge \wedge Pv_0 v_1 Pv_1 v_2 \neg Pv_0 v_2; \forall v_3 \neg \wedge \wedge Pv_0 v_2 Pv_2 v_3 \neg Pv_0 v_3; \\ \forall v_2 \neg \wedge \wedge Pv_0 v_3 Pv_3 v_2 \neg Pv_0 v_2; \forall v_2 \neg \wedge \wedge Pv_0 c_1 Pc_1 v_2 \neg Pv_0 v_2; \forall v_2 \neg \wedge \wedge Pv_1 v_0 Pv_0 v_2 \neg Pv_1 v_2; \\ \forall v_2 \neg \wedge \wedge Pv_1 v_1 Pv_1 v_2 \neg Pv_1 v_2; \forall v_3 \neg \wedge \wedge Pv_1 v_2 Pv_2 v_3 \neg Pv_1 v_3; \forall v_2 \neg \wedge \wedge Pv_1 v_3 Pv_3 v_2 \neg Pv_1 v_2; \\ \forall v_2 \neg \wedge \wedge Pv_1 c_1 Pc_1 v_2 \neg Pv_1 v_2; \forall v_3 \neg \wedge \wedge Pv_2 v_0 Pv_0 v_3 \neg Pv_2 v_3; \forall v_3 \neg \wedge \wedge Pv_2 v_1 Pv_1 v_3 \neg Pv_2 v_3; \\ \forall v_3 \neg \wedge \wedge Pv_2 v_2 Pv_2 v_3 \neg Pv_2 v_3; \forall v_1 \neg \wedge \wedge Pv_2 v_3 Pv_3 v_1 \neg Pv_2 v_1; \forall v_3 \neg \wedge \wedge Pv_2 c_1 Pc_1 v_3 \neg Pv_2 v_3; \\ \neg \neg \wedge Pc_1 c_2 Pc_2 c_1; =c_1 c_1; =v_1 v_1;$$

dove con c_2 si è indicato, per brevità, il nuovo simbolo di costante $c_{\neg \forall v_1 \neg \wedge Pc_1 v_1 Pv_1 c_1}$ introdotto nell'analizzare la formula $\neg \forall v_1 \neg \wedge Pc_1 v_1 Pv_1 c_1$. Si osservi che l'analisi della

formula $\neg \forall v_0 \forall v_1 \neg \wedge P v_0 v_1 P v_1 v_0$ era già presente e non è stata ripetuta. L'unica foglia di T_3 contiene 33 formule ed è aperta.

Ancora, non essendoci alcuna formula del tipo $\neg \wedge$ nella foglia di T_3 , l'insieme delle funzioni che scelgono o l'una alternativa o l'altra nelle formule di detto tipo è costituito solo dalla funzione vuota, sicché applicando R_2 a T_3 si ottiene l'albero T_4 che estende T_3 con un nuovo nodo dopo la foglia di T_3 che è uguale a quella foglia. L'unica foglia di T_4 è aperta.

T_5 si otterrà da T_4 estendendolo con un nuovo nodo dopo la sua unica foglia ottenuto applicando alla sua foglia la regola $R_{1,2}$. Questo nodo, oltre alle formule già esplicitate, conterrà anche le seguenti formule:

- $\wedge P c_1 c_2 P c_2 c_1; \neg P c_2 c_2; \forall v_1 \forall v_2 \neg \wedge P c_2 v_1 P v_1 v_2 \neg P c_2 v_2; \forall v_2 \neg \wedge P v_0 c_2 P c_2 v_2 \neg P v_0 v_2;$
- $\forall v_2 \neg \wedge P v_1 c_2 P c_2 v_2 \neg P v_1 v_2; \forall v_3 \neg \wedge P v_2 c_2 P c_2 v_3 \neg P v_2 v_3;$
- $\forall v_2 \neg \wedge P v_3 v_0 P v_0 v_2 \neg P v_3 v_2; \forall v_2 \neg \wedge P v_3 v_1 P v_1 v_2 \neg P v_3 v_2; \forall v_1 \neg \wedge P v_3 v_2 P v_2 v_1 \neg P v_3 v_1;$
- $\forall v_2 \neg \wedge P v_3 v_3 P v_3 v_2 \neg P v_3 v_2; \forall v_2 \neg \wedge P v_3 c_1 P c_1 v_2 \neg P v_3 v_2; \forall v_2 \neg \wedge P v_3 c_2 P c_2 v_2 \neg P v_3 v_2;$
- $\forall v_2 \neg \wedge P c_1 v_0 P v_0 v_2 \neg P c_1 v_2; \forall v_2 \neg \wedge P c_1 v_1 P v_1 v_2 \neg P c_1 v_2; \forall v_3 \neg \wedge P c_1 v_2 P v_2 v_3 \neg P c_1 v_3;$
- $\forall v_2 \neg \wedge P c_1 v_3 P v_3 v_2 \neg P c_1 v_2; \forall v_2 \neg \wedge P c_1 c_1 P c_1 v_2 \neg P c_1 v_2; \forall v_2 \neg \wedge P c_1 c_2 P c_2 v_2 \neg P c_1 v_2;$
- $* \neg \wedge P v_0 v_0 P v_0 v_0 \neg P v_0 v_0^{\circ}; \neg \wedge P v_0 v_0 P v_0 v_1 \neg P v_0 v_1;$
- $\neg \wedge P v_0 v_0 P v_0 v_2 \neg P v_0 v_2; \neg \wedge P v_0 v_0 P v_0 v_3 \neg P v_0 v_3; \neg \wedge P v_0 v_0 P v_0 c_1 \neg P v_0 c_1;$
- $\neg \wedge P v_0 v_0 P v_0 c_2 \neg P v_0 c_2;$
- $\neg \wedge P v_0 v_1 P v_1 v_0 \neg P v_0 v_0^{\circ}; \neg \wedge P v_0 v_1 P v_1 v_1 \neg P v_0 v_1; \neg \wedge P v_0 v_1 P v_1 v_2 \neg P v_0 v_2; \neg \wedge P v_0 v_1 P$
- $v_1 v_3 \neg P v_0 v_3; \neg \wedge P v_0 v_1 P v_1 c_1 \neg P v_0 c_1; \neg \wedge P v_0 v_1 P v_1 c_2 \neg P v_0 c_2;$
- $\neg \wedge P v_0 v_2 P v_2 v_0 \neg P v_0 v_0^{\circ}; \neg \wedge P v_0 v_2 P v_2 v_1 \neg P v_0 v_1; \neg \wedge P v_0 v_2 P v_2 v_2 \neg P v_0 v_2;$
- $\neg \wedge P v_0 v_2 P v_2 v_3 \neg P v_0 v_3; \neg \wedge P v_0 v_2 P v_2 c_1 \neg P v_0 c_1; \neg \wedge P v_0 v_2 P v_2 c_2 \neg P v_0 c_2;$
- $\neg \wedge P v_0 v_3 P v_3 v_0 \neg P v_0 v_0^{\circ}; \neg \wedge P v_0 v_3 P v_3 v_1 \neg P v_0 v_1; \neg \wedge P v_0 v_3 P v_3 v_2 \neg P v_0 v_2;$
- $\neg \wedge P v_0 v_3 P v_3 v_3 \neg P v_0 v_3; \neg \wedge P v_0 v_3 P v_3 c_1 \neg P v_0 c_1; \neg \wedge P v_0 v_3 P v_3 c_2 \neg P v_0 c_2;$
- $\neg \wedge P v_0 c_1 P c_1 v_0 \neg P v_0 v_0^{\circ}; \neg \wedge P v_0 c_1 P c_1 v_1 \neg P v_0 v_1; \neg \wedge P v_0 c_1 P c_1 v_2 \neg P v_0 v_2; \neg \wedge P v_0 c_1 P$
- $c_1 v_3 \neg P v_0 v_3; \neg \wedge P v_0 c_1 P c_1 c_1 \neg P v_0 c_1; \neg \wedge P v_0 c_1 P c_1 c_2 \neg P v_0 c_2;$
- $** \neg \wedge P v_1 v_0 P v_0 v_0 \neg P v_1 v_0; \neg \wedge P v_1 v_0 P v_0 v_1 \neg P v_1 v_1^{\circ}; \neg \wedge P v_1 v_0 P v_0 v_2 \neg P v_1 v_2; \neg \wedge P v_1 v_0 P$
- $v_0 v_3 \neg P v_1 v_3; \neg \wedge P v_1 v_0 P v_0 c_1 \neg P v_1 c_1; \neg \wedge P v_1 v_0 P v_0 c_2 \neg P v_1 c_2;$
- $\neg \wedge P v_1 v_1 P v_1 v_0 \neg P v_1 v_0; \neg \wedge P v_1 v_1 P v_1 v_1 \neg P v_1 v_1^{\circ}; \neg \wedge P v_1 v_1 P v_1 v_2 \neg P v_1 v_2; \neg \wedge P v_1 v_1 P$
- $v_1 v_3 \neg P v_1 v_3; \neg \wedge P v_1 v_1 P v_1 c_1 \neg P v_1 c_1; \neg \wedge P v_1 v_1 P v_1 c_2 \neg P v_1 c_2;$
- $\neg \wedge P v_1 v_2 P v_2 v_0 \neg P v_1 v_0; \neg \wedge P v_1 v_2 P v_2 v_1 \neg P v_1 v_1^{\circ}; \neg \wedge P v_1 v_2 P v_2 v_2 \neg P v_1 v_2; \neg \wedge P v_1 v_2 P$
- $v_2 v_3 \neg P v_1 v_3; \neg \wedge P v_1 v_2 P v_2 c_1 \neg P v_1 c_1; \neg \wedge P v_1 v_2 P v_2 c_2 \neg P v_1 c_2;$
- $\neg \wedge P v_1 v_3 P v_3 v_0 \neg P v_1 v_0; \neg \wedge P v_1 v_3 P v_3 v_1 \neg P v_1 v_1^{\circ}; \neg \wedge P v_1 v_3 P v_3 v_2 \neg P v_1 v_2; \neg \wedge P v_1 v_3 P$
- $v_3 v_3 \neg P v_1 v_3; \neg \wedge P v_1 v_3 P v_3 c_1 \neg P v_1 c_1; \neg \wedge P v_1 v_3 P v_3 c_2 \neg P v_1 c_2;$
- $\neg \wedge P v_1 c_1 P c_1 v_0 \neg P v_1 v_0; \neg \wedge P v_1 c_1 P c_1 v_1 \neg P v_1 v_1^{\circ}; \neg \wedge P v_1 c_1 P c_1 v_2 \neg P v_1 v_2; \neg \wedge P v_1 c_1 P$
- $c_1 v_3 \neg P v_1 v_3; \neg \wedge P v_1 c_1 P c_1 c_1 \neg P v_1 c_1; \neg \wedge P v_1 c_1 P c_1 c_2 \neg P v_1 c_2;$
- $*** \neg \wedge P v_2 v_0 P v_0 v_0 \neg P v_2 v_0; \neg \wedge P v_2 v_0 P v_0 v_1 \neg P v_2 v_1; \neg \wedge P v_2 v_0 P v_0 v_2 \neg P v_2 v_2^{\circ}; \neg \wedge P v_2 v_0 P$
- $v_0 v_3 \neg P v_2 v_3; \neg \wedge P v_2 v_0 P v_0 c_1 \neg P v_2 c_1; \neg \wedge P v_2 v_0 P v_0 c_2 \neg P v_2 c_2;$
- $\neg \wedge P v_2 v_1 P v_1 v_0 \neg P v_2 v_0; \neg \wedge P v_2 v_1 P v_1 v_1 \neg P v_2 v_1; \neg \wedge P v_2 v_1 P v_1 v_2 \neg P v_2 v_2^{\circ}; \neg \wedge P v_2 v_1 P$
- $v_1 v_3 \neg P v_2 v_3; \neg \wedge P v_2 v_1 P v_1 c_1 \neg P v_2 c_1; \neg \wedge P v_2 v_1 P v_1 c_2 \neg P v_2 c_2;$
- $\neg \wedge P v_2 v_2 P v_2 v_0 \neg P v_2 v_0; \neg \wedge P v_2 v_2 P v_2 v_1 \neg P v_2 v_1; \neg \wedge P v_2 v_2 P v_2 v_2 \neg P v_2 v_2^{\circ}; \neg \wedge P v_2 v_2 P$
- $v_2 v_3 \neg P v_2 v_3; \neg \wedge P v_2 v_2 P v_2 c_1 \neg P v_2 c_1; \neg \wedge P v_2 v_2 P v_2 c_2 \neg P v_2 c_2;$
- $\neg \wedge P v_2 v_3 P v_3 v_0 \neg P v_2 v_0; \neg \wedge P v_2 v_3 P v_3 v_1 \neg P v_2 v_1; \neg \wedge P v_2 v_3 P v_3 v_2 \neg P v_2 v_2^{\circ}; \neg \wedge P v_2 v_3 P$
- $v_3 v_3 \neg P v_2 v_3; \neg \wedge P v_2 v_3 P v_3 c_1 \neg P v_2 c_1; \neg \wedge P v_2 v_3 P v_3 c_2 \neg P v_2 c_2;$
- $\neg \wedge P v_2 c_1 P c_1 v_0 \neg P v_2 v_0; \neg \wedge P v_2 c_1 P c_1 v_1 \neg P v_2 v_1; \neg \wedge P v_2 c_1 P c_1 v_2 \neg P v_2 v_2^{\circ}; \neg \wedge P v_2 c_1 P$
- $c_1 v_3 \neg P v_2 v_3; \neg \wedge P v_2 c_1 P c_1 c_1 \neg P v_2 c_1; \neg \wedge P v_2 c_1 P c_1 c_2 \neg P v_2 c_2;$
- $=c_2 c_2; =v_2 v_2;$

Si osservi che le formule $\neg\forall v_0\forall v_1\neg\wedge Pv_0v_1Pv_1v_0$ e $\neg\forall v_1\neg\wedge Pc_1v_1Pv_1c_1$ sono già state analizzate precedentemente. I segni * e l'andare a capo separano gruppi di formule per riconoscere più facilmente da quali altre formule del nodo precedente siano state ottenute. L'unica foglia di T_5 contiene 143 formule ed è aperta.

Nell'unica foglia di T_5 ci sono 90 formule del tipo $\neg\wedge$, sicché l'insieme delle funzioni che scelgono o l'una alternativa o l'altra nelle formule di detto tipo è costituito 2^{90} funzioni, cioè oltre un miliardo di miliardi di miliardi, e tanti sono i nodi (ciascuno con $223=133+90$ formule) da aggiungere dopo la foglia di T_5 per ottenere T_6 applicando la regola R_2 . Se anche si riuscisse a miniaturizzare la scrittura in modo da scrivere in un millimetro tutte le formule di ciascuna delle foglie di T_6 , accostando una foglia all'altra si coprirebbe una distanza di oltre cento milioni di anni luce. E' vero che scegliendo la seconda alternativa in una delle 15 formule seguite dal segno \circ si ottengono nodi chiusi e la probabilità (in senso classico) di ottenere un nodo aperto è $1/(2^{15})$, ma, scegliendo in tutte queste 15 formule la prima alternativa, rimangono 2^{75} nodi aperti.

E' ovvio che non è praticamente possibile continuare l'esercizio pur sapendo che tra non molto si dovrebbe arrivare ad un albero chiuso e così arrivare alla fine di questo esempio (In effetti in ciascun nodo a livello 7 dell'albero T_7 , sarà presente la formula $\neg\wedge\wedge Pc_1c_2Pc_2c_1\neg Pc_1c_1$, e metà dei nodi a livello 8 dell'albero T_8 saranno chiusi per la presenza della seconda alternativa della formula appena vista, mentre gli altri si chiuderanno a livello 9 nell'albero T_9 per la presenza dell'una o dell'altra sottoalternativa della prima alternativa della formula riportata).

Pur avendo ottenuto i risultati desiderati di validità, completezza e semidecidibilità per il metodo degli alberi di confutazione, tale metodo non è molto agevole per vari motivi, come mostra l'esempio sopra svolto.

Un primo motivo è legato al fatto che si sono voluti ottenere i risultati a partire da insiemi di formule di cardinalità arbitrariamente grande in linguaggi di adeguata cardinalità. Di fatto, se si parte da un insieme infinito più che numerabile di formule (e il linguaggio per esprimerle è un linguaggio più che numerabile), non si sa neppure come elencare le formule dell'insieme, tanto meno analizzarle in pratica. Il punto di vista teorico, sinora adottato, ha permesso di mostrare risultati di carattere generale altrimenti irraggiungibili: per ottenere il teorema di Lowenheim Skolem si sono usati linguaggi della cardinalità voluta dal risultato da ottenere. Ma, una volta che si è visto che i risultati di non categoricità valgono per linguaggi di ogni cardinalità, non è più sostenibile un ricorso a linguaggi enormemente ricchi nella speranza di ottenere una maggiore espressività del linguaggio, e diventa del tutto naturale limitarsi a linguaggi numerabili. Se le formule sono in un linguaggio numerabile, possono essere messe in biiezione con i numeri naturali e pertanto invece di utilizzare regole che aggiungono tante formule ad ogni singola applicazione, si potrebbe passare a regole che aggiungono una sola formula per ogni singola applicazione della regola, perché, adottando una opportuna strategia, se non si arriva ad un albero della successione in costruzione già chiuso, ogni formula rilevante prima o poi verrà analizzata anche con questo metodo.

Un secondo motivo può essere il seguente di carattere estremamente pratico. Per come sono state enunciate le regole 1 e 2 ogni nodo contiene i nodi che lo precedono, impegnando l'estensore a gravosi compiti di riscrittura, il tutto per vedere se in un nodo ci sono una formula e la sua negazione. Se si andasse a controllare se in un ramo ci sono una formula e la sua negazione (e non solo nella foglia) potremmo evitare di ri-

scrivere in nodi successivi formule che già sono in qualche nodo precedente: ciò diminuirebbe notevolmente il peso della scrittura nei nodi degli alberi della successione (ciò è già stato fatto nell'esempio studiato).

Inoltre l'analisi di formule di certi tipi (\neg, \wedge, \forall) non porta solo a condizioni necessarie, ma a condizioni necessarie e sufficienti per la soddisfacibilità di un insieme di formule. Ad esempio, se ad un insieme di formule X non appartiene una formula del tipo $\neg\forall v_0 \neg\varphi(v_0)$ e $X \cup \{\neg\forall v_0 \neg\varphi(v_0)\}$ è soddisfacibile, allora non solo $X \cup \{\neg\forall v_0 \neg\varphi(v_0), \neg\varphi(v_0/c)\}$, con c nuovo simbolo di costante, è soddisfacibile, ma anche dalla soddisfacibilità di $X \cup \{\neg\varphi(v_0/c)\}$ segue quella di $X \cup \{\neg\forall v_0 \neg\varphi(v_0)\}$.

Ancora si sa che le varianti di una formula sono vere esattamente nelle stesse realizzazioni in cui è vera quella formula: pertanto si può decidere di tenere nei nodi degli alberi in costruzione una sola delle varianti di una formula e non le altre.

Un'osservazione, infine, sull'analisi delle formule del tipo $\forall v_0\varphi$. In questo caso l'aggiunta della formula $\varphi(v_0/t)$, dove t è un termine, ad un insieme di formule X , che contiene la formula $\forall v_0\varphi$, preserva la soddisfacibilità dell'insieme di formule (se X è soddisfacibile lo è anche $X \cup \{\varphi(c/t)\}$), ma la soddisfacibilità di X non equivale a quella di $(X - \{\forall v_0\varphi\}) \cup \{\varphi(v_0/t)\}$. Ciò si può leggere affermando che la formula $\varphi(v_0/t)$ non è così ricca di richieste come la formula $\forall v_0\varphi$. Di fatto $\varphi(v_0/t)$ potrebbe essere vera in una realizzazione che rende vere le formule di $X - \{\forall v_0\varphi\}$, mentre nella stessa realizzazione $\forall v_0\varphi$ potrebbe esser falsa. Quanto richiede $\forall v_0\varphi$ è superiore o uguale a ciò che richiede l'intero insieme di formula $Y = \{\varphi(v_0/t): t \text{ termine}\}$. Nell'ottica di sviluppare l'analisi aggiungendo una formula alla volta durante l'analisi, il modo per aggiungere tutte le formule di Y è di analizzare ripetutamente la formula $\forall v_0\varphi$ ed aggiungere, ad ogni ripetizione, una delle formule dell'insieme Y : così facendo saranno considerate tutte le formule dell'insieme Y perché si è supposto che il linguaggio in cui sono scritte queste formule sia numerabile e tale linguaggio ha un numero numerabile di termini. Però, se, nel voler controllare la soddisfacibilità o meno di un insieme di formule, ci si intestardisce a voler analizzare fino in fondo una formula del tipo $\forall v_0\varphi$, si rischia di rimanere per sempre ad analizzare quella formula senza analizzarne altre che magari porterebbero velocemente alla soluzione del problema. Se, ad esempio, fosse dato l'insieme, chiaramente non soddisfacibile, di enunciati $\forall v_0 P v_0$ e $\forall v_1 \neg P v_1$, dove P è un predicato unario, e ci si intestardisse ad analizzare sempre l'enunciato $\forall v_0 P v_0$ ottenendo successivamente le formule $P v_0, P v_1, P v_2, \dots, P v_m, \dots$ si arriverebbe ad una successione di alberi tutti aperti; mentre se dopo aver analizzato una volta la prima formula si analizzasse $\forall v_1 \neg P v_1$ ottenendo $\neg P v_0$, si perverrebbe dopo due passaggi ad un albero chiuso. La situazione è analoga a quella di una coda al supermercato: un cliente non può farsi servire ripetutamente per sempre mentre gli altri aspettano indefinitamente in coda; ognuno deve avere il suo turno, cioè ad ognuno deve essere assegnato un numero d'ordine che indica a che punto toccherà a lui essere servito, e quel numero deve arrivare, prima o poi; chi è già stato servito eventualmente si può rimettere in coda ma alla fine di questa.

Con in mente tutte le esigenze esposte, si cercherà di proporre prima un gruppo di nuove regole, che prevedano l'analisi di una formula alla volta, e poi una strategia (modo di organizzare l'uso delle regole) che ci permettano di controllare sintatticamente se un insieme dato di formule Γ è soddisfacibile o meno.

34. REGOLE PER L'ANALISI DI UNA SOLA FORMULA ALLA VOLTA.

Volendo analizzare una sola formula alla volta, ora le regole dovranno essere molteplici in corrispondenza dei vari tipi di formule che si possono incontrare.

Ecco l'elenco delle regole che si adotteranno. Chiamiamo queste regole **regole di confutazione** perché, come si vedrà, preservando la soddisfacibilità, portano a concludere la non soddisfacibilità di (cioè a confutare) un insieme di formule se si può giungere in un numero finito di passaggi ad un albero chiuso costruito con queste regole a partire da quell'insieme di formule.

$R_{c\neg\neg}$: *Regola del $\neg\neg$.*

Se ad un insieme X di formule appartiene una formula del tipo $\neg\neg\varphi$, l'applicazione di questa regola all'insieme X relativamente alla formula $\neg\neg\varphi$ fa passare ad un nuovo insieme X' ottenuto da X aggiungendo la formula φ , cioè $X'=X\cup\{\varphi\}$.

$R_{c\wedge}$: *Regola del \wedge .*

Se ad un insieme X di formule appartiene una formula del tipo $\wedge\varphi\psi$, l'applicazione di questa regola all'insieme X relativamente alla formula $\wedge\varphi\psi$ fa passare ad un nuovo insieme X' ottenuto da X aggiungendo le formule φ e ψ , cioè $X'=X\cup\{\varphi,\psi\}$.

$R_{c\neg\wedge}$: *Regola del $\neg\wedge$.*

Se ad un insieme X di formule appartiene una formula del tipo $\neg\wedge\varphi\psi$, l'applicazione di questa regola all'insieme X relativamente alla formula $\neg\wedge\varphi\psi$ fa passare a due nuovi insiemi X' e X'' ottenuti da X aggiungendo in un caso la formula $\neg\varphi$ e nell'altro caso la formula $\neg\psi$, cioè $X'=X\cup\{\neg\varphi\}$ e $X''=X\cup\{\neg\psi\}$.

$R_{c\forall}$: *Regola del \forall relativamente al termine t .*

Se ad un insieme X di formule appartiene una formula del tipo $\forall x\varphi$, l'applicazione di questa regola all'insieme X relativamente alla formula $\forall x\varphi$ e al termine t , fa passare ad un nuovo insieme X' ottenuto da X aggiungendo la formula $\varphi(x/t)$, cioè $X'=X\cup\{\varphi(x/t)\}$.

$R_{c\neg\forall}$: *Regola del $\neg\forall$.*

Se ad un insieme X di formule appartiene una formula del tipo $\neg\forall x\varphi$, l'applicazione di questa regola all'insieme X relativamente alla formula $\neg\forall x\varphi$, fa passare ad un nuovo insieme X' ottenuto da X aggiungendo la formula $\neg\varphi(x/t)$ dove t o è una variabile che non occorre libera in X o un simbolo di costante che non è nel linguaggio di X , cioè $X'=X\cup\{\neg\varphi(x/t)\}$ con la stessa condizione su t .

$R_{c=}$: *Regola dell' = relativamente al termine t .*

L'applicazione di questa regola ad un insieme X di formule relativamente al termine t , fa passare ad un nuovo insieme X' ottenuto da X aggiungendo la formula $t=t$, cioè $X'=X\cup\{t=t\}$.

$R_{c/}$: *Regola di sostituzione.*

Se ad un insieme X di formule appartengono sia una formula del tipo $\varphi(x/t)$ che la formula $t=t'$, l'applicazione di questa regola all'insieme X relativamente alle formule $\varphi(x/t)$ e $t=t'$, fa passare ad un nuovo insieme X' ottenuto da X aggiungendo la formula

$\varphi(x/t/t')$, cioè $X' = X \cup \{\varphi(x/t/t')\}$. Qui, come altrove, con la scrittura $\varphi(x/t/t')$ si indica una formula ottenuta dalla formula $\varphi(x/t)$ sostituendo il termine t' a una o più occorrenze di t in $\varphi(x/t)$.

Teorema. Le regole introdotte preservano la soddisfacibilità. Cioè, se si parte da un insieme X soddisfacibile, allora anche l'insieme che la regola fa ottenere (almeno uno degli insiemi che la regola fa ottenere, nel caso della regola $\neg\wedge$) è soddisfacibile.

DIMOSTRAZIONE. Per quasi tutte le regole l'affermazione è banale dal momento che le formule dell'insieme X' (o di X' o di X'' , per la regola $\neg\wedge$) sono vere nella stessa realizzazione che rende vere le formule di X . Unico caso che si discosta leggermente dalla precedente affermazione è quello riguardante la regola del $\neg\forall$. In tale caso, sia σ una realizzazione che rende vere tutte le formule di X . In particolare, $(\neg\forall x\varphi)^\sigma = V$. Pertanto esiste un elemento a appartenente all'universo della realizzazione tale che $(\neg\varphi)^\sigma(x/a) = V$. Si consideri ora la formula $\neg\varphi(x/t)$ introdotta dalla regola. Se t è una variabile che non occorre in X allora la realizzazione $\sigma(t/a)$ rende vere tutte le formule di X , perché t non occorre libera in X , ed anche rende vera $\neg\varphi(x/t)$, perché $\neg\varphi(x/t)^\sigma(t/a) = (\neg\varphi)^\sigma(x/a)$ che già sappiamo essere vera. Se invece t è un nuovo simbolo di costante, allora si consideri l'espansione σ' della realizzazione σ ottenuta interpretando t in a . In tale realizzazione le formule di X continuano ad essere vere perché t non occorre in esse, ed anche $\neg\varphi(x/t)^\sigma = (\neg\varphi)^\sigma(x/t^\sigma) = (\neg\varphi)^\sigma(x/a) = (\neg\varphi)^\sigma(x/a) = V$, cosicché possiamo affermare che tutte le formule di X' sono vere in σ' .

35. UNA STRATEGIA PER LE REGOLE DI ANALISI ESAMINANDO UNA FORMULA ALLA VOLTA.

Si vuol studiare ora come utilizzare queste regole per costruire una successione di alberi finiti (che indicheremo con $T_i, i \in \mathbb{N}$), una estensione finale del precedente, per l'analisi della soddisfacibilità o meno di un insieme di formule in un linguaggio numerabile.

Prima, però, per mettere in luce come una scelta astuta e non meccanica dei passi dell'analisi porti velocemente al risultato, è utile riprendere l'esempio, da cui ha preso avvio questa serie di osservazioni, per svilupparlo con un'analisi intelligente, un po' libera, ma comunque corretta nell'uso delle regole appena introdotte.

A partire dall'insieme dato, che è formato dagli enunciati $\forall v_0 \neg P v_0 v_0$; $\forall v_0 \forall v_1 \forall v_2 \neg \wedge \wedge P v_0 v_1 P v_1 v_2 \neg P v_0 v_2$; $\neg \forall v_0 \forall v_1 \neg \wedge P v_0 v_1 P v_1 v_0$, si costruisce una successione di alberi di cui il primo T_0 ha per unico nodo la radice costituita dal dato insieme di enunciati. Ora si analizzi l'ultimo enunciato ottenendo $\neg \forall v_1 \neg \wedge P c_1 v_1 P v_1 c_1$, e si costruisca T_1 , a partire da T_0 , con l'aggiunta dopo la radice di un solo nodo costituito dal solo enunciato $\neg \forall v_1 \neg \wedge P c_1 v_1 P v_1 c_1$. Poi si analizzi ancora l'ultimo enunciato aggiunto, ottenendo $\neg \neg \wedge P c_1 c_2 P c_2 c_1$, e si costruisca T_2 , a partire da T_1 , con l'aggiunta dopo la foglia di T_1 di un solo nodo costituito dal solo enunciato $\neg \neg \wedge \wedge P c_1 c_2 P c_2 c_1$. Si noti come si siano anzitutto analizzate le formula del tipo $\neg\forall$ considerandole una sola volta. Per ottenere T_3 si analizza ancora l'ultima formula aggiunta e si aggiunge un solo nuovo nodo dopo la foglia di T_2 costituito dall'enunciato $\wedge P c_1 c_2 P c_2 c_1$. Analogamente l'albero T_4 si ottiene aggiungendo un nuovo nodo dopo la foglia di T_3 costituito dai due enunciati $P c_1 c_2$ e $P c_2 c_1$. Così si è completata questa prima parte, in cui si è posposta l'analisi delle formule del tipo $\neg\forall$. L'albero T_4 può essere rappresentato come segue.

$$\begin{array}{c}
\forall v_0 \neg P v_0 v_0; \forall v_0 \forall v_1 \forall v_2 \neg \wedge \wedge P v_0 v_1 P v_1 v_2 \neg P v_0 v_2; \neg \forall v_0 \forall v_1 \neg \wedge P v_0 v_1 P v_1 v_0 \\
| \\
\neg \forall v_1 \neg \wedge P c_1 v_1 P v_1 c_1 \\
| \\
\neg \neg \wedge P c_1 c_2 P c_2 c_1 \\
| \\
\wedge P c_1 c_2 P c_2 c_1 \\
| \\
P c_1 c_2, P c_2 c_1
\end{array}$$

Non essendoci nell'albero altri enunciati da analizzare per la prima volta se non quelli del tipo \forall , si passi finalmente ad analizzare uno di questi e precisamente $\forall v_0 \forall v_1 \forall v_2 \neg \wedge \wedge P v_0 v_1 P v_1 v_2 \neg P v_0 v_2$. Si ottengono così successivamente T7, T8, T9 eliminando via via i quantificatori dell'enunciato considerato e scegliendo di mettere al posto della variabile v_0 il termine c_1 , della variabile v_1 il termine c_2 , e della variabile v_2 ancora il termine c_1 . L'albero T7 può essere rappresentato come segue.

$$\begin{array}{c}
\forall v_0 \neg P v_0 v_0; \forall v_0 \forall v_1 \forall v_2 \neg \wedge \wedge P v_0 v_1 P v_1 v_2 \neg P v_0 v_2; \neg \forall v_0 \forall v_1 \neg \wedge P v_0 v_1 P v_1 v_0 \\
| \\
\neg \forall v_1 \neg \wedge P c_1 v_1 P v_1 c_1 \\
| \\
\neg \neg \wedge P c_1 c_2 P c_2 c_1 \\
| \\
\wedge P c_1 c_2 P c_2 c_1 \\
| \\
P c_1 c_2, P c_2 c_1 \\
| \\
\forall v_1 \forall v_2 \neg \wedge \wedge P c_1 v_1 P v_1 v_2 \neg P c_1 v_2 \\
| \\
\forall v_2 \neg \wedge \wedge P c_1 c_2 P c_2 v_2 \neg P c_1 v_2 \\
| \\
\neg \wedge \wedge P c_1 c_2 P c_2 c_1 \neg P c_1 c_1
\end{array}$$

Ora si comincino ad analizzare le formule del tipo $\neg \wedge$ (e quella del tipo $\neg \neg$) che compaiono per la prima volta. Si otterranno così gli alberi T8 e T9, il secondo dei quali può essere rappresentato così:

$$\begin{array}{c}
\forall v_0 \neg P v_0 v_0; \forall v_0 \forall v_1 \forall v_2 \neg \wedge \wedge P v_0 v_1 P v_1 v_2 \neg P v_0 v_2; \neg \forall v_0 \forall v_1 \neg \wedge P v_0 v_1 P v_1 v_0 \\
| \\
\neg \forall v_1 \neg \wedge P c_1 v_1 P v_1 c_1 \\
| \\
\neg \neg \wedge P c_1 c_2 P c_2 c_1 \\
| \\
\wedge P c_1 c_2 P c_2 c_1 \\
| \\
P c_1 c_2, P c_2 c_1 \\
|
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\forall v_1 \forall v_2 \neg \wedge \wedge Pc_1 v_1 Pv_1 v_2 \neg Pc_1 v_2 \\
| \\
\forall v_2 \neg \wedge \wedge Pc_1 c_2 Pc_2 v_2 \neg Pc_1 v_2 \\
| \\
\neg \wedge \wedge Pc_1 c_2 Pc_2 c_1 \neg Pc_1 c_1 \\
/ \quad \backslash \\
\neg \wedge Pc_1 c_2 Pc_2 c_1 \quad \neg \neg Pc_1 c_1 \\
/ \quad \backslash \quad | \\
\neg Pc_1 c_2 \quad \neg Pc_2 c_1 \quad Pc_1 c_1 \\
== \quad ==
\end{array}$$

Due rami sono chiusi poiché in essi compaiono una formula e la sua negazione, uno è ancora aperto.

Per arrivare a chiudere anche questo ramo si analizzi ora la formula $\forall v_0 \neg Pv_0 v_0$, che non era mai stata utilizzata, scegliendo di mettere al posto della variabile v_0 il termine c_1 . Finalmente si otterrà l'albero T_{10} che è chiuso e che si può rappresentare come segue

$$\begin{array}{c}
\forall v_0 \neg Pv_0 v_0; \forall v_0 \forall v_1 \forall v_2 \neg \wedge \wedge Pv_0 v_1 Pv_1 v_2 \neg Pv_0 v_2; \neg \forall x \forall v_1 \neg \wedge Pv_0 v_1 Pv_1 v_0 \\
| \\
\neg \forall v_1 \neg \wedge Pc_1 v_1 Pv_1 c_1 \\
| \\
\neg \neg \wedge Pc_1 c_2 Pc_2 c_1 \\
| \\
\wedge Pc_1 c_2 Pc_2 c_1 \\
| \\
Pc_1 c_2, Pc_2 c_1 \\
| \\
\forall v_1 \forall v_2 \neg \wedge \wedge Pc_1 v_1 Pv_1 v_2 \neg Pc_1 v_2 \\
| \\
\forall v_2 \neg \wedge \wedge Pc_1 c_2 Pc_2 v_2 \neg Pc_1 v_2 \\
| \\
\neg \wedge \wedge Pc_1 c_2 Pc_2 c_1 \neg Pc_1 c_1 \\
/ \quad \backslash \\
\neg \wedge Pc_1 c_2 Pc_2 c_1 \quad \neg \neg Pc_1 c_1 \\
/ \quad \backslash \quad | \\
\neg Pc_1 c_2 \quad \neg Pc_2 c_1 \quad Pc_1 c_1 \\
== \quad == \quad | \\
\quad \quad \quad \neg Pc_1 c_1 \\
\quad \quad \quad ==
\end{array}$$

Così al decimo albero si è riusciti ad ottenere un albero chiuso.

ESERCIZIO. In analogia a quanto appena fatto, ma a partire dall'insieme dei tre enunciati

$\forall v_0 \neg Pv_0 v_0; \forall v_0 \forall v_1 \forall v_2 \neg \wedge \wedge Pv_0 v_1 Pv_1 v_2 \neg Pv_0 v_2; \neg \forall v_0 \forall v_1 \forall v_2 \neg \wedge \wedge Pv_0 v_1 Pv_1 v_2 Pv_2 v_0$ si costruisca una successione finita di alberi ottenuti ciascuno dal precedente applicando un metodo di analisi ad una formula opportuna nell'albero precedente, in modo che l'ultimo albero della successione sia chiuso permettendo così di concludere sintatticamente che l'insieme dato di enunciati non è soddisfacibile.

Nell'esempio studiato, anche se nel passare da un albero al prossimo si sono applicate le regole introdotte scrupolosamente, (come si è visto, le regole sono metodi di a-

nalisi delle formule che preservano la soddisfacibilità), non è assolutamente evidente un criterio in base al quale, di volta in volta, si è scelto di analizzare una formula piuttosto che un'altra, se non che, con la scelta fatta, si arriva velocemente al risultato. Ciò che può aver guidato le scelte è un riferimento al significato degli enunciati dati. Tuttavia, volendo evitare ogni riferimento al significato nell'analisi sintattica che si sta cercando di costruire, bisogna arrivare a stabilire dei precisi criteri sintattici su quale formula deve essere analizzata di volta in volta.

Per giungere a formulare una strategia opportuna, e' conveniente esaminare prima quali sono le caratteristiche di alcune delle regole che richiedono delle scelte particolari per il loro uso, scelte avranno conseguenze sul modo di determinare la strategia.

Poiché la regola del $\neg\forall$ può richiedere l'uso di nuovi simboli per costanti, si introduca subito un insieme numerabile $C = \{c_i; i \in \mathbb{N}\}$ di nuovi simboli per costanti ottenendo, dal linguaggio iniziale $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0$, i linguaggi \mathcal{L}_i tali che $\mathcal{L}_{i+1} = \mathcal{L}_i \cup \{c_i\}$, e il linguaggio $\mathcal{L}^\infty = \mathcal{L} \cup C$.

Dovendo poi usare anche le regole del \forall e del $=$ relativamente a certi termini, è opportuno stabilire un buon ordinamento dei termini di \mathcal{L}^∞ in modo da poter determinare in relazione a quale termine va applicata una occorrenza di una tale regola. Così l'insieme dei termini sia $\{t_i; i \in \mathbb{N}\}$. Non è restrittivo supporre che i termini vengano ordinati in modo che, per ogni $i \in \mathbb{N}$, t_i sia nel linguaggio \mathcal{L}_i , anzi questa ipotesi, che viene adottata, semplificherà l'esposizione in seguito.

Per poter decidere rispetto a quale formula utilizzare la regola di sostituzione, si stabilisca un buon ordinamento, usando i numeri naturali come indici, delle formule del linguaggio \mathcal{L}^∞ . Così sia $\{\varphi_i; i \in \mathbb{N}\}$ l'insieme delle formule di \mathcal{L}^∞ , ed ancora non è restrittivo supporre che φ_i sia in \mathcal{L}_i .

Infine, nello spirito di analizzare una formula alla volta, si bene ordini anche l'insieme iniziale Γ di formule del linguaggio \mathcal{L} da analizzare, usando i numeri naturali come indici: $\Gamma = \{\gamma_i; i \in \mathbb{N}\}$.

Non solo si dovrà definire la successione degli alberi, ma anche una successione degli insiemi finiti bene ordinati delle formule che sono in attesa d'essere analizzate. Tali insiemi, che saranno chiamati code e indicati con Co_i con $i \in \mathbb{N}$, in generale varieranno nel passare da un albero all'altro.

STRATEGIA.

Iniziamo la definizione per induzione della successione degli alberi e della successione delle code che costituiranno la strategia di utilizzazione delle regole introdotte per l'analisi della soddisfacibilità dell'insieme di formule Γ .

T_0 sia l'albero con la sola radice costituita dall'insieme di formule Γ . Co_0 sia l'insieme bene ordinato costituito dalla sola formula γ_0 .

Per passare da un albero ad un altro utilizzando una regola, si considererà l'insieme delle formule di un ramo r dell'albero da estendere come l'insieme X al quale applicare la regola, mentre l'insieme X' prodotto dalla regola (gli insiemi X' e X'' , nel caso della regola del $\neg\wedge$) sarà l'insieme delle formule del ramo r' (dei rami r' e r'' , nel caso della regola del $\neg\wedge$), nel nuovo albero, che estende r mediante l'aggiunta di un nodo come immediato successore della foglia di r (due nodi entrambi immediati successori della foglia di r nel caso della regola del $\neg\wedge$) costituito dalle formule aggiunte ad X

per ottenere X' (ciascuno costituito dalla formula aggiunta ad X per ottenere X' e X'' rispettivamente).

L'albero T'_n si ottiene dall'albero T_n mediante il seguente procedimento. Sia α la prima formula di Co_n , si devono considerare vari casi dipendenti da quale tipo di formula è α . Se α è $\neg\neg\beta$, oppure $\wedge\beta\delta$, oppure $\neg\wedge\beta\delta$ si applichi la regola del $\neg\neg$, o la regola dell' \wedge , o la regola del $\neg\wedge$, rispettivamente, come sopra descritto, a tutti i rami aperti di T_n che contengono la formula α . Se α è $\forall x\beta$ si applichi la regola del \forall , come sopra descritto, a tutti i rami aperti di T_n che contengono la formula α , relativamente al primo termine t (nell'ordine stabilito dei termini) tale che la formula $\beta(x/t)$ non occorra nel ramo da estendere. Se α è $\neg\forall x\beta$ si applichi la regola del $\neg\forall$, come sopra descritto, a tutti i rami aperti di T_n che contengono la formula α , utilizzando il simbolo per costante c_n nella formula $\neg\beta(x/c_n)$: di fatto tale simbolo per costante non occorre nel ramo da estendere perché, come si potrà osservare facilmente per induzione, per ogni n , \mathcal{L}_n è un linguaggio sufficiente per le formule dell'albero T_n .

L'albero T_{n+1} si ottiene dall'albero T'_n aggiungendo ad ogni foglia di un ramo aperto dell'albero T'_n , come immediato successore, un nuovo nodo costituito dalla formula $t_{n+1}=t_n$ e, se c'è, dalla prima formula dell'ordinamento delle formule che non occorra già nel ramo che viene esteso, che sia nel linguaggio \mathcal{L}_n e tale che è del tipo $\varphi(x/t/t')$ con $\varphi(x/t)$ e $t=t'$ (dove t è diverso dal termine t') formule che occorrono nel ramo di T'_n che viene esteso: in pratica si sono applicate contemporaneamente le regole dell'uguale, relativamente al termine t_n , e di sostituzione riguardo alla formula sopra specificata.

Per ottenere Co_{n+1} da Co_n si deve togliere il primo elemento di Co_n ed aggiungere, alla fine di ciò che resta, prima, se c'è e non è atomica o negazione di atomica, la formula γ_{n+1} di Γ , seguita, in buon ordine, dalle formule non atomiche che sono nei nodi di T_{n+1} e non nei nodi di T_n , poi dalle formule del tipo $\varphi(x/t/t')$ introdotte nel passare da T'_n a T_{n+1} , ed, infine, la formula tolta all'inizio di Co_n se questa è del tipo \forall .

Dalla definizione della strategia, è immediato osservare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, l'albero T_n è finito nel linguaggio \mathcal{L}_n , con un numero finito di successori immediati di ogni nodo, di fatto al più due, e con un numero finito di formule, ancora al più due, in ogni nodo diverso dalla radice; ed anche ogni coda Co_n è costituita da un insieme finito e ben ordinato di formule, tutte nel linguaggio \mathcal{L}_n .

Se l'insieme Γ iniziale di formule da analizzare è soddisfacibile, allora ciascuno degli alberi della successione ha almeno un ramo soddisfacibile, dal momento che le regole adottate per la costruzione degli alberi della successione preservano la soddisfacibilità. Inoltre ogni ramo soddisfacibile è aperto e nel passare da un albero con almeno un ramo aperto al prossimo albero della successione il numero di nodi aumenta di almeno uno. Così, a partire da un insieme Γ soddisfacibile, per ogni $n \in \mathbb{N}$, l'albero T_n ha almeno un ramo aperto e almeno n nodi.

Sicché vale il seguente

Teorema di validità. Se esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che l'albero T_n è chiuso allora l'insieme iniziale di formule, dal quale si è costruita la successione di alberi, è non soddisfacibile.

DIMOSTRAZIONE. Se, per assurdo, l'insieme iniziale di formule fosse soddisfacibile, allora tutti gli alberi ottenuti a partire da lui usando le regole, e in particolare gli alberi della successione voluta dalla strategia, sarebbero aperti (cioè avrebbero almeno un ramo con una foglia aperta), perché le regole preservano la soddisfacibilità. Ciò contraddirebbe l'ipotesi che T_n sia chiuso, e questa contraddizione dimostra che l'insieme iniziale di formule deve essere non soddisfacibile.

D'altra parte se, per ogni $n \in \mathbb{N}$, l'albero T_n è aperto, essendo ciascuno di questi alberi un'estensione finale del precedente (cioè contiene il precedente e i nodi che eventualmente ha in più seguono le foglie del precedente), si può considerare l'albero $T^\infty = \cup T_n$, che contiene ciascuno di questi. L'albero T^∞ ha infiniti nodi e ogni suo nodo ha un numero finito di immediati successori. Pertanto, in base al lemma di König, T^∞ ha un ramo infinito. Il ramo infinito non può essere chiuso, perché, altrimenti, conterrebbe una formula in un suo nodo e la negazione di quella formula in un altro nodo, e il ramo si chiuderebbe immediatamente dopo il secondo (nell'ordine del ramo) dei due nodi considerati, e sarebbe finito.

Se si dimostra che un ramo infinito è un insieme di Hintikka (e si è organizzata la strategia proprio per arrivare a ciò) allora sarà pure soddisfacibile (poiché lo è ogni insieme di Hintikka), ed in particolare sarà soddisfacibile la radice, che è un insieme di formule contenuto nell'insieme di formule del ramo, costituita dall'insieme Γ di cui si voleva sapere se era soddisfacibile o meno.

Pertanto ci accingiamo a dimostrare il seguente

Lemma. Un ramo aperto di T^∞ è un insieme di Hintikka.

DIMOSTRAZIONE. Ovviamente bisogna controllare se le singole clausole di un insieme di Hintikka sono rispettate dall'insieme delle formule di un ramo aperto di T^∞ .

La clausola 0) segue dall'osservazione precedente che un ramo infinito è aperto.

Per le clausole 1), 2), 3), 5), sia φ la formula, non atomica o negazione di atomica, che si ipotizza sia nell'insieme che si vuol dimostrare essere di Hintikka, nel ramo infinito nel caso in esame. O φ è nella radice, oppure è in un nodo come risultato dell'applicazione delle regole. In entrambi i casi ad un certo punto entra in una coda, diciamo Co_n , e quando lo fa è ad un certo punto, diciamo al k -esimo. Nella coda $Co_{n+(k-1)}$ la formula φ sarà all'inizio di quella coda. Così, nel passare dall'albero $T_{n+(k-1)}$ all'albero $T'_{n+(k-1)}$, si applica proprio la regola relativa alla formula φ , e si inserisce dopo la foglia di ogni ramo aperto di $T_{n+(k-1)}$, e anche in quello che diverrà parte del ramo infinito, un nodo con la formula o le formule richieste dalla clausola relativa alla formula φ .

Per quanto riguarda la clausola 4), sia $\forall x\varphi$ la formula che si ipotizza essere tra le formule del ramo infinito, e sia $\varphi(x/t)$ la formula che deve pure essere nell'insieme affinché sia verificata la clausola 4). Come prima, verrà un certo momento in cui questa formula sarà all'inizio di una coda e ad essa si dovrà applicare la regola del \forall . Ma non è detto che la formula $\varphi(x/t')$ introdotta dalla regola del \forall sia proprio quella con il t voluto dalla clausola 4): può succedere che t preceda t' nel buon ordine dei termini (questo buon ordine era stato considerato fin dalla presentazione della strategia), o che t sia uguale a t' , o che t segua t' . Nel primo caso, proprio per come è stata definita la strategia, si è in una situazione in cui la formula $\varphi(x/t)$ è già presente nel ramo infinito. Nel secondo caso la formula $\varphi(x/t)$ viene inserita anche nel ramo infinito proprio dalla presente applicazione della regola. Nel terzo caso la situazione è più delicata: anche se

la formula voluta $\varphi(x/t)$ non viene inserita nel ramo al momento, la stessa formula $\forall x\varphi$ continuerà a tornare all'inizio della coda, perché viene rimessa alla fine della coda dopo ciascuna volta che è giunta all'inizio, e ogni volta provoca l'applicazione della regola del \forall introducendo nel ramo la formula $\varphi(x/t^*)$ con termini t^* sempre più avanti nel buon ordinamento dei termini, sicché t^* dovrà arrivare a superare nell'ordinamento dei termini anche t , ed allora si sarà sicuri che anche $\varphi(x/t)$ sarà presente nel ramo infinito. Così si sarà finalmente mostrato che anche la clausola 4) è rispettata.

Per quanto riguarda la clausola 6), sia $t=t$ la formula che si vuol far vedere che è presente nell'insieme. Avendo bene ordinato l'insieme di tutti i termini, t sarà il k -esimo termine nell'elenco, e nel passare dall'albero T'_k all'albero T_{k+1} si aggiunge in ogni ramo aperto, e quindi anche nel ramo che fa parte del ramo infinito considerato di T^∞ , la formula $t=t$, sicché anche la clausola 6) è rispettata.

Infine, per quanto riguarda la clausola 7), se le formule $\varphi(x/t')$ e $t'=t''$ sono nel ramo infinito considerato di T^∞ , esse sono nel tratto iniziale di tale ramo contenuto in un opportuno albero T_n . Sia $\varphi(x/t'/t'')$ la formula che la clausola vorrebbe presente nel ramo infinito, essa sarà la formula φ_i nell'iniziale buon ordinamento delle formule. Al più tardi nel passare dall'albero T'_{n+i} all'albero T_{n+i+1} sarà introdotta in ogni ramo aperto di T_{n+i+1} , e quindi anche nel ramo infinito di T^∞ , la formula $\varphi(x/t'/t'')$, e ciò mostra che anche la clausola 7) è rispettata.

Ciò conclude la dimostrazione.

Avendo acquisito il precedente lemma possiamo dire di aver completato anche la dimostrazione, avviata precedentemente, del seguente

Teorema di completezza. Se per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'albero T_n , costruito a partire da un insieme di formule Γ è aperto, allora la radice Γ di tutti questi alberi è un insieme soddisfacibile.

DIMOSTRAZIONE. Si era già osservato che l'albero unione della successione di alberi aperti T_n , una estensione finale del precedente, deve avere un ramo infinito, per il lemma di König. Si è già visto che un ramo infinito deve essere aperto, ed infine si è visto, grazie al lemma precedente, che un tale ramo infinito è un insieme di Hintikka. Sappiamo che gli insiemi di Hintikka sono soddisfacibili, sicché lo sarà anche l'insieme di formule Γ che è contenuto nell'insieme di Hintikka.

Il precedente risultato fa riferimento a una successione di alberi costruiti grazie ad una strategia che prescrive come utilizzare le regole. Tuttavia una volta acquisito tale risultato, anzi proprio a causa di questo, si può affermare che

Teorema di completezza (ulteriore versione). Un insieme di formule Γ è non soddisfacibile se si riesce a costruire, a partire da quell'insieme e mediante le regole introdotte (anche senza seguire una strategia), un albero chiuso. Un insieme di formule è soddisfacibile se non esiste alcun albero chiuso costruito a partire da quell'insieme mediante le regole introdotte.

DIMOSTRAZIONE. Come si è già visto nella dimostrazione del teorema di validità, se c'è un albero chiuso, ottenuto a partire dall'insieme di formule Γ mediante le regole, anche senza seguire la strategia, allora l'insieme Γ è non soddisfacibile, perché l'applicazione delle regole preserva la soddisfacibilità e a partire da un insieme soddisfacibile danno solo alberi aperti. Se, d'altra parte, non esiste alcun albero chiuso, non saran-

no chiusi neppure gli alberi ottenuti con la strategia, e, per il risultato precedente, l'insieme Γ sarà soddisfacibile.

Quest'ultima versione è utile quando si vuole mostrare la non soddisfacibilità di un insieme di formule, nel qual caso basta costruire un albero chiuso, che, a volte, può essere ottenuto più rapidamente non seguendo pedissequamente le prescrizioni della strategia, ma scegliendo un ordine di applicazione delle regole ad hoc (per l'insieme di formule che si vuole analizzare) astuto ed opportuno.

OSSERVAZIONE.

La costruzione di un albero chiuso a partire da un insieme di formule applicando astutamente le regole opportune per arrivare velocemente alla conclusione, è una costruzione che richiede intelligenza di ciò che si sta facendo, basandosi spesso sulla comprensione di quali significati possano avere le formule dell'insieme (cioè di che tipo possano essere i loro modelli). Se questo è pure interessante, appunto per velocizzare la costruzione dell'albero, tale modo di procedere è, per un verso, garantito dai risultati sintattici ottenuti, ma, e questo è più importante, non è nello spirito di ciò che si sta facendo nell'elaborare un linguaggio formale: la ricerca di un metodo puramente sintattico (e quindi senza il minimo ricorso all'intelligenza, alla comprensione dei significati) per determinare se un insieme di formule è soddisfacibile o meno. La strategia, che si basa su osservazioni puramente sintattiche, permette appunto di raggiungere il traguardo prefissato, anche se a costo di lungaggini e perdite di tempo dovute particolarmente alla non determinazione di quali applicazioni di regole sono le più convenienti nel procedere dell'analisi: senza questa indicazione si dovranno tentare un po' tutte le possibili strade (e la strategia è fatta per non lasciarne alcuna di intentata) e, andando a tentoni, si arriverà quando si arriverà, eventualmente dopo molti passaggi che, a posteriori, si riconoscono inutili. Comunque si è dimostrato che c'è un metodo di analisi della soddisfacibilità completo (cioè in piena corrispondenza con la semantica) e chiaramente puramente sintattico, e questo era l'obiettivo prefissato.

Si può osservare che se si parte da un insieme Γ infinito (numerabile) non soddisfacibile allora, per un opportuno numero naturale i , l'albero T_i della successione di alberi costruiti a partire dall'insieme Γ , dovrà essere chiuso. T_i sarà anche finito e finito sarà pure il numero di passaggi da un nodo ad un altro. Ciascuno di tali passaggi corrisponde all'applicazione di una regola ad una formula (due nel caso della regola di sostituzione), sicché il numero di tali formule è finito. Secondo la strategia adottata, si sa che una formula a cui si applica una regola è o prima in una coda, o l'uguaglianza di un termine con se stesso, o una formula ottenuta per sostituzione. Le formule ottenute per sostituzione richiedono che nel ramo dove entrano ci sia già la formula a cui applicare la sostituzione, mentre quelle che sono prime in una coda devono essere state introdotte nella coda. e per la sua costruzione si saranno utilizzate effettivamente solo un numero finito Δ di formule di Γ . Lo stesso albero T_i è un albero chiuso della successione di alberi costruita a partire da Δ , che sarà, di conseguenza, non soddisfacibile. Abbiamo così ridimostrato, nella presente situazione, il seguente

Teorema di compattezza (semantico). Se un insieme di formule è non soddisfacibile, allora esiste un suo sottinsieme finito non soddisfacibile. Equivalentemente, nella

formulazione contronominale, se ogni sottinsieme finito di un certo insieme di formule è soddisfacibile allora anche l'intero insieme sarà soddisfacibile.

Si osservi che, se l'insieme dato è finito, quanto afferma il teorema è del tutto banale. Si osservi anche che l'implicazione inversa dell'affermazione del teorema è ovvia, e, combinandola con il teorema stesso, si può affermare che un insieme di formule è soddisfacibile se e solo e ogni suo sottinsieme finito è soddisfacibile.

Si può osservare ancora che il teorema di compattezza semantico è stato ottenuto applicando il teorema di compattezza al seguente risultato, dimostrato lungo il percorso, che va sotto il nome di

Teorema di compattezza (sintattico) per questo metodo.

Se un insieme di formule ha un albero chiuso, allora c'è un suo sottinsieme finito che ha un albero chiuso.

OSSERVAZIONE.

Si supponga che l'insieme iniziale di formule di cui si cerca di sapere se sono soddisfacibili o meno sia finito (il che equivale a dire che è costituito dall'unica formula che è la congiunzione delle formule dell'insieme dato, perché la soddisfacibilità di un insieme di formule richiede l'esistenza di una realizzazione in cui sono vere tutte le formule dell'insieme e dunque la loro congiunzione). In tale caso le formule lungo un ramo di uno degli alberi, sia questo T_n , della successione costruita per l'analisi della soddisfacibilità, sono ancora in numero finito, e se ne può considerare la congiunzione: $\wedge\{\varphi: \varphi \text{ occorre nel ramo } r \text{ dell'albero } T_n\}$. Se α è la congiunzione delle finite formule iniziali, e se α è non soddisfacibile allora anche la congiunzione delle formule di un ramo non è soddisfacibile perché lo è uno dei congiunti, precisamente α . D'altra parte se è soddisfacibile allora l'insieme delle formule di almeno un ramo costituiscono un insieme soddisfacibile (dal momento che le regole preservano la soddisfacibilità), e quindi è soddisfacibile anche la congiunzione dell'insieme di formule di quel ramo.

Nella successione di alberi costruiti a partire da un insieme di formule con le regole per analisi di una formula alla volta, il numero dei rami è finito. Così nella situazione che si sta considerando (che l'insieme iniziale di formule da analizzare sia finito), all'intero albero si può far corrispondere la disgiunzione tra le varie congiunzioni delle formule di un ramo in corrispondenza dei vari rami di un albero T_n della successione di alberi. Così alla formula α si può far corrispondere la formula α_n che è $\vee\{\wedge\{\varphi: \varphi \text{ occorre nel ramo } r\}: r \text{ è un ramo dell'albero } T_n\}$. Si noti che α è soddisfacibile se e solo se lo è α_n . Infatti se α è soddisfacibile allora lo è pure la congiunzione delle formule di un ramo (come si è notato poco fa), e dunque anche una disgiunzione un cui disgiunto sia proprio quella congiunzione; mentre se α non è soddisfacibile allora non lo è neppure ciascuna delle congiunzioni tra le formule di un ramo, e dunque neppure la disgiunzione tra queste congiunzioni.

In particolare, se T_n è chiuso, allora la formula α_n è una disgiunzione di congiunzioni ciascuna delle quali contiene una formula e la sua negazione, cioè una disgiunzione di congiunzioni chiaramente non soddisfacibili, e di ciò ce se ne accorge semplicemente per ispezione della formula α_n .

OSSERVAZIONE SUL MODO DI CHIUDERE I RAMI.

Mentre con il metodo degli alberi di confutazione a blocchi il riconoscere se un ramo è chiuso si fa controllando se la sua foglia è chiusa, usando l'analisi formula per formula per poter affermare che un ramo è chiuso bisogna scorrere l'intero ramo alla ricerca della presenza sia di una formula che della sua negazione.

Però ci si potrebbe facilmente riportare ad un controllo delle sole foglie per vedere quali rami sono chiusi convenendo che, non appena nel ramo occorre una formula φ e la sua negazione $\neg\varphi$, si aggiunge nella foglia la formula della coppia $\{\varphi, \neg\varphi\}$, che non è già nella foglia. Allora si potrebbe insistere che un ramo è chiuso esattamente quando nella sua foglia sono presenti sia una formula che la sua negazione.

Questo modo di operare, aggiungendo una copia di una formula presente in un nodo di un ramo nella foglia dello stesso ramo, non altera la soddisfacibilità o meno del ramo, non alterando l'insieme delle formule del ramo (dal punto di vista insiemistico, se un elemento è ripetuto più volte nella descrizione di un insieme, la descrizione descrive lo stesso insieme che è indicato da una descrizione che differisce dalla data solo perché non ripete la menzione di quell'elemento). Di fatto a fianco dell'insieme di formule di un ramo, c'è anche l'insieme degli insiemi di formule nei singoli nodi del ramo, e questo insieme di insiemi cambia se si opera l'aggiunta appena descritta.

L'aggiunta che si propone può essere realizzata in modo puramente sintattico e può essere colta dalla regola

R_cr: Regola di ripetizione.

Se ad un insieme X di formule appartiene la formula φ , l'applicazione di questa regola all'insieme X relativamente alla formula φ fa passare ad un nuovo insieme X' ottenuto da X aggiungendo la formula φ , cioè $X' = X \cup \{\varphi\}$.

Poiché l'insieme X' ottenuto applicando la regola appena introdotta è uguale all'insieme X , chiaramente questa regola preserva la soddisfacibilità, ma, detta nel modo appena esposto, appare chiaramente come una regola del tutto inutile. Se però invece di applicare questa regola ad un insieme di formule (come si è fatto finora per tutte le regole introdotte) la si considera in relazione alla costruzione degli alberi, essa può acquistare interesse e si trasforma nella seguente regola sempre puramente sintattica.

R_csr: Regola strutturale di ripetizione.

Se in un ramo occorre la formula φ , l'applicazione di questa regola al ramo relativamente alla formula φ fa passare ad un nuovo ramo r' ottenuto da r mettendo la formula φ anche nella foglia del ramo.

E' immediato che questa regola preserva la soddisfacibilità dell'insieme costituito dalle formule del ramo, che rimane invariato dall'applicazione della regola.

La regola $R_{c}sr$ è stata denominata strutturale appunto perché apporta delle modifiche sintattiche alla struttura degli alberi di confutazione formula per formula senza variare gli insiemi di formule che vengono considerati per controllare la soddisfacibilità della radice dell'albero.

Si noti come utilizzando anche la regola $R_{c}sr$ si potrebbe modificare leggermente il metodo visto per arrivare a dichiarare chiuso un ramo solo quando la sua foglia è chiusa, pur conservando tutti i risultati finora ottenuti. Infatti sarà sufficiente apportare la seguente modifica alla strategia. Nella strategia precedentemente vista si prescriveva di non applicare alcuna regola alle foglie di un ramo chiuso. Questa parte, e solo questa, va sostituita con la seguente pattuizione: non va applicata alcuna regola alle foglie chiuse, mentre ai rami chiusi senza relativa foglia chiusa si applica la regola $R_{c}sr$ relativamente ad una formula occorrente nel ramo tale che o la sua negazione compare nella foglia oppure è la negazione di una formula che compare nella foglia.

Chiameremo **alberi strutturati di confutazione formula per formula**, gli alberi ottenuti con la nuova strategia ed utilizzando anche la regola R_{csr} .

E' facile controllare che, con queste modifiche, si riottiene il teorema di completezza relativamente al controllo sintattico realizzato con il metodo degli alberi strutturati di confutazione formula per formula. Inoltre si potranno ridimostrare tutti i vari risultati finora ottenuti utilizzando questo nuovo metodo di controllo sintattico.

34. UN CONTROLLO SINTATTICO PER LA VALIDITA'.

A volte, si è interessati a vedere se una formula è valida o meno, piuttosto che controllarne la soddisfacibilità o meno.

Si noti che ora ci si interessa ad un'unica formula e non ad un insieme di formule.

Come osservato molto prima, una formula è valida se e solo se la sua negazione è non soddisfacibile. Per non appesantire con troppi segni di negazione le formule, si può riformulare quanto appena affermato nel modo seguente: una formula φ è valida se e solo se è non soddisfacibile la formula che chiameremo negazione semplificata e che indicheremo con φ^\neg , che è o $\neg\varphi$ se la formula non inizia con una negazione o, se questa inizia proprio con una negazione (φ è $\neg\psi$), la formula privata di quella negazione (ψ). Il risultato che lega validità e non soddisfacibilità appena ricordato, permette di usare il metodo sintattico degli alberi di confutazione anche per controllare sintatticamente se una formula φ è valida: infatti basta controllare con detto metodo se φ^\neg è non soddisfacibile.

Ma ci si può domandare se questo giro attraverso la non soddisfacibilità è proprio indispensabile o, piuttosto, è evitabile costruendo un altro insieme opportuno di regole?

Di fatto si può osservare che nel metodo finora seguito, affinché il nodo iniziale fosse soddisfacibile, le formule di almeno un ramo dovevano essere simultaneamente soddisfacibili, il che equivale, nel caso di una sola formula nel nodo iniziale e quindi di un numero finito di formule in un ramo di un qualsiasi albero T_n , alla soddisfacibilità della congiunzione delle formule di almeno un ramo, cioè alla soddisfacibilità della formula $\wedge\{\alpha: \alpha \text{ è una formula occorrente nel ramo } r\}$. Poiché in questo caso in cui il nodo iniziale è costituito da una sola formula, come si è già visto, il numero degli immediati successori di un nodo è finito, ne segue che i rami di un albero, oltre ad essere finiti, sono in numero finito, e il fatto che la congiunzione di tutte le formule di almeno un ramo (cioè $\wedge\{\alpha: \alpha \text{ è una formula occorrente nel ramo } r\}$) sia soddisfacibile si può esprimere anche dicendo che la disgiunzione delle congiunzioni delle formule di un ramo, al variare del ramo nell'albero, deve essere soddisfacibile, cioè deve essere soddisfacibile la formula $\vee\{\wedge\{\alpha: \alpha \text{ è una formula occorrente nel ramo } r\}: r \text{ è un ramo di } T\}$, dove T è l'albero che si sta considerando.

Analogamente, sempre nel caso di radice costituita da una sola formula, per concludere che il nodo iniziale non è soddisfacibile è sufficiente osservare che ogni ramo di un opportuno albero T contiene una formula e la sua negazione. Allora, infatti, per ogni ramo r , la congiunzione delle formule di quel ramo, $\wedge\{\alpha: \alpha \text{ è una formula occorrente nel ramo } r\}$, sarebbe non soddisfacibile e la disgiunzione di queste congiunzioni (non soddisfacibili), $\vee\{\wedge\{\alpha: \alpha \text{ è una formula occorrente nel ramo } r\}: r \text{ è un ramo di } T\}$, sarebbe ancora non soddisfacibile, mentre dovrebbe essere soddisfacibile se la formula della radice fosse soddisfacibile, come osservato appena sopra.

Grazie al teorema di completezza, si può concludere che una formula è non soddisfacibile se e solo se c'è un albero costruito a partire da quella formula tale che la disgiunzione delle congiunzioni delle formule di un ramo, al variare dei rami nell'albero, è non soddisfacibile.

Questo risultato può anche essere letto nel modo seguente: una formula φ è valida se e solo se c'è un albero T , costruito a partire da φ^\neg usando le regole di confutazione, tale che la negazione della disgiunzione delle congiunzioni delle formule di un ramo, al variare dei rami nell'albero, è valida, cioè $\neg\{\wedge\{\alpha: \alpha \text{ è una formula occorrente nel ramo } r\}: r \text{ è un ramo di } T\}$ è valida. La validità dell'ultima formula è chiaramente equivalente, per il significato delle abbreviazioni usate, alla validità della formula $\wedge\{\vee\{\neg\alpha: \alpha \text{ è una formula occorrente nel ramo } r\}: r \text{ è un ramo di } T\}$, che, a sua volta, è equivalente, per il significato della notazione φ^\neg , alla validità della formula $\wedge\{\vee\{\alpha^\neg: \alpha \text{ è una formula occorrente nel ramo } r\}: r \text{ è un ramo di } T\}$. Così si vede che ciò che è interessante è l'albero T^\neg ottenuto da T sostituendo ad ogni formula α in esso la formula α^\neg . Rispetto all'albero T^\neg , l'affermazione precedente può esser letta così: φ è valida se e solo è valida la formula $\wedge\{\vee\{\beta: \beta \text{ è una formula occorrente nel ramo } r\}: r \text{ è un ramo di } T^\neg\}$

Di fatto l'albero T era stato ottenuto ad un certo punto delle costruzioni di una successione finita di alberi T_i , $i=0, \dots, n$ ciascuno ottenuto dal precedente mediante l'applicazione di regole che preservano la soddisfacibilità. Se però, ora, in tutti gli alberi della successione si sostituisce a ciascuna formula α la formula α^\neg , si può dire che gli alberi T_i^\neg della nuova successione sono stati ottenuti mediante l'applicazione di regole puramente sintattiche ottenute dalle precedenti regole sintattiche sostituendo alle formule occorrenti la loro negazione semplificata.

Le regole precedenti avevano la caratteristica di preservare la soddisfacibilità (cioè se applicate ad un insieme Γ soddisfacibile portavano ad un insieme soddisfacibile Γ') caratteristica che, nel caso ora in esame di applicazione ad un insieme finito, può essere riformulata, facendo ricorso alle formule che sono una la congiunzione delle formule dell'insieme finito Γ e l'altra la congiunzione delle formule dell'insieme finito Γ' , nel seguente modo: se la congiunzione delle formule di Γ è soddisfacibile allora anche la congiunzione delle formule di Γ' è soddisfacibile. In contrasto, le nuove regole, proprio per come sono state suggerite, avrebbero la seguente caratteristica: se la disgiunzione delle formule dell'insieme Γ' ottenuto dall'applicazione di una regola è valida, allora la disgiunzione delle formule dell'insieme Γ di partenza è valida. Così si può dire che le nuove regole preservano la validità della disgiunzione di un insieme di formule nella direzione opposta.

Diventa allora conveniente presentare le nuove regole nella direzione opposta, dall'insieme ottenuto all'insieme di partenza: le regole diventano, in qualche modo, regole di riduzione degli insiemi a cui si applicano, e non, come le precedenti, di ampliamento.

Ecco come si presentano le nuove regole per il controllo della validità, che chiamiamo

REGOLE DI DEDUZIONE

$R^{\forall \neg \neg}$: *Regola del $\neg \neg$*

Siano φ una formula e Γ un insieme finito di formule. L'applicazione di questa regola fa passare dall'insieme di formule $\Gamma \cup \{\neg \neg \varphi, \varphi\}$ all'insieme di formule $\Gamma \cup \{\neg \neg \varphi\}$.

$R^{\forall \wedge}$: *Regola del \wedge*

Siano φ e ψ formule e Γ un insieme finito di formule. L'applicazione di questa regola fa passare dagli insiemi di formule $\Gamma \cup \{\varphi \wedge \psi, \varphi\}$ e $\Gamma \cup \{\varphi \wedge \psi, \psi\}$ all'insieme di formule $\Gamma \cup \{\varphi \wedge \psi\}$.

$R^{\forall \neg \wedge}$: *Regola del $\neg \wedge$*

Siano φ e ψ formule e Γ un insieme finito di formule. L'applicazione di questa regola fa passare dall'insiemi di formule $\Gamma \cup \{\neg(\varphi \wedge \psi), \neg \varphi, \neg \psi\}$ all'insieme di formule $\Gamma \cup \{\neg(\varphi \wedge \psi)\}$.

$R^{\forall \forall}$: *Regola del \forall*

Siano φ una formula e Γ un insieme finito di formule. L'applicazione di questa regola fa passare dall'insieme di formule $\Gamma \cup \{\forall x \varphi, \varphi(x/y)\}$ all'insieme di formule $\Gamma \cup \{\forall x \varphi\}$, dove y è una variabile che non occorre libera in $\Gamma \cup \{\forall x \varphi\}$.

$R^{\forall \neg \forall}$: *Regola del $\neg \forall$ relativamente al termine t*

Siano φ una formula e Γ un insieme finito di formule. L'applicazione di questa regola fa passare dall'insieme di formule $\Gamma \cup \{\neg \forall x \varphi, \neg \varphi(x/t)\}$ all'insieme di formule $\Gamma \cup \{\neg \forall x \varphi\}$, qualunque sia il termine t .

$R^{\forall =}$: *Regola $t=t$*

Sia Γ un insieme finito di formule. L'applicazione di questa regola fa passare dall'insieme di formule $\Gamma \cup \{\neg t=t\}$ all'insieme di formule Γ , qualunque sia il termine t .

$R^{\forall /}$: *Regola di sostituzione*

Sia Γ un insieme finito di formule. L'applicazione di questa regola fa passare dall'insieme di formule

$$\Gamma \cup \{\psi, \neg t=t', \psi(t/t')\}$$

all'insieme di formule $\Gamma \cup \{\psi, \neg t=t'\}$ (qui si è indicato con ψ la formula $\neg \varphi$ che verrebbe dalla trasformazione della corrispondente regole vista prima).

Grazie alle osservazioni prima esposte, possiamo affermare il seguente

Teorema (di validità). Le regole di deduzione fanno passare da insiemi finiti di formule la cui disgiunzione è valida a loro sottinsiemi di formule la cui disgiunzione è valida.

Un esempio può servire ad illustrare meglio il legame tra gli alberi di confutazione e il nuovo modo di leggerli a cui stiamo cercando di arrivare. Si consideri la formula $(P_{V_0} \wedge P_{V_1}) \rightarrow (P_{V_1} \wedge P_{V_0})$ che scritta in modo non abbreviato è $\neg \wedge \wedge P_{V_0} P_{V_1} \neg \wedge P_{V_1} P_{V_0}$ (questa formula rappresenta la commutatività della congiunzione ed è evidentemente valida). Per controllare sintatticamente la sua validità si può controllare sintatticamente la non soddisfacibilità della sua negazione semplificata $\wedge \wedge P_{V_0} P_{V_1} \neg \wedge P_{V_1} P_{V_0}$. Così si

avvia la costruzione di alberi di confutazione (e le relative code che qui non vengono indicate) fino a pervenire ad uno chiuso. Trascurando le formule che riguardano l'uguale come simbolo logico, che qui non occorre, si ottiene la seguente successione di quattro alberi di confutazione.

$$\begin{array}{ccc}
 T_0 & T_1 & T_2 \\
 \wedge\wedge Pv_0Pv_1 \neg \wedge Pv_1Pv_0 & \wedge\wedge Pv_0Pv_1 \neg \wedge Pv_1Pv_0 & \wedge\wedge Pv_0Pv_1 \neg \wedge Pv_1Pv_0 \\
 & | & | \\
 & \wedge Pv_0Pv_1, \neg \wedge Pv_1Pv_0 & \wedge Pv_0Pv_1, \neg \wedge Pv_1Pv_0 \\
 & & | \\
 & & Pv_0, Pv_1 \\
 \\
 T_3 & & \\
 \wedge\wedge Pv_0Pv_1 \neg \wedge Pv_1Pv_0 & & \\
 | & & \\
 \wedge Pv_0Pv_1, \neg \wedge Pv_1Pv_0 & & \\
 | & & \\
 Pv_0, Pv_1 & & \\
 / \quad \backslash & & \\
 \neg Pv_1 \quad \neg Pv_0 & & \\
 = \quad = & &
 \end{array}$$

Se si considerano gli alberi strutturati di confutazione, cioè anche il possibile uso della regola R_{csr} , l'albero T_3 non è chiuso, ma il successivo albero T_4 , qui di seguito riportato, lo è.

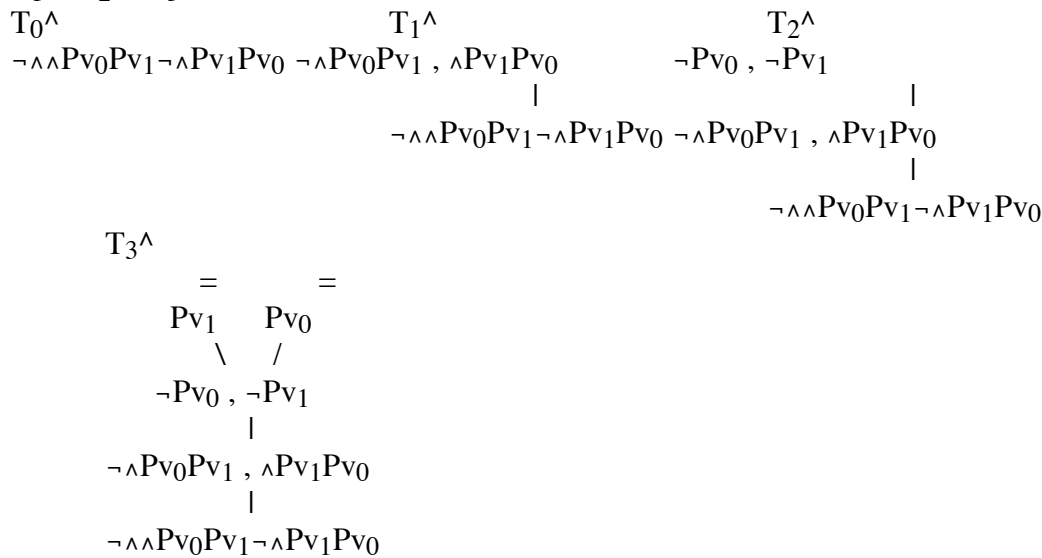
$$\begin{array}{c}
 T_4 \\
 \wedge\wedge Pv_0Pv_1 \neg \wedge Pv_1Pv_0 \\
 | \\
 \wedge Pv_0Pv_1, \neg \wedge Pv_1Pv_0 \\
 | \\
 Pv_0, Pv_1 \\
 / \quad \backslash \\
 Pv_1, \neg Pv_1 \quad Pv_0, \neg Pv_0 \\
 = \quad =
 \end{array}$$

I corrispondenti nuovi alberi T_0^- , T_1^- , T_2^- , T_3^- e T_4^- saranno:

$$\begin{array}{ccc}
 T_0^- & T_1^- & T_2^- \\
 \neg \wedge\wedge Pv_0Pv_1 \neg \wedge Pv_1Pv_0 & \neg \wedge\wedge Pv_0Pv_1 \neg \wedge Pv_1Pv_0 & \neg \wedge\wedge Pv_0Pv_1 \neg \wedge Pv_1Pv_0 \\
 & | & | \\
 & \neg \wedge Pv_0Pv_1, \wedge Pv_1Pv_0 & \neg \wedge Pv_0Pv_1, \wedge Pv_1Pv_0 \\
 & & | \\
 & & \neg Pv_0, \neg Pv_1 \\
 \\
 T_3^- & T_4^- & \\
 \neg \wedge\wedge Pv_0Pv_1 \neg \wedge Pv_1Pv_0 & \neg \wedge\wedge Pv_0Pv_1 \neg \wedge Pv_1Pv_0 & \\
 | & | & \\
 \neg \wedge Pv_0Pv_1, \wedge Pv_1Pv_0 & \neg \wedge Pv_0Pv_1, \wedge Pv_1Pv_0 & \\
 | & | & \\
 \neg Pv_0, \neg Pv_1 & \neg Pv_0, \neg Pv_1 & \\
 / \quad \backslash & / \quad \backslash & \\
 Pv_1 \quad Pv_0 & Pv_1, \neg Pv_1 \quad Pv_0, \neg Pv_0 & \\
 = \quad = & = \quad = &
 \end{array}$$

Poiché abbiamo formulato le regole di deduzione dall'insieme più ampio ad un suo sottinsieme (gli insiemi ora sono costituiti dalle formule di un ramo), è opportuno invertire l'ordine negli alberi e considerare alberi invertiti. Per **albero invertito** si intende un insieme parzialmente ordinato tale che ogni suo elemento (detto nodo) ha esattamente un immediato successore, eccetto un unico nodo che non ha successori e che viene detto radice. I nodi che non hanno predecessori sono detti foglie. Ancora i rami sono sottinsiemi dell'albero invertito totalmente ordinati e massimali. L'albero invertito di un albero T è l'albero T^\wedge che ha gli stessi nodi dell'albero T e per relazione d'ordine la relazione inversa della relazione d'ordine dell'albero T .

Gli alberi invertiti $T_0^\wedge, T_1^\wedge, T_2^\wedge, T_3^\wedge$, corrispondenti rispettivamente agli alberi $T_0^\neg, T_1^\neg, T_2^\neg, T_3^\neg$, saranno:



Si noti che il passaggio dall'albero invertito T_3^\wedge all'albero invertito T_2^\wedge è giustificato dalla regola di deduzione $R^{\vee \wedge}$ applicata agli insiemi costituiti dalle formule di ciascuno dei due rami di T_3^\wedge per ottenere l'insieme costituito dalle formule del ramo di T_2^\wedge . Analogamente il passaggio dall'albero invertito T_2^\wedge all'albero invertito T_1^\wedge è giustificato dalla regola di deduzione $R^{\vee \neg \wedge}$ applicata all'insieme costituito dalle formule del ramo di T_2^\wedge per ottenere l'insieme costituito dalle formule del ramo di T_1^\wedge . E ancora il passaggio dall'albero invertito T_1^\wedge all'albero invertito T_0^\wedge è giustificato dalla regola di deduzione $R^{\vee \neg \wedge}$ applicata all'insieme costituito dalle formule del ramo di T_1^\wedge per ottenere l'insieme costituito dalla formula del ramo di T_0^\wedge . Si può dire che nel passare da un albero invertito al prossimo (di indice diminuito di uno) si sono potate delle foglie del primo.

Si noti che nella presente analisi degli alberi invertiti si dichiara un ramo chiuso quando in esso occorrono sia una formula che la sua negazione, anche se non sono entrambe in una foglia. Ispirandosi all'atteggiamento emerso con l'introduzione del metodo strutturato degli alberi di confutazione formula per formula, ci si può chiedere se anche nell'analisi sintattica della validità si può ottenere qualcosa di analogo.

Di fatto, adottando la regola strutturale corrispondente alla $R_{c}sr$ nel presente contesto, si può definire che un albero è chiuso quando lo sono tutte le sue foglie (che ora sono nodi senza predecessori, nel nuovo ordinamento, dell'albero invertito ottenuto da un albero strutturato di confutazione con foglie chiuse sostituendo, quando opportuno, le formule con le loro negazioni semplificate e invertendo l'ordine dei nodi). Le regole

che giustificano la costruzione dell'albero invertito e che garantiscono la validità della radice se l'albero è chiuso quelle della deduzione naturale corrispondenti a quelle per la costruzione degli alberi di confutazione formula per formula, con l'aggiunta anche della regola corrispondente alla regola strutturale $R_{c}sr$.

Si indicherà con R^{vsr} la regola di deduzione strutturale corrispondente alla regola $R_{c}sr$. Ecco l'enunciazione esplicita di tale regola:

R^{vsr} : *Regola strutturale di ripetizione*

Se nella foglia di un ramo occorrono sia una formula che la sua negazione, φ e $\neg\varphi$, l'applicazione di questa regola al ramo relativamente a ψ , che è una delle due formule φ o $\neg\varphi$, fa passare ad un nuovo ramo r' ottenuto da r spostando la formula ψ in un diverso nodo del ramo.

E' immediato che questa regola si applica solo all'insieme di formule, occorrenti in un ramo r , la cui disgiunzione è valida (contenendo una formula e la sua negazione) e fa ottenere un insieme di formule la cui disgiunzione è ancora valida (per lo stesso motivo).

Anche questa regola è una regola strutturale, nel senso che non riguarda l'insieme delle formule occorrenti in un ramo, ma come queste siano distribuite tra i vari nodi del ramo.

Con quest'ultima modifica l'albero invertito T_3^\wedge dell'esempio diventa il seguente:

$$\begin{array}{c}
 T_3^\wedge \\
 = \\
 \begin{array}{c}
 Pv_1, \neg Pv_1 \quad Pv_0, \neg Pv_0 \\
 \quad \quad \quad \backslash \quad / \\
 \quad \quad \quad \neg Pv_0, \neg Pv_1 \\
 \quad \quad \quad | \\
 \neg \wedge Pv_0 Pv_1, \wedge Pv_1 Pv_0 \\
 \quad \quad \quad | \\
 \neg \wedge \wedge Pv_0 Pv_1 \neg \wedge Pv_1 Pv_0
 \end{array} \\
 =
 \end{array}$$

Fatto fondamentale per arrivare alla conclusione con il metodo degli alberi di confutazione era che in ciascun ramo dell'albero finale fossero presenti una formula e la sua negazione, ora che in ciascuna foglia dell'albero finale sia presente una formula e la sua negazione. Prendendo le negazioni semplificate delle formule che erano presenti, se in un ramo o in una foglia c'erano una formula e la sua negazione, anche dopo aver sostituito le formule negate con le loro negazioni semplificate ancora nello stesso ramo o, corrispondentemente, nella stessa foglia ci sono una formula e la sua negazione. La presenza di una formula e della sua negazione in un ramo o in una foglia, ora che questo insieme viene letto come disgiunzione delle sue formule, garantisce la validità di tale disgiunzione.

Poiché ora le regole che fanno passare da un albero al precedente (nell'ordine degli indici) preservano la validità si potrà arrivare a concludere con la validità della disgiunzione tra le formule (ce n'è una sola) dell'unico ramo del primo albero, cioè con la validità della formula iniziale.

Così si è mostrata la validità di una formula costruendo una successione di alberi invertiti (nel caso dell'esempio la successione degli alberi invertiti $T_3^\wedge, T_2^\wedge, T_1^\wedge, T_0^\wedge$) tale che 1) il primo ha tutte le foglie chiuse (e quindi anche i rami) e costituite da due sole formule, 2) si passa da uno al prossimo applicando una regola di deduzione all'in-

sieme di formule di un ramo (agli insiemi di formule di ciascuno di due rami nel caso della regola $R^{\vee\wedge}$), potando così alcune foglie del primo, e 3) l'ultimo albero è costituito dalla sola radice. Una tale successione finita di alberi invertiti viene detta una **dimostrazione naturale senza indebolimento**. Si noti che una dimostrazione naturale senza indebolimento è un qualcosa puramente sintattico.

Si è abituati a chiamare assiomi le formule valide che vengono scelte come punti di partenza per mostrare sintatticamente la validità di formule. Ora si scelgono come **assiomi** le disgiunzioni tra una formula e la sua negazione; queste sono infinite formule ma tutte del tipo $\varphi \vee \neg\varphi$, sicché si può dire di aver scelto un unico **schema d'assiomi**. Adottando ora esattamente questo schema d'assiomi, la precedente condizione 1) nella definizione di deduzione naturale senza indebolimento può essere ridetta così: 1') tutte le foglie del primo albero invertito della successione sono assiomi.

Prima, nell'applicare le regole di confutazione alla costruzione di una successione di alberi, si era convenuto di considerare come insieme iniziale delle formule, a cui applicare la regola, l'insieme di tutte le formule di un ramo r aperto che si voleva estendere nella costruzione del prossimo albero. Così, nella stessa ottica, nel nuovo nodo (o nei nuovi nodi, nel caso della regola $\neg\wedge$), cioè nel nodo che, per costruire il prossimo albero, si aggiungeva immediatamente dopo la foglia del ramo r , si metteva solo la formula (o le due formule, nel caso della regola \wedge) che veniva aggiunta all'insieme di partenza dall'applicazione della regola usata. Si è richiamata questa procedura per osservare che per aggiungere un nuovo nodo non era necessaria la conoscenza dei nodi successivi.

Ora, si possono mantenere nei singoli nodi le negazioni semplificate delle formule che prima erano nello stesso nodo, ma la lettura diventa più difficile poiché, in certo modo, si sta percorrendo l'albero nella direzione opposta (cioè nella direzione secondo la quale si preserva la validità), e, al contrario di quanto si era fatto in precedenza, bisogna conoscere quelli che saranno i nodi successivi (nell'attuale direzione di percorrenza dell'albero verso la radice) per dire a quali insiemi si applica la regola.

Per superare questa difficoltà, può essere d'ausilio la seguente

$R^{\vee W}$: *Regola W dell'indebolimento (weakening)*.

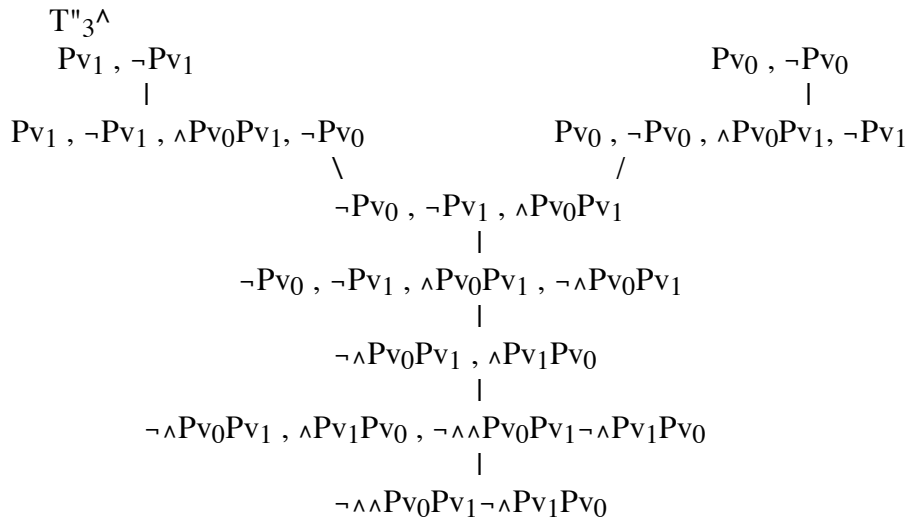
Siano Γ e Δ due insiemi finiti di formule. L'applicazione di questa regola fa passare dall'insieme di formule Γ all'insieme di formule $\Gamma \cup \Delta$.

Si osservi che anche questa regola preserva la validità, nel senso che, se la disgiunzione delle formule di Γ è valida, allora anche la disgiunzione delle formule di $\Gamma \cup \Delta$ è valida.

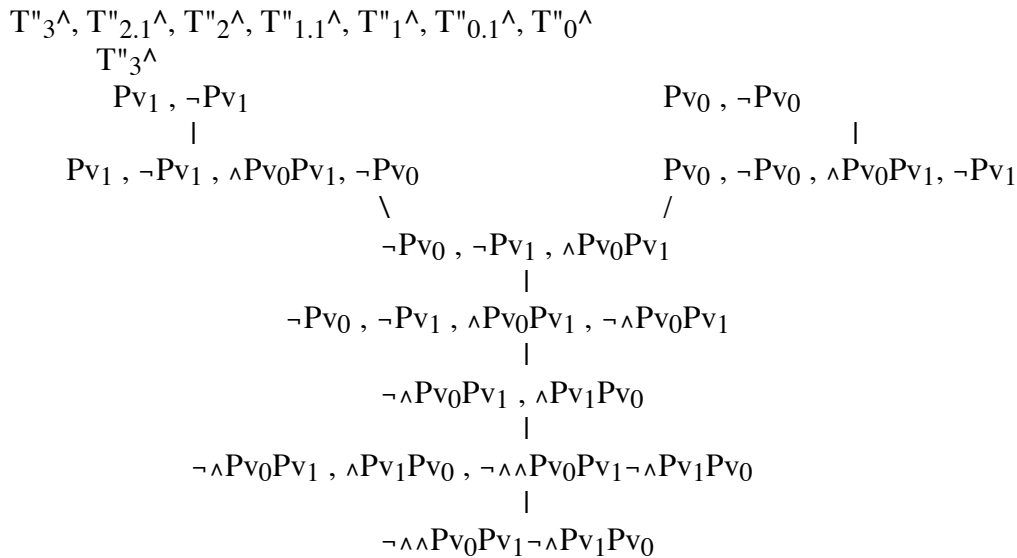
La regola di indebolimento permette di non considerare tutte le formule dei nodi che seguiranno un nodo che si vuol potare nel passare da un albero invertito al prossimo al fine di verificare che sia stata applicata correttamente una regola di deduzione (con qualche attenzione per la regola $R^{\vee\forall}$ che preciseremo subito), ma sarà sufficiente inserire tra il nodo che si vuol potare e il prossimo un nuovo nodo, ottenuto dal primo proprio mediante la regola di indebolimento, scegliendo di aggiungere esattamente le formule che giustificheranno poi l'applicazione della regola di deduzione. Il problema con la regola $R^{\vee\forall}$ è che la stessa regola pone una limitazione sulla variabile menzionata nella regola: essa non deve occorrere libera nei nodi che seguono fino alla radice.

Ciò comporta che usando la regola dell'indebolimento successivamente a tale nodo non bisogna introdurre formule con occorrenze libere di quella variabile. Inoltre bisogna ricordare tale impegno anche quando si applica la regola $R^{\vee \wedge}$ e più rami confluiscono nello stesso nodo: in tal caso, se non viene rispettata la clausola esposta, non si potrà completare la costruzione dell'albero invertito. Se però gli alberi invertiti sono ottenuti da alberi di confutazione sostituendo le formule che in essi occorrono con le loro negazioni semplificate e invertendo l'ordine dei nodi, non c'è pericolo che compaiano variabili che non soddisfano la clausola.

Riprendendo l'esempio già sviluppato, l'albero T_3^\wedge diventerebbe:



Sostanzialmente si è ancora in presenza della seguente successione di alberi invertiti



$$\begin{array}{c}
T''_{2.1} \wedge \\
P_{V_1}, \neg P_{V_1}, \wedge P_{V_0} P_{V_1}, \neg P_{V_0} \qquad \qquad \qquad P_{V_0}, \neg P_{V_0}, \wedge P_{V_0} P_{V_1}, \neg P_{V_1} \\
\qquad \qquad \qquad \backslash \qquad \qquad \qquad / \\
\qquad \qquad \qquad \neg P_{V_0}, \neg P_{V_1}, \wedge P_{V_0} P_{V_1} \\
\qquad \qquad \qquad | \\
\neg P_{V_0}, \neg P_{V_1}, \wedge P_{V_0} P_{V_1}, \neg \wedge P_{V_0} P_{V_1} \\
\qquad \qquad \qquad | \\
\neg \wedge P_{V_0} P_{V_1}, \wedge P_{V_1} P_{V_0} \\
\qquad \qquad \qquad | \\
\neg \wedge P_{V_0} P_{V_1}, \wedge P_{V_1} P_{V_0}, \neg \wedge \wedge P_{V_0} P_{V_1} \neg \wedge P_{V_1} P_{V_0} \\
\qquad \qquad \qquad | \\
\neg \wedge \wedge P_{V_0} P_{V_1} \neg \wedge P_{V_1} P_{V_0}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
T''_2 \wedge \\
\neg P_{V_0}, \neg P_{V_1}, \wedge P_{V_0} P_{V_1} \\
\qquad \qquad \qquad | \\
\neg P_{V_0}, \neg P_{V_1}, \wedge P_{V_0} P_{V_1}, \neg \wedge P_{V_0} P_{V_1} \\
\qquad \qquad \qquad | \\
\neg \wedge P_{V_0} P_{V_1}, \wedge P_{V_1} P_{V_0} \\
\qquad \qquad \qquad | \\
\neg \wedge P_{V_0} P_{V_1}, \wedge P_{V_1} P_{V_0}, \neg \wedge \wedge P_{V_0} P_{V_1} \neg \wedge P_{V_1} P_{V_0} \\
\qquad \qquad \qquad | \\
\neg \wedge \wedge P_{V_0} P_{V_1} \neg \wedge P_{V_1} P_{V_0}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
T''_{1.1} \wedge \\
\neg P_{V_0}, \neg P_{V_1}, \wedge P_{V_0} P_{V_1}, \neg \wedge P_{V_0} P_{V_1} \\
\qquad \qquad \qquad | \\
\neg \wedge P_{V_0} P_{V_1}, \wedge P_{V_1} P_{V_0} \\
\qquad \qquad \qquad | \\
\neg \wedge P_{V_0} P_{V_1}, \wedge P_{V_1} P_{V_0}, \neg \wedge \wedge P_{V_0} P_{V_1} \neg \wedge P_{V_1} P_{V_0} \\
\qquad \qquad \qquad | \\
\neg \wedge \wedge P_{V_0} P_{V_1} \neg \wedge P_{V_1} P_{V_0}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
T''_1 \wedge \\
\neg \wedge P_{V_0} P_{V_1}, \wedge P_{V_1} P_{V_0} \\
\qquad \qquad \qquad | \\
\neg \wedge P_{V_0} P_{V_1}, \wedge P_{V_1} P_{V_0}, \neg \wedge \wedge P_{V_0} P_{V_1} \neg \wedge P_{V_1} P_{V_0} \\
\qquad \qquad \qquad | \\
\neg \wedge \wedge P_{V_0} P_{V_1} \neg \wedge P_{V_1} P_{V_0}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
T''_{0.1} \wedge \\
\neg \wedge P_{V_0} P_{V_1}, \wedge P_{V_1} P_{V_0}, \neg \wedge \wedge P_{V_0} P_{V_1} \neg \wedge P_{V_1} P_{V_0} \\
\qquad \qquad \qquad | \\
\neg \wedge \wedge P_{V_0} P_{V_1} \neg \wedge P_{V_1} P_{V_0}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
T''_0 \wedge \\
\neg \wedge \wedge P_{V_0} P_{V_1} \neg \wedge P_{V_1} P_{V_0}
\end{array}$$

Si vede direttamente in successione che l'albero invertito $T''_{2.1}^{\wedge}$ è ottenuto da T''_3^{\wedge} applicando alle foglie di questo la regola dell'indebolimento; T''_2^{\wedge} è ottenuto da $T''_{2.1}^{\wedge}$ applicando alle foglie di questo la regola $R^{\vee\wedge}$; $T''_{1.1}^{\wedge}$ è ottenuto da T''_2^{\wedge} applicando alle foglie di questo la regola dell'indebolimento; T''_1^{\wedge} è ottenuto da $T''_{1.1}^{\wedge}$ applicando alle foglie di questo la regola $R^{\vee\rightarrow}$; $T''_{0.1}^{\wedge}$ è ottenuto da T''_1^{\wedge} applicando alle foglie di questo la regola dell'indebolimento; T''_0^{\wedge} è ottenuto da $T''_{0.1}^{\wedge}$ applicando alle foglie di questo la regola $R^{\vee\rightarrow}$.

Si noti che in questa successione di alberi invertiti non è mai stato necessario far riferimento a nodi che seguono le foglie per applicare correttamente una regola di deduzione.

In questa situazione non serve considerare l'intera successione degli alberi invertiti, ma basta costruire il primo albero invertito e osservare che 1) le sue foglie sono assiomi, 2) ogni nodo è ottenuto da immediati predecessori mediante l'applicazione di una regola di deduzione, facendo attenzione di non introdurre variabili che occorrono libere se erano le variabili caratteristiche di qualche applicazione precedente della regola $R^{\vee\forall}$, e 3) la radice è costituita dalla formula che si vuol far vedere essere valida.

Un tale albero invertito verrà detto **dimostrazione naturale** della formula che è nella radice dell'albero. Si noti ancora come una dimostrazione naturale è un qualcosa di puramente sintattico.

Si dice che una formula è **naturalmente dimostrabile** se esiste una dimostrazione naturale di quella formula.

Come conseguenza dei vari risultati finora ottenuti si ha il seguente

Teorema di completezza. Una formula φ è valida se e solo se esiste un albero invertito, di cui la radice è φ , che rispetti le regole di deduzione e tale che sia chiuso (cioè in ogni ramo c'è una formula e la sua negazione).

Teorema di completezza per la dimostrazione naturale. Una formula è valida se e solo se è naturalmente dimostrabile.

DIMOSTRAZIONE. Se c'è un tale albero che è una dimostrazione naturale, ciascuna delle disgiunzioni delle formule di un ramo è valida, perché tra le varie formule del ramo contiene una formula e la sua negazione. Poiché le regole preservano la soddisfacibilità potando i rami, e la potatura può proseguire fino ad arrivare alla sola radice in un numero finito di passi, la radice sarà una formula valida.

Nell'altra direzione, se la radice è una formula valida, allora la sua negazione è non soddisfacibile, e, in base ai risultati ormai noti, c'è un albero T finito di confutazione formula per formula che è chiuso. Tale albero può essere trasformato nell'albero T^{-} , che, invertito, dà l'albero T^{\wedge} richiesto dall'enunciato del teorema.

[OSSERVAZIONE

Cosa si è ottenuto con queste trasformazioni delle regole?

Ora si vuole arrivare a determinare sintatticamente la validità di una formula. Si può partire da formule che sono valide: le disgiunzioni di formule tra le quali occorrono una formula e la sua negazione (tali formule si possono riconoscere dalla loro scrittura e sono certamente valide per il significato attribuito alla disgiunzione e alla negazione). E' del tutto legittimo chiamare assiomi queste disgiunzioni tra formule in cui occorre una formula e la sua negazione appunto perchè sono formule ben individuabili sintatticamente e valide. Se poi alcuni di questi assiomi sono costituiti dalle formule di un ramo di un opportuno albero invertito chiuso costruito a partire dalla formula da

mostrare valida, si possono applicare le regole introdotte che preservano la validità, potare via via le foglie dell'albero e giungere a ad aver controllato sintatticamente la validità della formula data.

Si chiama **dimostrazione** un processo sintattico che a partire da assiomi operando attraverso regole che preservano la validità porta ad una formula, che dovrà essere valida, ed è detta **teorema**. Il teorema di completezza dimostrato poco fa dice che, non solo ogni teorema è una formula valida (segue dalla definizione), ma anche che ogni formula valida è un teorema riuscendo a trovare gli assiomi giusti e la giusta applicazione delle regole sintattiche di deduzione a partire dall'albero invertito indicato dalla dimostrazione del teorema di completezza appunto.

Si è anche riusciti a vedere che questo metodo non è altro che il metodo degli alberi di confutazione formula per formula rivestito a nuovo.

Ho seguito questo percorso, poco usuale nei libri di testo più diffusi (ma le cui radici si possono ritrovare facilmente nella letteratura) per mettere in risalto in modo inequivocabile che per arrivare alla conclusione di un controllo sintattico non è necessario alcun ricorso all'intelligenza o alla comprensione di cosa le formule vogliono significare. Se si fosse partiti dalle dimostrazioni e dai teoremi, come si fa in molti testi, sarebbe potuto sorgere il dubbio che, per arrivare al controllo sintattico della validità di una formula, si sarebbero dovuti scegliere opportunamente gli assiomi da cui partire, e usare opportunamente le regole, e che tali scelte richiedano una qualche forma di comprensione dei significati delle formule coinvolte. Invece, grazie alla presentazione adottata, si è visto come la stessa scrittura della formula da dimostrare indichi (passando alla sua negazione, e poi al suo albero di confutazione, e successivamente alla trasformazione di questo in un albero invertito) quali assiomi scegliere e quai regole applicare, perché questi elementi sono univocamente determinati dall'analisi sintattica formula per formula della non soddisfacibilità della negazione delle formula che si vuole far vedere essere valida.

Le regole di deduzioni qui introdotte sono molto vicine a quelle che ben conosciute in letteratura come regole della deduzione naturale. Di fatto con ulteriori semplici passi si può arrivare a mestrare che anche la deduzione naturale non è che un diverso rivestimento delle stesse idee da cui si è partiti, ma questi semplici passi non saranno qui mostrati per non esorbitare dai limiti di questo modulo. La speranza è che quando uno vedrà la deduzione naturale in altri contesti, sappia riconoscere come non sia altro che una modifica estetica dei problemi affrontati, e dunque anche essa sia un controllo sintattico che non richiede intelligenza e comprensione dei significati ma si avvale solo delle peculiarità del linguaggio (peculiarità che sono i significati dei connettivi e dei quantificatori come organizzatori delle descrizioni effettuate attraverso un linguaggio formale).]

/[Si osservi che ci sono due momenti separati nella costruzione di una dimostrazione di una formula: uno è il rendersi conto che un certo albero invertito soddisfa tutti i requisiti per essere considerato una dimostrazione di quella formula, l'altro è il saper trovare un tale albero invertito, cioè vedere se una formula è dimostrabile. Se qualcuno ha fatto il secondo lavoro per noi, ci possiamo accontentare del primo che consta di una verifica formale (cioè sulla scrittura). Il secondo momento, che consiste nella ricerca di un albero invertito che sia dimostrazione di una formula, è un problema molto più delicato. Nei metodi sintattici visti precedentemente si era sempre riusciti a determinare delle regole che prescrivessero con esattezza cosa fare; ora, invece, la regola dell'indebolimento non fornisce istruzioni precise su quali formule aggiungere, se

non la vaga proposta di prendere quelle che servono per concludere con successo la dimostrazione. Ma quali sono quelle che servono? Ci sono due approcci per tentare una risposta: uno si affida ad una ricerca generalizzata a tutto campo e consiste nel generare tanti (forse tutti i possibili) alberi invertiti, che siano dimostrazioni, fino a riconoscere tra questi uno, se c'è, che sia dimostrazione di quella formula; l'altro approccio, invece, prevede di costruire un albero invertito secondo una strategia più efficiente, sviluppata proprio a partire dalla formula che si vuole dimostrare, magari facendosi guidare dalla scrittura della formula che si vuol dimostrare e dalla scrittura delle formule che man mano si trovano come precedenti nell'albero dimostrativo. Secondo una tale strategia, si percorre l'albero invertito non dalle foglie alla radice, secondo il suo ordinamento, ma a ritroso, dalla radice alle foglie (in modo analogo a quello che si faceva nei metodi precedentemente visti): così dalla formula che si vuol dimostrare si passa a formule (in genere una) dimostrate le quali si può arrivare alla dimostrazione voluta mediante l'applicazione di una regola di deduzione, e da queste alle formule da cui queste si possono dimostrare, e così via continuando a ritroso. Resta il problema di quali regole di deduzione applicare a quali formule: questo problema ha una soluzione naturale facendo ricorso ad una strategia analoga a quella utilizzata per gli alberi di confutazione quando si analizzava una formula alla volta, con l'ulteriore difficoltà del dover determinare quali formule considerare nelle singole applicazioni della regola dell'indebilitamento. Ma anche questa difficoltà può essere affrontata con successo: Si costruisca prima la successione T_n^\wedge di alberi invertiti richiesti dalla dimostrazione naturale senza indebolimento. Poi, se questa perviene ad un albero invertito chiuso T_m^\wedge , si consideri questo e si ottenga un nuovo albero invertito T'_m^\wedge inserendo tra un nodo v e quello immediatamente precedente v' (e i due precedenti v' e v'' nel caso di uso della regola $R^{\vee\wedge}$) un nuovo nodo v^* (due nuovi nodi v^* e v^{**} nel caso di uso della regola $R^{\vee\wedge}$), ottenibili da v' (da v' e v''), aggiungendo esattamente le formule che sono nei successivi nodi del ramo e che giustificano l'applicazione della regola usata nel passaggio da v' (da v' e v'') a v . Anche se l'approccio così descritto è più efficiente di una ricerca a tappeto di una dimostrazione naturale di una formula, nel caso che la formula che si vuol far vedere essere dimostrabile sia valida, nel caso invece che questa non sia valida entrambi i metodi richiedono di proseguire all'infinito senza né soluzioni né risposte definitive ad ogni stadio finito della ricerca, e danno una risposta solo quando si sono esaurite tutte le infinite possibilità di alberi invertiti.]

[35. CALCOLO CON I SEQUENTI.

Abbiamo già osservato che l'utilizzo di linguaggi di cardinalità arbitrariamente grande, anche più che numerabile, ci ha portato ad interessanti risultati teorici, tra i quali anche l'inutilità di aumentare la cardinalità del linguaggio nel tentativo di ottenere la categoricità di un teoria. Così anche in questo paragrafo considereremo solo linguaggi numerabili.

In quanto sviluppato finora sia con il metodo degli alberi di confutazione che con quello di deduzione, le regole dovevano preservare la soddisfacibilità o la validità di formule o insiemi di formule, sicché nell'analizzare formule del tipo $\neg\alpha$ si doveva sempre considerare anche il tipo della formula α (il che portava ad analizzare negazioni di formule atomiche o formule dei tipi $\neg\neg\alpha$, $\neg\wedge\alpha\beta$, $\neg\forall x\alpha$) per evitare di

passare da formule vere in un certa interpretazione a formule false in quell'interpretazione e viceversa.

Alternativamente, si potrebbe decidere di considerare due di insiemi di formule (eventualmente vuoti), un primo con le formule che devono essere vere in una certa interpretazione e l'altro con quelle che devono essere false nella stessa interpretazione. Così facendo, i tipi di formule non atomiche sono solo tre ($\neg\alpha$, $\wedge\alpha\beta$, $\forall x\alpha$), ma le regole che li riguardano sono sei, due per ciascuno dei tipi ricordati, a seconda che la formula occorra nel primo o nel secondo insieme.

Indicheremo con Γ, Δ una coppia di insiemi di formule, che chiameremo **sequente**.

35.1. SODDISFACIBILITA' DI SEQUENTI.

Se ci si interessa all'analisi della soddisfacibilità, si dirà che un sequente è soddisfacibile se c'è una realizzazione nella quale è vero, cioè in quella realizzazione tutte le formule del primo insieme sono vere e tutte le formule del secondo insieme sono false. E' immediato che un sequente non è soddisfacibile se una formula compare sia nel primo che nel secondo insieme del sequente. Nel caso che entrambi gli insiemi che costituiscono il sequente siano finiti, possiamo pensare $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ e $\Delta = \{\delta_1, \dots, \delta_n\}$, e la soddisfacibilità del sequente è la soddisfacibilità della formula $\gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_m \wedge \neg \delta_1 \wedge \dots \wedge \neg \delta_n$, che equivale a quella della formula $\neg((\gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_m) \rightarrow (\delta_1 \vee \dots \vee \delta_n))$.

Si osservi anche che se il secondo insieme, Δ , di un sequente è costituito da una sola formula, $\Delta = \{\delta\}$, la non soddisfacibilità del sequente è la non soddisfacibilità dell'insieme $\Gamma \cup \{\neg\delta\}$, che sappiamo essere equivalente all'affermazione che δ è conseguenza logica del primo insieme di formule che costituisce il sequente. Questa osservazione dà un nuovo interesse ai sequenti, perché sono più vicini all'analisi della conseguenza logica, piuttosto che all'analisi della soddisfacibilità o della validità a cui ci si era interessati in precedenza. Un po' più in generale, se il secondo insieme di un sequente è costituito da un numero finito di formule, $\Delta = \{\delta_1, \dots, \delta_n\}$, allora la non soddisfacibilità del sequente equivale all'affermazione che la formula $\delta_1 \vee \dots \vee \delta_n$ è conseguenza logica di del primo insieme di formule che costituisce il sequente.

Volendo sviluppare un calcolo (cioè un sistema di controllo sintattico) che prenda in considerazione una formula alla volta, adattando alla situazione presente le regole già viste per il controllo della soddisfacibilità di insiemi di formule con l'analisi di una formula alla volta, si perviene alle regole seguenti, che chiameremo regole dei sequenti per la confutazione.

R_{cS-1} :

Regola del \neg nel primo insieme: da $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}, \Delta$ si passa a $\Gamma, \Delta \cup \{\alpha\}$.

R_{cS-2} :

Regola del \neg nel secondo insieme: da $\Gamma, \Delta \cup \{\neg\alpha\}$ si passa a $\Gamma \cup \{\alpha\}, \Delta$.

$R_{cS\wedge^1}$:

Regola dell' \wedge nel primo insieme: da $\Gamma \cup \{\alpha \wedge \beta\}, \Delta$ si passa a $\Gamma \cup \{\alpha, \beta\}, \Delta$

$R_{cS\wedge^2}$:

Regola dell' \wedge nel secondo insieme: da $\Gamma, \Delta \cup \{\alpha \wedge \beta\}$ si passa ai due sequenti $\Gamma, \Delta \cup \{\alpha\}$ e $\Gamma, \Delta \cup \{\beta\}$.

$R_cS\forall^1$:

Regola del \forall nel primo insieme: da $\Gamma \cup \{\forall x \alpha\}, \Delta$ si passa a $\Gamma \cup \{\forall x \alpha, \alpha(x/t)\}, \Delta$ qualunque sia il termine t .

$R_cS\forall^2$:

Regola del \forall nel secondo insieme: da $\Gamma, \Delta \cup \{\forall x \alpha\}$ si passa a $\Gamma, \Delta \cup \{\alpha(x/t)\}$ dove t è o una variabile che non occorre libera in $\Gamma, \Delta \cup \{\forall x \alpha\}$ o una costante che non occorre in $\Gamma, \Delta \cup \{\forall x \alpha\}$.

$R_cS=$:

Regola dell' $=$: da Γ, Δ si passa a $\Gamma \cup \{t=t\}, \Delta$ con t termine arbitrario.

$R_cS/1$:

Regola di sostituzione di identici nel primo insieme: da $\Gamma \cup \{t=t'\} \cup \{\varphi\}, \Delta$ si passa a $\Gamma \cup \{t=t'\} \cup \{\varphi(t/t')\}, \Delta$, dove $\varphi(t/t')$ indica la sostituzione di alcune occorrenze di t in φ mediante t' .

$R_cS/2$:

Regola di sostituzione di identici nel secondo insieme: da $\Gamma \cup \{t=t'\}, \Delta \cup \{\varphi\}$ si passa a $\Gamma \cup \{t=t'\}, \Delta \cup \{\varphi(t/t')\}$, dove $\varphi(t/t')$ indica la sostituzione di alcune occorrenze di t in φ mediante t' .

Si notino alcune peculiarità di queste regole. Le regole R_cS^{-1} , R_cS^{-2} , $R_cS\wedge^1$, $R_cS\wedge^2$, $R_cS\forall^2$ portano ad un sequente in cui la formula esaminata è sparita ma viene inserita una sottoformula ad essa logicamente equivalente (visto in quale dei due insiemi del sequente è introdotta) esaurendo l'analisi di quella formula. Invece la regola $R_cS\forall^1$ porta ad un sequente in cui si aggiunge una sottoformula della formula analizzata, ma anche si mantiene la formula analizzata, e ciò per i noti problemi della verità delle formule di tipo \forall la cui analisi non è completata da una sola istanziazione di quella formula. Le ulteriori regole sono quelle richieste dal considerare l'= $=$ come simbolo logico; l'ultima potrebbe anche essere saltata perché nel tendere, come si tenderà, a cercare una stessa formula sia nel primo che nel secondo insieme del sequente basta considerare le possibili sostituzioni per equivalenza in uno degli insiemi che costituiscono il sequente e non necessariamente in entrambi.

Anche per queste regole si dimostra che preservano la soddisfacibilità dei sequenti come definita precedentemente, cioè vale il seguente

Teorema. Dato un sequente X soddisfacibile, allora anche il sequente X' ottenuto da quello applicando una regola (almeno uno dei due sequenti ottenuti nel caso di applicazione della regola $R_cS\wedge^2$) è soddisfacibile.

DIMOSTRAZIONE. Come per il caso delle regole per l'analisi della soddisfacibilità di un insieme di formule una alla volta, anche ora per quasi tutte le regole l'affermazione è banale dal momento che il sequente X' (o uno dei due sequenti ottenuti nel caso della regola $R_cS\wedge^2$) è vero nella stessa interpretazione che rende vero il sequente X . Unico caso che si discosta leggermente dalla precedente affermazione è quello riguardante la regola del $R_cS\forall^2$. In tale caso, sia σ una realizzazione che rende vero il sequente X . In particolare, poiché la formula $\forall x \varphi$ è nel secondo insieme, sarà

$(\forall x\varphi)^\sigma = F$. Pertanto esiste un elemento a appartenente all'universo della realizzazione tale che $(\varphi)^\sigma(x/a) = F$. Si consideri ora la formula $\varphi(x/t)$ introdotta dalla regola nel secondo insieme. Se t è una variabile che non occorre in X allora la realizzazione $\sigma(t/a)$ rende vero il sequente X , perché t non occorre libera in X , ed anche rende falsa $\varphi(x/t)$, perché $(\varphi(x/t))^\sigma(t/a) = (\varphi)^\sigma(x/a)$ che già si sa essere falsa: così anche il sequente X' è vero. Se invece t è un nuovo simbolo di costante, allora si consideri l'espansione σ' della realizzazione σ ottenuta interpretando t in a . In tale realizzazione X continua ad essere vero perché t non occorre in X , ed anche $(\varphi(x/t))^\sigma = (\varphi)^\sigma(x/t^\sigma) = (\varphi)^\sigma(x/a) = (\varphi)^\sigma(x/a) = F$, cosicché si può affermare che X' è vero in σ' , come volevasi dimostrare.

Anche ora si vogliono usare queste regole per analizzare la soddisfacibilità di un certo sequente (in un linguaggio numerabile) considerando le formule da analizzare ad una ad una. Così bisognerà adottare una buona strategia, sempre allo scopo di non tralasciare di analizzare alcune formule. Ancora, in analogia a quanto già visto, si può adottare una opportuna strategia per la costruzione di una successione di alberi i cui nodi sono costituiti da un sequente.

Poiché la regola del $\neg\forall$ può richiedere l'uso di nuovi simboli per costanti, si introduca subito un insieme numerabile $C = \{c_i; i \in \mathbb{N}\}$ di nuovi simboli per costanti, ottenendo dal linguaggio iniziale $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0$ i linguaggi \mathcal{L}_i tali che $\mathcal{L}_{i+1} = \mathcal{L}_i \cup \{c_i\}$, e il linguaggio $\mathcal{L}^\infty = \mathcal{L} \cup C = \cup \{\mathcal{L}_i; i \text{ è un numero naturale}\}$.

Dovendo poi usare anche le regole del \forall e del $=$ relativamente a certi termini, è opportuno stabilire un buon ordinamento dei termini di \mathcal{L}^∞ onde poter determinare in relazione a quale termine va applicata una occorrenza di una tale regola. Così l'insieme dei termini sia $\{t_i; i \in \mathbb{N}\}$. Non è restrittivo supporre che i termini vengano ordinati in modo che, per ogni $i \in \mathbb{N}$, t_i sia nel linguaggio \mathcal{L}_i , anzi questa ipotesi che adottiamo semplificherà l'esposizione in seguito.

Per poter decidere rispetto a quale formula utilizzare la regola di sostituzione, si stabilisca un buon ordinamento, usando i numeri naturali come indici, delle formule del linguaggio \mathcal{L}^∞ . Così sia $\{\varphi_i; i \in \mathbb{N}\}$ l'insieme delle formule di \mathcal{L}^∞ , ed ancora non è restrittivo supporre che φ_i sia in \mathcal{L}_i .

Infine, nello spirito di analizzare una formula alla volta, si bene ordinino anche i due insiemi del sequente iniziale X del linguaggio \mathcal{L} da analizzare, usando i numeri naturali come indici: $\Gamma = \{\gamma_i; i \in \mathbb{N}\}$ e $\Delta = \{\delta_i; i \in \mathbb{N}\}$.

Non solo si dovrà definire la successione degli alberi, ma anche una successione degli insiemi finiti bene ordinati delle formule che sono in attesa d'essere analizzate. Tali insiemi, che saranno dette code e indicate con C_{σ_i} con $i \in \mathbb{N}$, in generale varieranno nel passare da un albero all'altro.

STRATEGIA.

Si definirà, per induzione, una successione di alberi, i cui nodi sono costituiti ciascuno da un sequente, e una corrispondente successione di code (insiemi finiti ordinati di formule) che costituiranno la strategia di utilizzazione delle regole introdotte per l'analisi della soddisfacibilità del sequente X . Nella successiva definizione, per ramo finito aperto si intenderà un ramo la cui foglia è costituita da un

sequente aperto, per il quale, cioè, l'intersezione dei due insiemi che lo costituiscono è vuota. Un ramo non aperto verrà detto chiuso.

T_0 sia l'albero con la sola radice costituita dal sequente X . Co_0 sia l'insieme bene ordinato costituito dalle sole due formule γ_0 e δ_0 . Per passare da un albero ad un altro utilizzando una regola, si considererà il sequente che costituisce la foglia di un ramo r dell'albero da estendere come sequente al quale applicare la regola, mentre il sequente X' prodotto dalla regola (i sequenti X' e X'' , nel caso della regola del $R_cS_{\wedge^2}$) sarà il sequente che costituisce la foglia del ramo r' (dei rami r' e r'' , nel caso della regola del $R_cS_{\wedge^2}$), nel nuovo albero, che estende r mediante l'aggiunta di un nodo come immediato successore della foglia di r (due nodi entrambi immediati successori della foglia di r nel caso della regola del $R_cS_{\wedge^2}$).

L'albero T'_n si ottiene dall'albero T_n mediante il seguente procedimento. Sia α la prima formula di Co_n , e si devono considerare vari casi dipendenti da quale tipo di formula è α .

- Se α è $\neg\beta$, a ciascuno dei rami aperti di T_n la cui foglia è un sequente Y che contiene α o nel primo o nel secondo insieme si aggiunge un nodo come immediato successore della foglia costituito dal sequente ottenuto applicando a Y o la regola $R_cS_{\neg^1}$ se α occorre nel primo insieme del sequente, o la regola $R_cS_{\neg^2}$, se α occorre nel secondo insieme del sequente.

- Se α è $\wedge\beta\delta$, a ciascuno dei rami aperti di T_n la cui foglia è un sequente Y che contiene α nel primo insieme si aggiunge un nodo come immediato successore della foglia costituito dal sequente ottenuto applicando a Y la regola $R_cS_{\wedge^1}$, e a ciascuno dei rami aperti di T_n la cui foglia è un sequente Y che contiene α nel secondo insieme si aggiungono due nodi ciascuno come immediato successore della foglia costituiti dai due sequenti ottenuti applicando la regola $R_cS_{\wedge^2}$.

- Se α è $\forall x\beta$, a ciascuno dei rami aperti di T_n la cui foglia è un sequente Y che contiene α nel primo insieme si aggiunge un nodo come immediato successore della foglia costituito dal sequente Y' ottenuto applicando a Y la regola $R_cS_{\forall^1}$, in cui si prende per termine t voluto dalla regola il primo termine nell'ordinamento dei termini tale che la formula introdotta nel primo insieme del sequente Y' è nel linguaggio \mathcal{L}_n e non occorre già in quell'insieme. Inoltre, a ciascuno dei rami aperti di T_n la cui foglia è un sequente Y che contiene α nel secondo insieme si aggiunge un nodo come immediato successore della foglia costituito dal sequente ottenuto applicando a Y la regola $R_cS_{\forall^2}$, in cui si prende come termine t il nuovo simbolo di costante c_n . potendosi dimostrare per induzione che, per ogni n , \mathcal{L}_n è un linguaggio sufficiente per l'intero albero T_n

L'albero T_{n+1} si ottiene dall'albero T'_n aggiungendo ad ogni foglia di un ramo aperto dell'albero T'_n , come immediato successore, un nuovo nodo costituito dal sequente Y' ottenuto dal sequente Y che costituiva la foglia aggiungendo la formula $t_n=t_n$ al primo insieme di Y ; e aggiungendo ad Y anche la prima formula dell'ordinamento delle formule, se c'è, che sia nel linguaggio \mathcal{L}_n , e che soddisfi le seguenti condizioni: 1) sia del tipo $\varphi(t/t')$ e non occorra già nell'insieme di Y a cui la si aggiungerebbe, mettendola nel primo o nel secondo insieme a seconda che la formula $\varphi(t)$ sia nel primo o nel secondo insieme di Y , e 2) $t=t'$ appartenente al primo insieme di Y (dove t è un termine diverso dal termine t'). In pratica si sono applicate contemporaneamente le regole dell'uguale, relativamente al termine t_n , e di sostituzione riguardo alla formula sopra specificata $\varphi(t/t')$.

Per ottenere Co_{n+1} da Co_n si deve togliere il primo elemento di Co_n ed aggiungere alla fine di ciò che resta prima, se c'è e non è atomica, la formula γ_{n+1} di Γ , poi, ancora se c'è e non è atomica, la formula δ_n di Δ , seguita, in buon ordine, dalle formule non atomiche che sono nelle foglie di T_{n+1} e non nelle foglie di T_n ed, infine, dalla formula tolta all'inizio di Co_n se questa è del tipo \forall .

Questo completa la descrizione della strategia.

Poiché, come si è visto, le regole preservano la soddisfacibilità, se si perviene ad un albero i cui rami sono tutti chiusi, il sequente nella radice sarà non soddisfacibile. Si è così raggiunto anche per questo metodo di analisi il **teorema di validità**.

D'altra parte è facile vedere che se gli alberi della successione sono tutti aperti e si considera l'albero infinito T^∞ , che è la loro unione, sarà infinito e, per il lemma di König applicabile in questa situazione, dovrà avere un ramo infinito, lo si chiami r , che non potrà che essere aperto. Inoltre l'insieme S delle formule che occorrono nei primi insiemi dei sequenti di r e delle negazioni delle formule che occorrono nei secondi insiemi dei sequenti di r è un insieme di Hintikka, e, dunque, è soddisfacibile. Una realizzazione che rende vere tutte le formule di S ovviamente rende vere le formule del primo insieme del sequente che costituisce la radice dell'albero, e false tutte le formule del secondo insieme di quel sequente, sicché il sequente che si voleva analizzare sarà soddisfacibile. Si è così raggiunto anche il **teorema di completezza** per questo metodo.

Riassumendo possiamo enunciare il seguente

Teorema di validità e completezza per la soddisfacibilità di sequenti. Un sequente è non soddisfacibile se e solo se uno degli alberi costruito con la strategia è chiuso. Equivalentemente (contronominale), un sequente è soddisfacibile se e solo se ogni albero costruito con la strategia è aperto.

35.2.. VALIDITA' DI SEQUENTI.

Anche per i sequenti si può essere interessati ad una analisi della loro validità, invece dell'analisi della soddisfacibilità, ricordando che la validità di una formula non è altro che la non soddisfacibilità della sua negazione.

Così, rifacendosi all'analisi della non soddisfacibilità appena vista, nel caso che entrambi gli insiemi che costituiscono il sequente siano finiti, siano $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ e $\Delta = \{\delta_1, \dots, \delta_n\}$, **la validità del sequente è la validità della formula** $((\gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_m) \rightarrow (\delta_1 \vee \dots \vee \delta_n))$ (negazione della formula usata per caratterizzare la soddisfacibilità o meno di un sequente), **che equivale a quella della formula** $\neg \gamma_1 \vee \dots \vee \neg \gamma_m \vee \delta_1 \vee \dots \vee \delta_n$.

Più in generale, si dirà che un sequente è valido se in ogni realizzazione c'è o una formula del primo insieme che è falsa o una formula del secondo insieme che è vera. E' immediato che un sequente è valido se una formula compare sia nel primo che nel secondo insieme del sequente.

Volendo sviluppare un calcolo (cioè un sistema di controllo sintattico) che prenda in considerazione una formula alla volta, adattando alla situazione presente le regole già viste per il controllo della validità di insiemi di formule con l'analisi di una formula alla volta, si perviene alle regole seguenti, che chiameremo regole di deduzione naturale per i sequenti.

$R_{\forall S^{-1}}$:

Regola del \neg nel primo insieme: da $\Gamma, \Delta \cup \{\alpha\}$ si passa a $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}, \Delta$.

$R_{\forall S^{-2}}$:

Regola del \neg nel secondo insieme: da $\Gamma \cup \{\alpha\}, \Delta$ si passa a $\Gamma, \Delta \cup \{\neg\alpha\}$.

$R_{\forall S^{\wedge 1}}$:

Regola dell' \wedge nel primo insieme: da $\Gamma \cup \{\alpha, \beta\}, \Delta$ si passa a $\Gamma \cup \{\alpha \wedge \beta\}, \Delta$.

$R_{\forall S^{\wedge 2}}$:

Regola dell' \wedge nel secondo insieme: dai due insiemi $\Gamma, \Delta \cup \{\alpha\}$ e $\Gamma, \Delta \cup \{\beta\}$ si passa a $\Gamma, \Delta \cup \{\alpha \wedge \beta\}$.

$R_{\forall S^{\forall 1}}$:

Regola del \forall nel primo insieme: da $\Gamma \cup \{\forall x \alpha, \alpha(x/t)\}, \Delta$, con t termine qualsiasi, si passa a $\Gamma \cup \{\forall x \alpha\}, \Delta$.

$R_{\forall S^{\forall 2}}$:

Regola del \forall nel secondo insieme: da $\Gamma, \Delta \cup \{\alpha(x/t)\}$, dove t è o una variabile che non occorre libera in $\Gamma, \Delta \cup \{\forall x \alpha\}$ o un simbolo di costante che non occorre in $\Gamma, \Delta \cup \{\forall x \alpha\}$, si passa a $\Gamma, \Delta \cup \{\forall x \alpha\}$.

$R_{\forall S^{\equiv}}$:

Regola dell' \equiv : da $\Gamma \cup \{t=t\}, \Delta$, con t termine arbitrario, si passa a Γ, Δ .

$R_{\forall S^{\prime 1}}$:

Regola di sostituzione di identici nel primo insieme: da $\Gamma \cup \{t=t'\} \cup \{\varphi(t/t')\}, \Delta$ si passa a $\Gamma \cup \{t=t'\} \cup \{\varphi\}, \Delta$, dove $\varphi(t/t')$ indica la sostituzione di alcune occorrenze di t in φ mediante t' .

$R_{\forall S^{\prime 2}}$:

Regola di sostituzione di identici nel secondo insieme: da $\Gamma \cup \{t=t'\}, \Delta \cup \{\varphi(t/t')\}$ si passa a $\Gamma \cup \{t=t'\}, \Delta \cup \{\varphi\}$, dove $\varphi(t/t')$ indica la sostituzione di alcune occorrenze di t in φ mediante t' .

Visto come le nuove regole corrispondono a insiemi di regole per cui si era già ottenuto il teorema di validità, si può affermare, anche in questo caso, il seguente

Teorema di validità. Le regole di validità dei sequenti fanno passare da sequenti validi a sequenti validi.

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione potrebbe seguire la via annunciata prima dell'enunciazione del teorema, mostrando come le regole di questo sistema corrispondano a quelle di altri sistemi visti precedentemente ereditando il teorema di validità da questi per i quali si era già stato stabilito. Altrimenti si può dimostrare, regola per regola, che, se si parte da sequenti del tipo prescritto dalla regola che sono validi, allora anche il sequente a cui fa pervenire la regola è valido. Lo svolgimento di queste dimostrazioni, che sono facili, è lasciato al lettore.

Come si fece per la deduzione naturale, e con le stesse motivazioni, anche in questa situazione si può introdurre la regola

$R_{\forall}SW$:

Regola dell'indebolimento: da Γ, Δ si passa a $\Gamma \cup \Gamma', \Delta \cup \Delta'$, dove Γ, Δ è un sequente finito e Γ' e Δ' sono arbitrari insiemi finiti di formule.

Si vede immediatamente che anche questa regola preserva la validità.

Ancora con le stesse motivazioni adottate nel caso della deduzione naturale, anche ora si possono introdurre gli **assiomi**. Più precisamente gli assiomi del calcolo dei sequenti sono i sequenti che contengono una stessa formula sia nel primo insieme che nel secondo insieme. E' immediato che tali sequenti sono sequenti validi.

in costruzione]

36. COME RIDURRE IL NUMERO DELLE REGOLE DI DEDUZIONE.

Nel sistema di dimostrazione naturale presentato sostanzialmente si disponeva di uno schema d'assiomi e di 8 regole. Si noti come le regole sono legate ai simboli logici per i connettivi, quantificatori e uguale.

E' possibile ridurre il numero delle regole, eventualmente aumentando la quantità dei tipi di formule da cui partire per una dimostrazione, cioè la quantità degli schemi di assiomi?

Trascurando l'insieme di formule Γ (che potrebbe essere vuoto) nella formulazione delle regole e non ripetendo nelle premesse di una regola la formula che si ottiene nelle conclusioni, le regole $R^{\forall \neg \neg}$, $R^{\forall \wedge}$, $R^{\forall \neg \wedge}$, $R^{\forall \neg \forall}$, $R^{\forall =}$ e $R^{\forall /}$ possono essere anche rappresentate dai seguenti schemi (si noti che non si sta considerando la regola $R^{\forall \forall}$):

$$\begin{array}{l}
 R^{\forall \neg \neg} \frac{\alpha}{\neg \neg \alpha} \quad ; \quad R^{\forall \wedge} \frac{\alpha \mid \beta}{\wedge \alpha \beta} \quad ; \quad R^{\forall \neg \wedge} \frac{\neg \alpha \quad \neg \beta}{\neg \wedge \alpha \beta} \quad ; \quad R^{\forall \neg \forall} \frac{\neg \alpha(x/t)}{\neg \forall x \alpha} \\
 \\
 R^{\forall =} \frac{\neg =tt}{\neg =tt} \quad ; \quad R^{\forall /} \frac{\alpha(t/t')}{\neg =tt', \alpha}
 \end{array}$$

Si osservi che, in corrispondenza di ciascuna delle regole così rappresentate (eccetto la regola $R^{\forall =}$), sono valide le formule $\alpha \rightarrow (\neg \neg \alpha)$, $(\wedge \alpha \beta) \rightarrow (\wedge \alpha \beta)$, $(\neg \wedge \neg \alpha \neg \beta) \rightarrow (\neg \wedge \alpha \beta)$, $(\neg \alpha(x/t)) \rightarrow (\neg \forall x \alpha)$, $(\alpha(t/t')) \rightarrow (\neg \wedge \neg =tt' \neg \alpha)$ che sono implicazioni che hanno per antecedente la formula nella premessa di una regola (la disgiunzione delle formule nella premessa che dovrebbero essere nello stesso ramo nel caso della regola $R^{\forall \neg \wedge}$, la congiunzione delle formule nelle premesse di rami diversi nel caso della regola $R^{\forall \wedge}$) e per conseguente la formula nella conclusione di quella regola (la disgiunzione delle formule nella conclusione che dovrebbero essere nello stesso ramo nel caso della regola $R^{\forall /}$). Per quanto riguarda la regola $R^{\forall =}$, si osservi che la rappresentazione

precedente sta ad indicare che, se è valida una disgiunzione uno dei cui disgiunti è $\neg=t'$, allora è valida la disgiunzione delle altre formule. La corrispondente formula valida può essere individuata nelle formule $\neg=t' \rightarrow \varphi$, qualunque sia la formula φ .

Proprio poiché le formule viste in corrispondenza delle regole hanno tutte la stessa forma di implicazione tra le premesse della regola e la conclusione della stessa, per ridurre il numero di regole, si potrebbe pensare ad una sola regola che preservi la validità, e che, partendo dalla premessa (dalle premesse) di uno degli schemi di regola esposti e dalla corrispondente formula valida dia come risultato la conclusione di quello schema di regola: questa regola da sola e le formule corrispondenti alle regole precedenti avrebbero lo stesso effetto di tutte quelle regole.

Di fatto la seguente regola, nota dall'antichità col nome di Modus ponens, ha l'effetto desiderato.

Regola del Modus Ponens (MP).

L'applicazione di questa regola fa passare dalle formule $\varphi \rightarrow \psi$ e φ alla formula ψ .

Si può rappresentarla con lo schema

$$\frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$$

In effetti, ad esempio, utilizzando il modus ponens per avere lo stesso effetto della regola $R^{\forall \neg}$, a partire da α e dalla formula $\alpha \rightarrow \neg \neg \alpha$, che corrisponde a quella regola, si ha

$$\frac{\alpha \quad \alpha \rightarrow (\neg \neg \alpha)}{\neg \neg \alpha}$$

oppure, per avere lo stesso effetto della regola $R^{\forall \neg}$, a partire da $\neg \alpha(x/t)$ e dalla formula $(\neg \alpha(x/t)) \rightarrow (\neg \forall x \alpha)$, che corrisponde a quella regola, sempre utilizzando il modus ponens, si ha

$$\frac{\neg \alpha(x/t) \quad (\neg \alpha(x/t)) \rightarrow (\neg \forall x \alpha)}{\neg \forall x \alpha}$$

Viste le potenzialità fin qui individuate della regola chiamata modus ponens assieme agli assiomi presentati nel sostituire le regole della deduzione naturale, è naturale voler indagare se si riesce a mettere in piedi un ulteriore metodo di controllo sintattico, possibilmente valido e completo, che si basi sulla nuova regola e sugli assiomi introdotti. Si noti ancora che la regola del modus ponens se applicata a due formule, una φ e l'altra $\varphi \rightarrow \psi$, vere in una realizzazione anche la conclusione ψ è vera in quella realizzazione, indipendentemente dal fatto che ψ sia una delle formule che seguono la freccia negli assiomi introdotti. Ma prima di passare a questo studio vanno notate subito delle difficoltà insite nella regola del modus ponens.

Date le premesse della regola è ben determinato l'effetto dell'applicazione della regola; ma volendo pervenire ad un certo risultato con l'uso del modus ponens da quali premesse si deve partire? Nella formula ψ che si ottiene applicando la regola non c'è alcuna indicazione di quale deve essere la formula φ usata nelle premesse φ e

$\varphi \rightarrow \psi$ del modus ponens in modo che si possa giungere a queste premesse con questo stesso metodo che si sta introducendo. La situazione presenta due vie di soluzione: una prevede una serie di tentativi a tappeto con tutte le formule fino a trovarne una che vada bene, l'altra via vorrebbe essere più efficiente.

La via efficiente si può cercare sostanzialmente facendo ricorso a quanto fatto precedentemente per gli alberi di confutazione, eliminando così la necessità di dovere fare ricorso a qualche metodo "astuto e intelligente" che avrebbe superato i limiti, che invece si vogliono rispettare, di un controllo puramente sintattico (e così meccanizzabile, almeno in teoria).

Anche qui si potrebbe fare altrettanto ricorrendo al fatto che il modus ponens, per come è stato finora introdotto, tende a ridurre certe regole, per le quali il metodo sintattico funzionava bene (il metodo determinava completamente le operazioni sintattiche da eseguire e si erano ottenuti i teoremi di validità e completezza), ad una sola regola e a degli assiomi, sicché si potrebbe fare ricorso a quel metodo per determinare nel dettaglio come deve operare il nuovo metodo con il modus ponens. Tuttavia, se si vuol utilizzare la regola del modus ponens a partire da altri assiomi, la strada indicata non è così ovviamente percorribile.

Questa osservazione giustifica il percorso seguito in questa presentazione, che differisce dalle altre che partono generalmente da analisi sintattiche basate sul modus ponens. Infatti, mentre queste ultime possono lasciare il sospetto che anche l'analisi sintattica sotto sotto faccia ricorso ad "astuzia ed intelligenza", la via scelta qui mostra che si può fabbricare un controllo sintattico completamente "stupido", che determina esattamente i passi da compiere, che tuttavia perviene ai risultati di validità e completezza, anche se in modo non molto efficiente.

37. CALCOLO PREDICATIVO.

[Ora si vuole accennare al sistema di analisi sintattica di gran lunga più diffuso nei manuali di logica matematica. Scopo di questi cenni è, da una parte, completare le osservazioni precedenti che mostrano i forti legami tra i vari sistemi di controllo sintattico delle basilari nozioni semantiche, che spiegano il conseguimento sempre degli stessi risultati (teoremi di completezza, compattezza, non categoricità, ecc.), anche relativamente a sistemi apparentemente molto diversi, e, dall'altra, collegarsi a quanto più comunemente si trova nella letteratura. Ancora una volta si cerca un metodo sintattico per determinare la validità di una formula, o il fatto che sia conseguenza logica di un insieme di formule.]

/

[Ancora una volta si cerca un metodo sintattico per determinare la validità di una formula, o il fatto che sia conseguenza logica di un insieme di formule.

Anche se si è già osservato che, da un certo punto di vista, non si guadagna alcunché a considerare linguaggi di cardinalità più che numerabile, in questa e nella prossima sezione non ci si guadagna, né si perde, considerando linguaggi di cardinalità arbitraria, come si farà, se non nel teorema per la completezza della prossima sezione dove se il linguaggio è più che numerabile si dovrà far ricorso all'assioma della scelta.

]

L'idea è, come prima, di partire da certe particolari formule, rientranti in un numero finito di tipi ben precisati, che sono valide. La conoscenza della loro validità può

essere acquisita come si è acquisita la conoscenza della validità di $\varphi \rightarrow \varphi$, cioè verificando, in base alle definizioni, la validità di una generica formula di quel tipo. Poi si usano dei metodi di trasformazione di scrittura che facciano passare da formule valide a formule valide. Il metodo di trasformazione usato nell'impostazione che si vuole ora presentare è quello che va sotto il nome di **modus ponens**. Esso afferma che se si hanno le formule $\varphi \rightarrow \psi$ e φ allora si passa alla formula ψ . Questa regola rispetta il criterio detto.

Infatti se le due formule date $\varphi \rightarrow \psi$ e φ sono valide, allora anche la terza, ψ , è valida. Di fatto si dimostra anche di più, e cioè se $\varphi \rightarrow \psi$ e φ sono vere in una certa realizzazione, allora ψ è vera proprio in quella realizzazione. Infatti, se $\varphi \rightarrow \psi$ è vera in una realizzazione allora o φ è falsa o ψ è vera; ma, per ipotesi, anche φ è vera in quella realizzazione, e così anche ψ deve essere vera in quella realizzazione. Poiché questa argomentazione va bene in ogni realizzazione, allora, se $\varphi \rightarrow \psi$ e φ sono valide, anche ψ sarà valida.

Si noti che il modo di trasformazione, di passaggio, da certe formule ad altre, è un modo puramente sintattico, opera sulle scritture. Tale trasformazione sulle scritture mantiene la validità.

Così, non solo si possono individuare alcune formule iniziali che sono valide, ma se ne possono costruire tante altre che continuano ad essere valide, in quanto ottenute mediante un numero finito di trasformazioni che preservano la validità. Le formule così ottenute si dicono **dimostrate**.

Per fissare i primi aspetti di questa tecnica è opportuno esplicitare le prime definizioni.

Si dicono **assiomi** le formule di un prefissato insieme. È opportuno che queste formule siano valide e che sia possibile riconoscere effettivamente se una formula appartiene o meno a detto insieme, cioè se è o meno un assioma, dall'esame della sua scrittura.

Si dice **dimostrazione** una successione finita di formule che o sono assiomi o sono ottenute da formule precedenti nella successione mediante l'applicazione del modus ponens.

Per **dimostrazione di una formula** φ si intende una dimostrazione tale che l'ultima formula della successione finita, che è la dimostrazione, sia proprio φ .

Una formula φ si dice **dimostrabile**, e lo si denota con la scrittura $\vdash \varphi$, se esiste una dimostrazione di quella formula. Una formula dimostrabile è detta anche **teorema**.

Tutte le formule ottenibili con questa tecnica, a partire da assiomi validi, saranno valide, ma si possono ottenere così tutte le formule valide? Cioè, ogni formula valida può essere catturata mediante questo processo? Detto altrimenti, ciascuna formula valida è dimostrabile?

La tecnica che utilizza il modus ponens può essere usata non solo per fare vedere che certe formule sono valide dimostrandole, ma anche per fare vedere che una certa formula φ è conseguenza logica di un dato insieme di altre formule Φ costruendo una successione di formule che o sono assiomi, cioè quelle valide di un certo insieme fissato una volta per tutte, o appartengono all'insieme di formule dato Φ , o sono ottenute da precedenti mediante il modus ponens, successione che porta alla formula φ che si vuole fare vedere essere conseguenza logica di Φ . Infatti, come già osservato, il modus ponens preserva la verità in una certa realizzazione, sicché le formule che si otterranno saranno vere in tutte le realizzazioni in cui sono vere le formule dell'insieme dato.

Continuando a fissare esplicitamente le nozioni basilari del metodo che si sta cercando di introdurre, si definisce **deduzione da un insieme di formule** Φ una successione finita di formule che o sono assiomi, o appartengono a Φ , o sono ottenute da formule precedenti nella successione applicando il modus ponens. Si dirà poi che **la formula** φ è **deducibile da** Φ , e si usa la notazione $\Phi \vdash \varphi$, se esiste una deduzione da Φ la cui ultima formula sia φ . E' immediato che una dimostrazione (di una formula) è una deduzione (di quella formula) dall'insieme vuoto. Si usano chiamare **premesse** le formule che appartengono all'insieme Φ da cui si fa una deduzione. Se poi tale insieme è costituito da una sola formula, $\Phi = \{\psi\}$, invece di scrivere $\{\psi\} \vdash \varphi$, si usa scrivere $\psi \vdash \varphi$.

Avendo scelto di utilizzare come unica regola il modus ponens, poiché in essa ha un ruolo preminente il connettivo \rightarrow , ci si può mettere nella situazione che \neg e \rightarrow siano i connettivi base scelti nel linguaggio, e che tutti gli altri connettivi usati non rappresentino altro che abbreviazioni di formule costruite solo con questi due connettivi.

Avendo scelto di utilizzare il modus ponens in questo sistema, il problema diventa quello di determinare opportunamente gli assiomi, cioè le formule valide da prendere come punti di partenza, affinché siano dimostrabili tutte le formule valide e affinché siano deducibili da Φ tutte le formule che sono conseguenze logiche di Φ . Invece di fare ricorso agli assiomi corrispondenti alle regole della deduzione naturale (che sono legate a connettivi, quantificatori e segno di uguaglianza, ma che non riuscivano a cogliere la regola R^{\forall}) si vogliono introdurre degli assiomi che giustifichino una diversa tecnica, precisamente quella di scaricare/spostare il più possibile gli antecedenti di implicazioni da dimostrare su/tra le premesse di una conseguenza logica.

Di fatto, dal punto di vista semantico, vale la seguente affermazione: $\Phi \vdash \alpha \rightarrow \beta$ se e solo se $\Phi \cup \{\alpha\} \vdash \beta$. Se si potesse ottenere la stessa equivalenza da un punto di vista sintattico (cioè $\Phi \vdash \alpha \rightarrow \beta$ se e solo se $\Phi \cup \{\alpha\} \vdash \beta$, equivalenza che va sotto il nome di teorema di deduzione) ci sarebbe il vantaggio di potere ridurre la deduzione di una formula da certe premesse a deduzioni di una formula più semplice da più premesse. Questo secondo compito sembra molto più facile e questa sembra una direzione promettente, e dunque si cercheranno di introdurre come assiomi delle formule che permettano di arrivare a questo risultato.

In concreto, si decide di considerare come assiomi le formule dei seguenti tipi, detto altrimenti si considerano come schemi di assiomi i seguenti (per comodità, visto che per una più facile lettura la regola del modus ponens è stata espressa usando l'abbreviazione \rightarrow , anche gli assiomi verranno espressi usando la stessa abbreviazione).

- Ax. 1. $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$,
- Ax. 2. $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$,
- Ax. 3. $(\neg \alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\neg \alpha \rightarrow \neg \beta) \rightarrow \alpha)$,
- Ax. 4. $(\forall x(\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow ((\forall x\alpha) \rightarrow (\forall x\beta))$,
- Ax. 5. $\alpha \rightarrow (\forall x\alpha)$ dove x è una variabile che non è libera in α ,
- Ax. 6. $\forall x\alpha \rightarrow \alpha(x/t)$,
- Ax. 7. $t=t$,
- Ax. 8. $(t_1=t'_1) \rightarrow (\dots \rightarrow ((t_n=t'_n) \rightarrow (ft_1\dots t_n=ft'_1\dots t'_n))\dots)$,
- Ax. 9. $(t_1=t'_1) \rightarrow (\dots \rightarrow ((t_n=t'_n) \rightarrow (Pt_1\dots t_n \rightarrow Pt'_1\dots t'_n))\dots)$,
- Ax. 10. le generalizzazioni di assiomi sono anche assiomi.

Per generalizzazione di una formula α si intende la formula $\forall x_1 \dots \forall x_i \alpha$, qualunque siano il numero naturale i e le i variabili quantificate universalmente all'inizio della nuova formula.

Si noti che negli Ax. 8. e Ax. 9. non c'è nessuna richiesta che i termini $t_1, \dots, t_n, t'_1, \dots, t'_n$ siano termini diversi.

Poiché tutte le formule introdotte come assiomi sono valide, come si verifica direttamente con facilità, e poiché il modus ponens preserva la validità, una formula dimostrata sarà valida; di più una formula dedotta da un certo insieme di formule sarà una conseguenza logica di quell'insieme di formule, in base a quanto si era osservato che il modus ponens non preserva solo la validità ma anche la verità in una realizzazione. Si può fissare quanto osservato con l'enunciazione del seguente

Teorema di validità. Una formula dimostrata è valida, e una formula che sia dedotta da un insieme di formule è conseguenza logica di quell'insieme di formule.

Il naturale problema che si pone è se ogni formula valida è dimostrabile e se ogni formula che sia conseguenza logica un certo insieme di formule è anche deducibile da quell'insieme. Rispondere positivamente a questo dubbio sarà gran parte del lavoro che viene svolto nella gran parte dei manuali di logica, lavoro che qui non svolgeremo perché esce dai limiti di questo modulo. Tuttavia osserveremo alcuni aspetti per dare un'idea delle prime difficoltà che si incontrano lungo questa strada.

Giusto per cominciare si vorrebbe trovare una dimostrazione almeno delle formule più ovviamente valide, ad esempio di una formula del tipo $\varphi \rightarrow \varphi$.

Ecco una dimostrazione di tale formula. Essa è una successione finita di cinque formule: se ne scriverà una per in ogni riga indicando a fianco il motivo per cui è stata introdotta.

$\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)$	Ax. 1 con φ al posto di α e $\varphi \rightarrow \varphi$ al posto di β
$(\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi))$	Ax. 2. con φ al posto sia di α che di γ , e $\varphi \rightarrow \varphi$ al posto di β
$(\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$	Modus ponens tra le prime due righe
$\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$	Ax. 1 con φ al posto sia di α e che di β
$\varphi \rightarrow \varphi$	Modus ponens tra la terza e la quarta riga

Si noti come, una volta vista la successione di formule, è facile vedere che essa è proprio una dimostrazione di $\varphi \rightarrow \varphi$. Ma se fosse stato richiesto di trovarla a partire dalla formula da dimostrare $\varphi \rightarrow \varphi$, chi ne sarebbe stato capace? Questa è una constatazione pratica dei limiti del modus ponens, già osservati discutendo quella regola.

E' opportuno notare subito alcune proprietà immediate della nozione \vdash .

Anzitutto si dimostra che

Teorema di transitività del \vdash . Se $\Phi \vdash \alpha_1, \dots, \Phi \vdash \alpha_k$, e $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \vdash \beta$, allora $\Phi \vdash \beta$.

DIMOSTRAZIONE. Infatti, si consideri la successione finita di formule D che è la deduzione di β da $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$: in essa occorrono formule che sono o assiomi, o ottenute da precedenti per modus ponens, o appartengono all'insieme $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$. Si ottenga una nuova successione D' dalla successione D inserendo al posto delle occorrenze della formula α_i la successione finita di formule D_i che è la deduzione di α_i da Φ , per ogni i tra 1 e k . Le formule presenti in D' sono o assiomi o appartengono a Φ , o sono ottenute per modus ponens da formule precedenti in D' come avveniva nelle deduzioni D_1, \dots

., D_k , o D , dal momento che le formule $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ rimangono in D' , non più con la giustificazione che sono premesse (come in D), bensì che sono ottenute al termine di una sottosuccessione D_i di D' .

Un ulteriore risultato che segue immediatamente dalla nozione di deduzione è il seguente

Teorema. Se $\Phi \vdash \alpha$ e $\Psi \supseteq \Phi$, allora $\Psi \vdash \alpha$.

DIMOSTRAZIONE. Sia D una successione finita di formule che è una deduzione di α da Φ . È immediato che la stessa D è anche una deduzione di α da Ψ (si noti che non si è mai richiesto che ciascuna formula nell'insieme delle premesse compaia nella successione che è la deduzione).

Un altro aspetto della nozione di deduzione è messo in luce dal seguente

Teorema di compattezza sintattico. $\Phi \vdash \alpha$ se e solo se esiste un sottinsieme finito Φ_0 di Φ tale che $\Phi_0 \vdash \alpha$.

DIMOSTRAZIONE. La direzione che se $\Phi_0 \vdash \alpha$ allora $\Phi \vdash \alpha$ è una banale conseguenza del teorema precedente. Per l'altra direzione, si osservi che la deduzione D di α da Φ è una successione finita in cui non possono occorrere più che un numero finito di premesse. Sia Φ_0 il sottinsieme finito di Φ costituito dalle premesse che occorrono in D . D è anche una deduzione di α da Φ_0 , sicché c'è questo Φ_0 sottinsieme finito di Φ tale che $\Phi_0 \vdash \alpha$.

.....

.....

Tornando al problema della dimostrabilità delle formule valide, ovviamente non si dimostrerà formula per formula che se è valida allora è dimostrabile, magari esibendone una dimostrazione: sarebbe un lavoro infinito che non darebbe risposta definitiva a nessuno stadio del lavoro.

Nel cercare un approccio più sistematico, va richiamata l'osservazione, già presentata, sulla prevedibile riduzione della difficoltà deduttiva dovendo dedurre una formula più semplice e, per di più, da un maggior numero di premesse. È stata proprio questa osservazione a suggerire di cercare di ottenere quello che è stato chiamato teorema di deduzione e a scegliere gli assiomi perché sia facile arrivare a tale risultato. Ora si vuol dimostrare proprio il teorema di deduzione, facendo così notare l'opportunità degli assiomi scelti.

Teorema di deduzione. $\Phi \vdash \alpha \rightarrow \beta$ se e solo se $\Phi \cup \{\alpha\} \vdash \beta$.

DIMOSTRAZIONE. Una direzione è facile: quella che afferma che se $\Phi \vdash \alpha \rightarrow \beta$ allora $\Phi \cup \{\alpha\} \vdash \beta$. Infatti essa segue quasi direttamente dall'ovvia osservazione che, in generale, se $\Phi \subset \Phi'$, allora la stessa successione finita di formule che mostra che $\Phi \vdash \varphi$, mostra anche che $\Phi' \vdash \varphi$. Nel caso in esame si ha che da $\Phi \vdash \alpha \rightarrow \beta$ segue che $\Phi \cup \{\alpha\} \vdash \alpha \rightarrow \beta$. Si consideri ora la successione finita che termina con la formula $\alpha \rightarrow \beta$ che è la deduzione di $\alpha \rightarrow \beta$ da $\Phi \cup \{\alpha\}$, e la si prolunghi con la formula α , perché nelle premesse, e dalla formula β , perché ottenuta dalle ultime due, $\alpha \rightarrow \beta$ e α , mediante modus ponens. La

nuova successione finita, ottenuta dalla precedente allungandola delle due formule α e β , è una deduzione di β da $\Phi \cup \{\alpha\}$, e la dimostrazione di questa direzione del teorema di deduzione è completata.

L'altra direzione è più delicata poiché ora si vuole dedurre una formula più complessa, $\alpha \rightarrow \beta$, da meno premesse, solo quelle di Φ . Quello che si deve fare è costruire una successione finita di formule che sia una deduzione di $\alpha \rightarrow \beta$ da Φ , e per fare ciò si ha a disposizione un'altra successione finita di formule, diciamo $\varphi_1, \dots, \varphi_j$, dove φ_j è β , che è la deduzione di β da $\Phi \cup \{\alpha\}$. L'idea è che nella successione finita di formule da costruire, che deve essere una deduzione da Φ , oltre ad altre formule, compaiano anche le formule $\alpha \rightarrow \varphi_i$ per ogni $i \leq j$, e ciò per ogni formula φ_i della deduzione data: così in corrispondenza della formula φ_j , che è β , si otterrà proprio $\alpha \rightarrow \beta$. Ora, per dimostrare che esiste una successione finita con le caratteristiche appena precisate, si può procedere per induzione sulla lunghezza j della deduzione data D di β da $\Phi \cup \{\alpha\}$.

Per iniziare l'induzione si consideri $j=1$. In tale caso la formula φ_1 della prima deduzione D non può che essere o un assioma o una formula di $\Phi \cup \{\alpha\}$. Si cominci con il considerare il caso che φ_1 sia un assioma; allora la seguente successione è una dimostrazione, e quindi anche una deduzione da Φ , di $\alpha \rightarrow \varphi_1$.

φ_1	Assioma
$\varphi_1 \rightarrow (\alpha \rightarrow \varphi_1)$	Ax. 1.
$\alpha \rightarrow \varphi_1$	MP dalle righe precedenti.

Il caso che φ_1 appartenga a $\Phi \cup \{\alpha\}$ si divide in due sottocasi, a seconda che φ_1 appartenga a Φ oppure che φ_1 sia α .

Nel primo sottocaso la seguente successione è una deduzione da Φ

φ_1	perché appartenente a Φ
$\varphi_1 \rightarrow \cup(\alpha \rightarrow \varphi_1)$	Ax. 1.
$\alpha \rightarrow \varphi_1$	MP dalle righe precedenti.

Nel secondo caso si vuol arrivare a dedurre da Φ la formula $\alpha \rightarrow \alpha$, ma si è già visto che le formule di questo tipo hanno una dimostrazione, e si utilizzi proprio quella. Così si conclude la base dell'induzione.

Per il passo induttivo, si consideri una successione D di lunghezza $j+1$, che sia una deduzione di φ_{j+1} da $\Phi \cup \{\alpha\}$, supponendo di aver già acquisito il risultato per le successioni di lunghezza j , ed in particolare per la successione delle prime j formule di D (che è una deduzione D_0 di φ_j da $\Phi \cup \{\alpha\}$, cioè si sappia già costruire una ulteriore successione finita D_0' di formule che sono una deduzione da Φ e che contiene, eventualmente oltre altre formule, le formule del tipo $\alpha \rightarrow \varphi_i$ per ogni formula φ_i , con $i \leq j$, nella deduzione D_0 . La presenza in D dell'ultima sua formula φ_{j+1} può essere giustificata perché o 1) è un assioma, o 2) è una premessa (cioè appartiene a $\Phi \cup \{\alpha\}$) che può o appartenere a Φ o essere α , o 3) è ottenuta da formule precedenti per modus ponens. Nei primi due casi (inclusi entrambi i sottocasi del secondo) si può allungare la successione D' con le formule già viste nelle rispettive situazioni quando si è trattato il passo base di questa induzione, ottenendo così delle successioni finite, diciamo D'' , che sono deduzioni da Φ e che estendono anche a φ_{j+1} la proprietà che in D'' ci sono, eventualmente oltre altre formule, le formule del tipo $\alpha \rightarrow \varphi_i$ per ogni formula φ_i , con $i \leq j+1$, nella deduzione iniziale D .

Sicché l'ultimo caso che rimane da analizzare è quello in cui φ_{j+1} è ottenuta per modus ponens da formule precedenti in D . Ciò significa che in D ci sono due formule φ_h e φ_k , che precedono φ_{j+1} , da cui questa si ottiene per modus ponens. Ma allora una delle due, diciamo φ_k , è del tipo $\varphi_h \rightarrow \varphi_{j+1}$. Per l'ipotesi induttiva, nella successione D_0'

ci dovranno essere le formule $\alpha \rightarrow \varphi_h$ e $\alpha \rightarrow (\varphi_h \rightarrow \varphi_{j+1})$. A questo punto si consideri la successione finita D'' ottenuta prolungando la successione D_0' aggiungendo via via le seguenti formule indicate qui di seguito riga per riga con accanto l'indicazione del perché possono essere inserite in una deduzione da Φ .

$(\alpha \rightarrow (\varphi_h \rightarrow \varphi_{j+1})) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \varphi_h) \rightarrow (\alpha \rightarrow \varphi_{j+1}))$	Ax. 2.
$(\alpha \rightarrow \varphi_h) \rightarrow (\alpha \rightarrow \varphi_{j+1})$	MP dalla precedente e da $\alpha \rightarrow (\varphi_h \rightarrow \varphi_{j+1})$ che è prima in D_0'
$\alpha \rightarrow \varphi_{j+1}$	MP dalla precedente e da $\alpha \rightarrow \varphi_h$ che è prima in D_0'

La successione D'' è una deduzione di $\alpha \rightarrow \varphi_{j+1}$ da Φ , e con questo si sono completati anche quest'ultimo caso del passo, l'intera induzione e la dimostrazione del teorema di deduzione.

Si noti che il teorema di deduzione stabilisce un certo legame tra le nozioni rappresentate dai simboli \rightarrow e \vdash . Per come sono stati definiti questi simboli rappresentano concetti diversi: \rightarrow è una abbreviazione di una successione finita di simboli del linguaggio (o un simbolo del linguaggio se si sceglie di considerare \neg e \rightarrow come i connettivi base da cui ottenere gli altri come abbreviazioni) associata alla funzione dalle coppie di valori di verità nei valori di verità che fa corrispondere il falso solo alla coppia (V,F); mentre \vdash è un simbolo per rappresentare una nozione sugli oggetti dello studio che si sta eseguendo che lega un insieme di formule (anche vuoto) ad una formula se c'è una successione finita di formule che è una deduzione. Si era già osservato all'inizio che il nome generalmente scelto per il connettivo \rightarrow è fuorviante: la parola implicazione ci suggerisce una consequenzialità che non è né nella nozione di funzione binaria sui valori di verità, né nell'intento di voler descrivere una situazione attraverso espressioni linguistiche. La nozione di deduzione, invece, include una certa consequenzialità: partendo da formule valide e applicando regole sintattiche che preservano la validità si giunge "di conseguenza" a formule valide.

Qualcuno potrebbe affermare che il teorema di deduzione trasferisce questa consequenzialità dalla nozione di deduzione a quella di implicazione. Ma non è così: la stessa scrittura del teorema, quando l'insieme delle premesse per dedurre l'implicazione è vuoto, è la seguente " $\vdash \alpha \rightarrow \beta$ se e solo se $\alpha \vdash \beta$ ", e non " $\alpha \rightarrow \beta$ se e solo se $\alpha \vdash \beta$ ". Così viene messo in evidenza come il teorema di deduzione legghi la deduzione di una formula di tipo implica ad un'altra deduzione, e non sia un trasferimento all'implicazione di significati consequenziali che restano propri della deduzione. Lo stesso fatto, per certi versi antiintuitivo, che una implicazione sia vera quando l'antecedente è falso è una indicazione che nell'implicazione non ci sono aspetti di consequenzialità: se ci fossero non avrebbe senso partire da un antecedente falso. Che una implicazione sia vera quando l'antecedente è falso risulta invece del tutto consono alle aspettative se l'implicazione è vista come una operazione che descrive una situazione complessa facendo riferimento alle descrizioni di situazioni più semplici che si combinino in un certo modo: quel modo di combinarsi deve rendere conto di tutte le possibilità che si presentano per le componenti, in questo senso si usa dire che i connettivi, ed anche l'implicazione, hanno un carattere vero funzionale.

Si osservi che sia nella dimostrazione di $\alpha \rightarrow \alpha$ che nel mostrare il teorema di deduzione gli unici assiomi espressamente utilizzati sono assiomi del tipo Ax. 1. o Ax. 2..

Ottenuto il teorema di deduzione si può vedere come esso può essere utilizzato per ottenere dimostrazioni e deduzioni. Gli esempi che seguiranno non sono solo un esercizio fine a sè stesso, ma serviranno successivamente nello sviluppo della presentazione.

#####

Come primo esempio si è interessati ad una dimostrazione di $\neg\neg\alpha\rightarrow\alpha$. Anzitutto, per il teorema di deduzione, ciò è equivalente a mostrare che $\neg\neg\alpha\vdash\alpha$. La seguente successione finita di formule è una deduzione di α da $\neg\neg\alpha$ per i motivi segnati a margine.

$(\neg\alpha\rightarrow\neg\alpha)\rightarrow((\neg\alpha\rightarrow\neg\neg\alpha)\rightarrow\alpha)$	Ax. 3. con $\neg\alpha$ al posto di β .
$\neg\neg\alpha\rightarrow(\neg\alpha\rightarrow\neg\neg\alpha)$	Ax. 1. con $\neg\alpha$ al posto di β e $\neg\neg\alpha$ al posto di α .
$\neg\neg\alpha$	Premessa
$\neg\alpha\rightarrow\neg\neg\alpha$	MP 2,3
$\neg\alpha\rightarrow\neg\alpha$	Risultato già ottenuto (inseribile in base al teorema di transitività di \vdash)
$(\neg\alpha\rightarrow\neg\neg\alpha)\rightarrow\alpha$	MP 1,5
α	MP 6,4

Come secondo esempio si vuol esibire una deduzione di $\neg\neg\alpha$ da α : essa può essere formata dalla seguente successione per i motivi segnati a margine.

$(\neg\neg\neg\alpha\rightarrow\alpha)\rightarrow((\neg\neg\neg\alpha\rightarrow\neg\alpha)\rightarrow\neg\neg\alpha)$	Ax. 3. con $\neg\alpha$ al posto di β e con $\neg\neg\alpha$ al posto di α .
$\alpha\rightarrow(\neg\neg\neg\alpha\rightarrow\alpha)$	Ax. 1.
α	Premessa
$\neg\neg\neg\alpha\rightarrow\alpha$	MP 2,3
$(\neg\neg\neg\alpha\rightarrow\neg\neg\alpha)\rightarrow\neg\neg\alpha$	MP 1,4
$\neg\neg\neg\alpha\rightarrow\neg\alpha$	Risultato già ottenuto (inseribile in base al teorema di transitività di \vdash)
$\neg\neg\alpha$	MP 5,6

Come terzo esempio ecco una deduzione di α da $\{\beta, \neg\beta\}$.

$(\neg\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow((\neg\alpha\rightarrow\neg\beta)\rightarrow\alpha)$	Ax. 3.
$\beta\rightarrow(\neg\alpha\rightarrow\beta)$	Ax. 1.
β	Premessa
$\neg\alpha\rightarrow\beta$	MP 2,3
$(\neg\alpha\rightarrow\neg\beta)\rightarrow\alpha$	MP 1,4
$\neg\beta\rightarrow(\neg\alpha\rightarrow\neg\beta)$	Ax. 1
$\neg\beta$	Premessa
$\neg\alpha\rightarrow\neg\beta$	MP 6,7
α	MP 5,8

Il quarto esempio vuole mostrare sintatticamente l'equivalenza tra una affermazione e la sua contronominale. Si esibirà prima la deduzione di $\alpha\rightarrow\beta$ da $\neg\beta\rightarrow\neg\alpha$. Per il teorema di deduzione, mostrare che $\neg\beta\rightarrow\neg\alpha\vdash\alpha\rightarrow\beta$ equivale a mostrare che $\{\neg\beta\rightarrow\neg\alpha, \alpha\}\vdash\beta$, e la seguente è una tale deduzione.

$\alpha\rightarrow(\neg\beta\rightarrow\alpha)$	Ax. 1.
α	Premessa
$\neg\beta\rightarrow\alpha$	MP 1,2
$(\neg\beta\rightarrow\alpha)\rightarrow((\neg\beta\rightarrow\neg\alpha)\rightarrow\beta)$	Ax. 3.
$(\neg\beta\rightarrow\neg\alpha)\rightarrow\beta$	MP 3,4

$\neg\beta \rightarrow \neg\alpha$ Premessa
 β MP 5,6

L'altra direzione dell'equivalenza, e cioè che $\neg\beta \rightarrow \neg\alpha$ si deduce da $\alpha \rightarrow \beta$, può essere ricondotta, per il teorema di deduzione, a mostrare che $\{\alpha \rightarrow \beta, \neg\beta\} \vdash \neg\alpha$, ma, per arrivare a questo risultato, è opportuno far prima vedere che da $\{\alpha \rightarrow \beta, \neg\neg\alpha\}$ si deduce $\neg\neg\beta$. Di fatto si sa già che c'è una deduzione D di α da $\neg\neg\alpha$, e una deduzione D' di $\neg\neg\beta$ da β , sicché la deduzione D'' da $\{\alpha \rightarrow \beta, \neg\neg\alpha\}$ che si cerca può essere così ottenuta: si inizia con la successione D che termina con α , a cui si fanno seguire le formule $\alpha \rightarrow \beta$ perché è una premessa e β per modus ponens tra le ultime due, poi si mettono tutte le formule di D' meno le occorrenze di β , giustificando la presenza delle successive formule di D' ottenute per modus ponens, usando anche un'occorrenza di β che è stata tolta, con il fatto che β è già precedentemente nella deduzione D'' che si sta costruendo. È immediato che D'' è una deduzione da $\{\alpha \rightarrow \beta, \neg\neg\alpha\}$ e che la sua ultima formula è $\neg\neg\beta$, come volevasi. Per il teorema di deduzione, il risultato ottenuto può essere visto anche così: esiste una deduzione D* che giustifica l'affermazione $\alpha \rightarrow \beta \vdash \neg\neg\alpha \rightarrow \neg\neg\beta$.

Tornando all'altra direzione della contronominale, la seguente è una deduzione di $\neg\alpha$ da $\{\alpha \rightarrow \beta, \neg\beta\}$.

$\neg\beta \rightarrow (\neg\neg\alpha \rightarrow \neg\beta)$	Ax. 1.	
$\neg\beta$	Premessa	
$\neg\neg\alpha \rightarrow \neg\beta$	MP 1,2	
$(\neg\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow ((\neg\neg\alpha \rightarrow \neg\neg\beta) \rightarrow \neg\alpha)$	Ax. 3.	
$(\neg\neg\alpha \rightarrow \neg\neg\beta) \rightarrow \neg\alpha$	MP 3,4	
$\alpha \rightarrow \beta$	Premessa	}
...		
...		
...		
$\neg\neg\alpha \rightarrow \neg\neg\beta$		} D*
$\neg\alpha$	MP 6, precedente	

Come quinto esempio si cercherà di far vedere che $\wedge\alpha\beta \vdash \alpha$. Si è già detto che nel presente contesto è opportuno adottare come connettivi del linguaggio \neg e \rightarrow , sicché $\wedge\alpha\beta$ va considerato come una abbreviazione, e precisamente della formula $\neg(\alpha \rightarrow \neg\beta)$ ($\neg(\alpha \rightarrow \neg\beta)$ nella notazione con le parentesi). Così ciò che si vuol far vedere diviene $\neg(\alpha \rightarrow \neg\beta) \vdash \alpha$. Per il teorema di deduzione ciò equivale ad affermare che $\neg(\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \alpha$ è dimostrabile. Si è già visto che la contronominale di una formula è dimostrabile se e solo se quella formula è dimostrabile, per cui il problema si trasforma equivalentemente nel seguente: $\vdash \neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg\beta)$. Per il teorema di deduzione ciò equivale successivamente a $\neg\alpha \vdash \alpha \rightarrow \neg\beta$ e a $\neg\alpha, \alpha \vdash \neg\beta$. Ma l'ultima formulazione è corretta perché è proprio quanto si è mostrato nel terzo esempio.

Analogo è il modo per far vedere che $\wedge\alpha\beta \vdash \beta$. Ciò vuol dire mostrare che $\neg(\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \beta$ è dimostrabile e, quindi, per contronominale e teorema di deduzione, mostrare che $\neg\beta \vdash \alpha \rightarrow \neg\beta$. Con un ulteriore passaggio alla contronominale ciò vuol dire mostrare che $\neg\beta \vdash \beta \rightarrow \neg\alpha$, ossia, ancora per il teorema di deduzione, che $\neg\beta, \beta \vdash \neg\alpha$, il che è proprio così per quanto visto nel terzo esempio.

Come sesto esempio si vuol mostrare che $\alpha \vdash \neg\neg\alpha$ e $\beta \vdash \neg\neg\beta$. Con altra notazione queste affermazioni corrispondono rispettivamente a $\alpha \vdash \alpha \vee \beta$ e a $\beta \vdash \alpha \vee \beta$, oppure a $\alpha \vdash \neg\alpha \rightarrow \beta$ e a $\beta \vdash \neg\alpha \rightarrow \beta$. Ma, per il teorema di deduzione, $\alpha \vdash \neg\alpha \rightarrow \beta$ equivale a $\alpha, \neg\alpha \vdash \beta$,

che si sa essere corretta per il terzo esempio. Per mostrare l'altra affermazione conviene far ricorso alla contronominale, cioè a $\beta \vdash \neg\beta \rightarrow \alpha$, che, ancora per il teorema di deduzione, equivale a mostrare che $\beta, \neg\beta \vdash \alpha$, che si sa essere corretta sempre per il terzo esempio.

Una delle difficoltà indicate nel ridurre le regole al solo modus ponens e ad assiomi consisteva nell'incapacità di trovare un modo di esprimere la regola $R^{\forall\forall}$ tenendo conto delle limitazioni che riguardano il termine su cui la regola si appoggia. Nell'introdurre i nuovi assiomi si è prestata attenzione a questo problema, in particolare con gli assiomi del tipo Ax. 4., Ax. 5. e Ax.10.. Ora si vuol mostrare che nel sistema costruito ci sono procedure che possono prendere il posto della regola $R^{\forall\forall}$, riuscendo anche a precisare, in modo diverso, come tener conto delle limitazioni sul termine caratteristico della regola. Allo scopo si dimostra il seguente

Teorema di generalizzazione. Se x è una variabile che non occorre libera in Φ , data una deduzione D di α da Φ , c'è un'altra deduzione D' di $\forall x\alpha$ da Φ tale che 1) x non occorre libera in D' , e 2) ogni variabile che ha occorrenze libere in D' ha anche occorrenze libere in D .

DIMOSTRAZIONE. Si mostrerà questo risultato per induzione sulla lunghezza della deduzione D , con forti analogie con la dimostrazione del teorema di deduzione. Se la lunghezza è 1, D è una successione con una sola formula φ_1 che, per essere in una deduzione, dovrà essere o un assioma o una premessa. Nel primo caso la deduzione D' sarà $\forall x\varphi_1$ che è pure un assioma del tipo Ax. 10.. Nel secondo caso, dal momento che φ_1 appartiene a Φ , la variabile x non può occorrere libera in φ_1 , sicché la formula $\varphi_1 \rightarrow \neg(\forall x\varphi_1)$ è un assioma del tipo Ax. 5., e la seguente successione di formule, in cui l'ultima formula è ottenuta dalle precedenti per modus ponens, è la deduzione cercata da Φ

$$\begin{array}{l} \varphi_1 \\ \varphi_1 \rightarrow (\forall x\varphi_1) \\ \forall x\varphi_1 \end{array}$$

Si noti come la variabile x non occorra libera in queste deduzioni e come le variabili che occorrono libere in queste deduzioni lo siano anche in φ_1 , cioè in D .

Completata la base dell'induzione, si consideri ora il passo, e sia D una deduzione di lunghezza $i+1$ da Φ che termina con la formula φ_{i+1} , e D_0 il suo tratto iniziale di lunghezza i . Per ipotesi induttiva ci sarà una deduzione D_0' , che corrisponde a D_0 , in cui, eventualmente oltre altre formule, ci sono le formule $\forall x\varphi_j$ per ogni formula φ_j di D che rispettano le richieste sulle variabili precisate nell'enunciato di questo teorema. Si devono considerare tre casi: o 1) φ_{i+1} è un assioma, o 2) φ_{i+1} è una formula di Φ , o 3) φ_{i+1} è ottenuta da formule precedenti, φ_h e φ_k , che è $\varphi_h \rightarrow \varphi_{i+1}$, in D mediante modus ponens. Nei primi due casi si aggiungono alla fine della deduzione D_0' le formule viste per il passo base in relazione, rispettivamente, agli stessi casi. Rimane da considerare il terzo caso. Ora, per ipotesi induttiva, le formule $\forall x\varphi_h$ e $\forall x(\varphi_h \rightarrow \varphi_{i+1})$ sono in D_0' . La deduzione D' si ottiene aggiungendo alla fine di D_0' le seguenti formule

$$\begin{array}{l} (\forall x(\varphi_h \rightarrow \varphi_{i+1})) \rightarrow ((\forall x\varphi_h) \rightarrow (\forall x\varphi_{i+1})), \\ (\forall x\varphi_h) \rightarrow (\forall x\varphi_{i+1}) \\ \forall x\varphi_{i+1} \end{array}$$

D' è la deduzione cercata poiché la prima di queste formule è un assioma del tipo Ax. 4., la seconda è ottenuta per modus ponens dalla prima delle aggiunte e da $\forall x(\varphi_h$

$\rightarrow\varphi_{i+1}$), e la terza è ottenuta ancora per modus ponens dalla seconda delle aggiunte e da $\forall x\varphi_h$, ed inoltre x non occorre libera neppure in queste formule, ed anche le variabili che occorrono libere in queste formule occorrono libere pure in D . Ciò conclude questo caso, il passo dell'induzione e la dimostrazione del presente teorema.

Come si diceva prima di enunciare il teorema precedente, questo permette di avere uno strumento corrispondente alla regola $R^{\forall\forall}$ nel senso che, se si ha una deduzione di α da Φ , e se x non occorre libera in α o in Φ (e questo è il nuovo modo di esprimere la limitazione che era presente nella regola $R^{\forall\forall}$), allora c'è anche una (altra) deduzione di $\forall x\alpha$ da Φ .

Il teorema appena dimostrato ha delle facili e rilevanti conseguenze che ora andranno esplicitate.

Corollario. Se esiste una deduzione di α da Φ , allora esiste anche una deduzione di α da Φ in cui le variabili che hanno occorrenze libere sono quelle che hanno occorrenze libere o in α o in Φ .

DIMOSTRAZIONE. Le variabili che hanno occorrenze libere in una deduzione sono in numero finito dal momento che una deduzione è una successione finita, con prescritte caratteristiche, di formule le quali, a lor volta, sono particolari successioni finite di simboli. Se x è una variabile che non ha occorrenze libere o in α o in Φ , si cercherà di passare da una deduzione di α da Φ che abbia occorrenze libere di x a una deduzione ancora di α da Φ ma senza occorrenze libere di x . Infatti, per il teorema precedente, esiste una deduzione D' di $\forall x\alpha$ da Φ in cui non occorre libera la variabile x . Si ottiene una nuova deduzione D'' prolungando la deduzione D' aggiungendo le formule $\forall x\alpha \rightarrow \alpha$ la cui presenza nella nuova deduzione è giustificata perché è un assioma di tipo Ax . 6. ($\alpha(x/t)$ è proprio α perché x non occorre libera in α), e α ottenuta per modus ponens dalle ultime due. Si osservi che anche in D'' la variabile x non ha occorrenze libere. Così le variabili che hanno occorrenze libere in una deduzione di α da Φ , ma non hanno occorrenze libere in α o in Φ , possono essere eliminate una alla volta passando ad altre deduzioni sempre di α da Φ , fino ad arrivare ad una deduzione α da Φ senza tali variabili, come si voleva.

Come caso particolare del precedente corollario si ha

Corollario. Se un enunciato α è deducibile da un insieme di enunciati Φ allora c'è una deduzione di α da Φ costituita da soli enunciati.

Un risultato analogo a quello stabilito dal precedente teorema è il seguente

Teorema di generalizzazione sui simboli di costante. Si supponga che $\Phi \vdash \alpha(x/c)$, dove c è un simbolo di costante non occorrente né in Φ né in α . Allora $\Phi \vdash \forall z\alpha(x/z)$ per una opportuna variabile z .

DIMOSTRAZIONE. D sia una deduzione di $\alpha(x/c)$ da Φ . Sia Φ_0 il sottinsieme finito di Φ costituito dalle formule di Φ che occorrono in D , e z sia una variabile che non occorre libera in D (sicuramente c'è perché D ha un insieme finito di formule che sono successioni finite di simboli, e le variabili sono infinite). Sia D' la successione di formule ottenuta dalla successione D sostituendo z al posto di c in ciascuna delle formule di D . Così facendo si ottiene ancora una deduzione D' da Φ_0 poiché la sostituzione indicata muta assiomi in assiomi, formule di Φ_0 in se stesse (poiché in esse non occorre c), e le formule ottenute per modus ponens in formule ottenute per modus ponens dalle corrispondenti. Così $\Phi_0 \vdash \alpha(x/z)$, e z non occorre libera in Φ_0 . Per il teorema di generalizza-

zione, c'è anche una deduzione di $\forall z\alpha(x/z)$ da Φ_0 . Infine, poiché $\Phi \Phi_0$, si può concludere che $\Phi \vdash \forall z\alpha(x/z)$.

Forse è opportuno un commento sull'Ax. 6., che è stato utilizzato poco fa. In esso c'è la sottoformula $\alpha(x/t)$ con nessuna precisazione ulteriore su chi è il termine t . t potrebbe non essere libero per x in α , e, in tal caso, si sa che, per evitare cattura di variabili, con la scrittura $\alpha(x/t)$ si intende la nuova formula che si ottiene da α eseguendo prima dei cambi alfabetici che diano una variante α' di α in cui t è libero per x , e poi eseguendo la sostituzione $\alpha'(x/t)$. Si è già visto che tutta questa procedura dal punto di vista semantico non provoca problemi grazie alla equivalenza logica tra formule e loro varianti. Ma ora, con gli assiomi e il modus ponens, si sta affrontando un aspetto sintattico e sorge naturale la domanda se sono equideducibili una formula e una sua variante, dove per equideducibili si intende che una può essere dedotta dall'altra e viceversa. La risposta sarà affermativa come conseguenza del

Teorema di sostituzione di sottoformule equideducibili. Sia α una sottoformula di β , e siano α e α' formule equideducibili. Sia β' la formula che si ottiene da β sostituendo in essa le occorrenze della sottoformula α con la formula α' . Allora β e β' sono equideducibili.

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione si svolge per induzione sulla costruzione della formula β a partire da α . In questo contesto in cui la regola scelta, il modus ponens, usa il connettivo \rightarrow e gli assiomi sono pure formulati con riferimento a detto connettivo, nel considerare i passi di costruzione di una formula, è conveniente assumere che i due connettivi, da cui si possono ottenere tutti gli altri come abbreviazioni di espressioni che usano quei due, siano \neg e \rightarrow .

Se β è α , allora β' è α' , e pertanto β e β' sono equideducibili, e così si è mostrata la correttezza della base dell'induzione.

Si supponga ora che β sia $\neg\gamma$ e che, per ipotesi induttiva, il risultato valga per γ , cioè che γ e γ' sono equideducibili con γ' ottenuta da γ sostituendo le sottoformule α di γ con α' . Per pervenire alla equideducibilità di β e β' bisogna dimostrare che $\neg\gamma \vdash \neg\gamma'$ e che $\neg\gamma' \vdash \neg\gamma$.

Infatti, dall'ipotesi che $\gamma \vdash \neg\gamma'$, per il teorema di deduzione, si ha che $\vdash \neg\gamma' \rightarrow \gamma$, sicché, passando alla contronominale, si ha che $\vdash \neg\gamma \rightarrow \neg\gamma'$, e, ancora per il teorema di deduzione, si perviene a $\neg\gamma \vdash \neg\gamma'$. Analogamente, $\neg\gamma' \vdash \neg\gamma$ si ottiene a partire da $\gamma \vdash \neg\gamma'$.

Si supponga poi che β sia $\gamma_1 \rightarrow \gamma_2$ e che, per ipotesi induttiva, il risultato valga per entrambe γ_1 e γ_2 , cioè che γ_1 e γ_1' sono equideducibili con γ_1' ottenuta da γ_1 sostituendo le sottoformule α di γ_1 con α' , e che γ_2 e γ_2' sono equideducibili con γ_2' ottenuta da γ_2 sostituendo le sottoformule α di γ_2 con α' . Per pervenire alla equideducibilità di β e β' bisogna dimostrare che $\gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \vdash \gamma_1' \rightarrow \gamma_2'$ e che $\gamma_1' \rightarrow \gamma_2' \vdash \gamma_1 \rightarrow \gamma_2$. Per il teorema di deduzione, le ultime due affermazioni equivalgono rispettivamente a $\{\gamma_1 \rightarrow \gamma_2, \gamma_1'\} \vdash \gamma_2'$ e $\{\gamma_1' \rightarrow \gamma_2', \gamma_1\} \vdash \gamma_2$. La prima può essere giustificata dalla seguente deduzione: si inizia con la deduzione che dalla premessa γ_1' fa ottenere γ_1 , poi si aggiungono la premessa $\gamma_1 \rightarrow \gamma_2$ e la formula γ_2 ottenuta per modus ponens dalle ultime due, e si conclude con la deduzione di γ_2' da γ_2 . La seconda affermazione si giustifica in modo analogo.

Si consideri ora il caso in cui β sia $\forall x\gamma$ e che, per ipotesi induttiva, il risultato valga per γ , cioè si ha che γ e γ' sono equideducibili con γ' ottenuta da γ sostituendo le sottoformule α di γ con α' . Per pervenire alla equideducibilità di β e β' bisogna dimostrare che $\forall x\gamma \vdash \forall x\gamma'$ e che $\forall x\gamma' \vdash \forall x\gamma$. La prima affermazione può essere giustificata dalla seguente deduzione: si inizia con la premessa $\forall x\gamma$ seguita dall'assioma 6 $\forall x\gamma \rightarrow \gamma$, e da

queste due, per modus ponens si ottiene e si aggiunge γ , poi si fa seguire la deduzione che da γ porta a γ' , sicché si può affermare che c'è anche una deduzione di $\forall x\gamma'$ da $\forall x\gamma$ per generalizzazione poiché la variabile x non occorre libera nelle premesse. Analoga è l'altra deduzione che porta a giustificare per intero quanto si era dichiarato.

Così si sono provati tutti i casi del passo dell'induzione e questa è completa, e il teorema è provato.

Dal teorema appena dimostrato segue il

Corollario. Una variante di una formula e la formula stessa sono equideducibili.

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione si sviluppa per induzione sulla complessità della formula φ . I casi in cui φ è atomica o negazione di una formula o implicazione tra due formule è banale mostrare la equideducibilità con una sua variante proprio per la definizione di variante in questi casi. Sicché resta da considerare il caso in cui φ sia $\forall x\alpha$. Una sua variante è del tipo $\forall y\alpha'(x/y)$, dove α' è una variante di α e y è libera per x in α' e non vi occorre libera. Bisogna far vedere che $\forall x\alpha \vdash \forall y\alpha'(x/y)$ e che $\forall y\alpha'(x/y) \vdash \forall x\alpha$. Poiché il passaggio da una formula ad una sua variante è reversibile, basta giustificare una delle due affermazioni. Da $\forall x\alpha$ e dall'assioma 6 $\forall x\alpha \rightarrow \alpha(x/y)$ segue $\alpha(x/y)$ per modus ponens. Così $\forall x\alpha \vdash \alpha(x/y)$. Per ipotesi induttiva si ha che $\alpha(x/y) \vdash \alpha'(x/y)$, da cui segue che $\forall x\alpha \vdash \alpha'(x/y)$ per la transitività di \vdash . Poiché y non occorre libera in $\forall x\alpha$, per il teorema di generalizzazione, si ha che $\forall x\alpha \vdash \forall y\alpha'(x/y)$.

Si noti che, per il teorema di deduzione e poiché $\{\alpha, \beta\} \vdash \alpha \wedge \beta$ (come si dimostrerà alla fine di questa sezione, ma in modo indipendente) due formule, φ_1 e φ_2 , sono equideducibili se e solo se $\vdash \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$ (si ricordi che $\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$ è una abbreviazione di $(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) \wedge (\varphi_2 \rightarrow \varphi_1)$).

Finora si sono usati i vari assiomi eccetto quelli che riguardano il predicato $=$, cioè gli assiomi 7., 8., 9.. Si vuole ora mostrare come questi assiomi entrino in gioco per dedurre le proprietà dell'uguaglianza.

La formula del linguaggio $\forall x(x=x)$ (che è vera in ogni interpretazione con $=$ simbolo logico per la riflessività dell'uguaglianza) è dimostrabile: è infatti una istanza dell'Ax. 10. una volta notato che $x=x$ è un esempio dell'Ax. 7..

La formula del linguaggio $\forall x\forall y(x=y \rightarrow y=x)$ (che è vera in ogni interpretazione con $=$ simbolo logico per la simmetria dell'uguaglianza) è dimostrabile: infatti dall'Ax. 9., nella forma $x=y \rightarrow (x=x \rightarrow y=x)$, grazie al teorema di deduzione si passa a $x=y \vdash x=x \rightarrow y=x$, e da qui, poiché $x=x$ è un assioma e applicando il modus ponens, si può affermare che $x=y \vdash y=x$, donde, sempre per il teorema di deduzione $\vdash x=y \rightarrow y=x$, ed infine applicando due volte il teorema di generalizzazione si perviene alla dimostrazione cercata.

La formula del linguaggio $\forall x\forall y\forall z(x=y \rightarrow (y=z \rightarrow x=z))$ (che è vera in ogni interpretazione con $=$ simbolo logico per la transitività dell'uguaglianza) è dimostrabile: infatti si è appena visto che $x=y \vdash y=x$. Da ciò e dall'Ax. 8. nella forma $y=x \rightarrow (y=z \rightarrow x=z)$ per modus ponens si ottiene che $x=y \vdash y=z \rightarrow x=z$. Usando il teorema di deduzione si ha $x=y \rightarrow (y=z \rightarrow x=z)$, e si perviene alla conclusione generalizzando tre volte.

Primo teorema di sostituzione. Si supponga che t sia un termine in cui possono esserci delle occorrenze della variabile x ; si indichino con $t(x/t')$ e con $t(x/t'')$ i termini

ottenuti da t il primo sostituendo alla variabile x il termine t' e il secondo sostituendo alla variabile x a volte t' e a volte t'' . Allora risulta che $t'=t'' \vdash t(x/t')=t(x/t'')$.

DIMOSTRAZIONE. L'argomento si svolge per induzione sulla costruzione del termine t . Se t è una costante o una variabile diversa da x , allora $t(x/t')$ e $t(x/t'')$ sono lo stesso termine t e la formula $t=t$ è un assioma e quindi deducibile da qualsiasi insieme di premesse. Se t è proprio la variabile x , allora $t(x/t')$ è t' e $t(x/t'')$ è o t' o t'' : nel primo caso si conclude come prima, nell'altro chiaramente la formula $t'=t''$ si deduce da $t'=t''$. Si supponga ora che il termine t sia del tipo $ft_1\dots t_n$ (per cui $t(x/t')$ è $ft_1(x/t')\dots t_n(x/t')$ e $t(x/t'')$ è $ft_1(x/t'')\dots t_n(x/t'')$) e che da $t'=t''$ si possano dedurre le formule $t_1(x/t')=t_1(x/t'')$, ..., $t_n(x/t')=t_n(x/t'')$. Da queste ultime uguaglianze e dall'assioma Ax. 8. applicando ripetutamente il modus ponens si deduce $ft_1(x/t')\dots t_n(x/t')=ft_1(x/t'')\dots t_n(x/t'')$, ovvero $t(x/t')=t(x/t'')$, come si voleva.

Secondo teorema di sostituzione. Si supponga che φ sia una formula in cui possono esserci delle occorrenze della variabile x ; si indichino con $\varphi(x/t')$ e con $\varphi(x/t'')$ le formule ottenute da φ la prima sostituendo alla variabile x il termine t' e la seconda sostituendo alla variabile x delle volte t' e delle volte t'' . Allora $t'=t'' \vdash \varphi(x/t') \rightarrow \varphi(x/t'')$.

DIMOSTRAZIONE. L'argomento si svolge per induzione sulla costruzione della formula φ . Sia φ la formula atomica $Pt_1\dots t_n$. La formula $\varphi(x/t')$ sarà $Pt_1(x/t')\dots t_n(x/t')$. Per il primo teorema di sostituzione da $t'=t''$ si possono dedurre tutte le formule $t_1(x/t')=t_1(x/t'')$, ..., $t_n(x/t')=t_n(x/t'')$. Da queste e dall'Ax.9. nella forma $(t_1(x/t')=t_1(x/t'') \rightarrow (\dots \rightarrow (t_n(x/t')=t_n(x/t'') \rightarrow (Pt_1(x/t')\dots t_n(x/t') \rightarrow Pt_1(x/t'')\dots t_n(x/t'')))) \dots)$ con n applicazioni del modus ponens segue che da $t'=t''$ si deduce $Pt_1(x/t')\dots t_n(x/t') \rightarrow Pt_1(x/t'')\dots t_n(x/t'')$ che è $\varphi(x/t') \rightarrow \varphi(x/t'')$.

Il passo dell'induzione, nei vari casi, si prova controllando che dall'ipotesi induttiva segue immediatamente la conclusione per mezzo di una facile applicazione del teorema di sostituzione di sottoformule equideducibili.

E' immediato che se $\Phi \vdash \alpha$ allora l'insieme $\Phi \cup \{\neg\alpha\}$ è non soddisfacibile perché da $\Phi \cup \{\neg\alpha\}$ si possono dedurre sia α che $\neg\alpha$, che devono essere entrambe conseguenze logiche di $\Phi \cup \{\neg\alpha\}$ per il teorema di validità, e ciò può essere solo se $\Phi \cup \{\neg\alpha\}$ è non soddisfacibile.

Si è pervenuti alla non soddisfacibilità di un insieme nel caso che da questo si possano dedurre sia una formula che la sua negazione.

Questa nozione diventa importante, perché potrebbe divenire una nuova caratterizzazione sintattica della non soddisfacibilità, e così le si dà un nome.

Si dirà **non consistente** un insieme di formule da cui si possano dedurre sia una formula che la sua negazione. **Consistente** sarà detto un insieme di formule che non è non consistente.

Generalizzando quando detto nel caso particolare, dal teorema di validità segue

Corollario di validità. Un insieme non consistente non è soddisfacibile.

Gli insiemi di formule non consistenti sono caratterizzati dal fatto che da essi si può dedurre ogni formula. Ciò è precisato nel seguente

Teorema. L'insieme di formule Φ è non consistente se e solo se per ogni formula α si ha che $\Phi \vdash \alpha$.

DIMOSTRAZIONE. In una direzione è banale: se da Φ si può dedurre qualsiasi formula, in particolare si potrà dedurre una certa formula e che la sua negazione.

Per l'altra direzione, si supponga che ci sia una formula β tale che $\Phi \vdash \beta$ ed anche $\Phi \vdash \neg\beta$. Poiché per il teorema di deduzione e per transitività di \vdash , (ripetendo quanto si è già visto nella dimostrazione che *ex falso sequitur quodlibet*) dai due assiomi di tipo 1 $\beta \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta)$ e $\neg\beta \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \neg\beta)$ segue che $\Phi \vdash \neg\alpha \rightarrow \beta$ ed anche $\Phi \vdash \neg\alpha \rightarrow \neg\beta$, applicando due volte il modus ponens all'assioma di tipo 3 $(\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \alpha)$, prima con $\neg\alpha \rightarrow \beta$ e poi a quello che resta con $\neg\alpha \rightarrow \neg\beta$, si perviene ad α che è così dedotta da Φ .

Il legame tra non consistenza e deducibilità è molto stretto come è indicato dal seguente

Teorema. $\Phi \vdash \alpha$ se e solo se $\Phi \cup \{\neg\alpha\}$ è non consistente.

DIMOSTRAZIONE. La direzione da sinistra a destra è già stata mostrata nell'ottenere che, nella stessa ipotesi, $\Phi \cup \{\neg\alpha\}$ è non soddisfacibile.

Per mostrare l'altra direzione si osservi che l'ipotesi afferma che, per qualche formula β , $\Phi \cup \{\neg\alpha\} \vdash \beta$ e $\Phi \cup \{\neg\alpha\} \vdash \neg\beta$. Ma si vorrebbe arrivare a dedurre qualcosa da Φ , cioè si vogliono ridurre le premesse, e per far ciò si dispone proprio del teorema di deduzione. In base a questo le ipotesi divengono $\Phi \vdash \neg\alpha \rightarrow \beta$ e $\Phi \vdash \neg\alpha \rightarrow \neg\beta$. Si può allora costruire una nuova deduzione da Φ facendo seguire alle due deduzioni indicate l'assioma 3 $(\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \alpha)$ e poi la formula $(\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \alpha$ ottenuta per modus ponens dalla precedente e dalla conclusione della prima deduzione inserita in questa, ed infine la formula α ottenuta per modus ponens dalla precedente formula e dalla conclusione della seconda deduzione che è inserita in questa.

Questo teorema può anche essere usato per mostrare l'esistenza di certe deduzioni. Ad esempio, si vuol mostrare che $\{\alpha, \beta\} \vdash \neg\neg\alpha\beta$, che è una abbreviazione di $\{\alpha, \beta\} \vdash \neg(\alpha \rightarrow \neg\beta)$. Per il teorema appena dimostrato ciò è equivalente a mostrare che $\{\alpha, \beta, \alpha \rightarrow \neg\beta\}$ è non consistente, e questo è corretto perché da α e $\alpha \rightarrow \neg\beta$ si ottiene $\neg\beta$, per modus ponens, sicché da $\{\alpha, \beta, \alpha \rightarrow \neg\beta\}$ si deducono sia la formula β che la sua negazione $\neg\beta$.

38. LA COMPLETEZZA DEL CALCOLO PREDICATIVO.

Si è visto che i teoremi, cioè le formule dimostrabili, sono valide, e che le formule deducibili da un insieme di formule sono conseguenze logiche di quell'insieme di formule, gli insiemi di formule non consistenti sono non soddisfacibili. Tutti questi risultati, che sono stati ricapitolati nel teorema di validità, seguono dal fatto che il modus ponens preserva la verità in una realizzazione, e che assiomi e premesse sono vere nelle realizzazioni che rendono vere le premesse. Inoltre detti risultati mostrano che il controllo sintattico basato sulle deduzioni porta a risultati corretti, ma sarebbe bello, e questo era l'obiettivo nell'architettare questo metodo ed in particolare nel determinare gli assiomi, che fosse anche completo, cioè che ogni formula valida fosse un teorema, che ogni conseguenza logica di un insieme di formule fosse deducibile da quell'insieme, che ogni insieme non soddisfacibile fosse non consistente, brevemente che per i risultati del teorema di validità valesse un se e solo se.

Si era già notato a suo tempo come, da un punto di vista semantico, la validità, la conseguenza logica e la non soddisfacibilità fossero strettamente legate e si potesse determinare una di queste nozioni facendo ricorso ad un'altra ($\models \alpha$ se e solo se $\emptyset \models \alpha$, $\Phi \cup \{\alpha\} \models \beta$ se e solo se $\Phi \models \alpha \rightarrow \beta$, $\Phi \models \alpha$ se e solo se $\Phi \cup \{\neg\alpha\}$ è non soddisfacibile).

Ma si è anche visto che valgono i corrispondenti legami tra le nozioni sintattiche collegate a quelle semantiche menzionate ($\neg\alpha$ se e solo se $\emptyset \vdash \neg\alpha$, $\Phi \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ se e solo se $\Phi \vdash \alpha \rightarrow \beta$, $\Phi \vdash \neg\alpha$ se e solo se $\Phi \cup \{\neg\alpha\}$ è non consistente).

Così per giungere alla completezza dei rapporti tra le nozioni semantiche e quelle sintattiche collegate basta stabilirla per una di queste nozioni che immediatamente si estende alle altre visti i legami sopra ricordati. Di fatto si cercherà di mostrare che se un insieme di formule è non soddisfacibile allora è non consistente.

Questa affermazione sarà studiata nella forma contronominale, e cioè si cercherà di mostrare che un insieme consistente è soddisfacibile. Il motivo di questa scelta è che esse richiede di costruire una realizzazione che renda vere tutte le formule di un insieme consistente, mentre negli altri casi si dovrebbero analizzare tutte le realizzazioni, eventualmente tutte le realizzazioni di una certa famiglia, e questo compito appare ancora più difficile di quello già complesso di costruire un'opportuna realizzazione.

Fatta questa scelta, si deve cercare di analizzare quali sono le difficoltà che comporta. Un insieme consistente di formule, non permettendo di dedurre una formula e la sua negazione, potrebbe essere soddisfacibile, ma le realizzazioni in cui le sue formule sono vere potrebbero anche essere molte. Questa molteplicità può costituire una difficoltà perché non permette di individuare una singola realizzazione dalla quale partire per mostrare che essa rende vere tutte le formule dell'insieme, come richiesto. Allora si può pensare di aggiungere all'insieme consistente di formule delle altre formule che rendano l'insieme arricchito ancora consistente, ma che determinino meglio quale deve essere la realizzazione in cui sono vere.

Portando questa idea alle estreme conseguenze, si vogliono considerare insiemi consistenti di formule così ricchi che non si può più aggiungere alcuna ulteriore formula senza perdere la consistenza. Ciò può essere precisato nella seguente definizione.

Un insieme di formule è detto **massimale consistente** se è consistente e non è contenuto propriamente in alcun insieme consistente di formule.

Anzitutto è opportuno caratterizzare gli insiemi massimali consistenti. A tale scopo è rilevante il seguente

Teorema. Un insieme di formule è massimale consistente se e solo se è consistente e, per ogni formula, o lei o la sua negazione appartiene all'insieme.

DIMOSTRAZIONE. Si affronti dapprima la direzione più facile da destra a sinistra. Si supponga così di avere un insieme Φ consistente di formule tale che per ogni formula o lei o la sua negazione appartiene all'insieme. Sia Φ' un insieme che contiene propriamente Φ , e sia α una formula di $\Phi' - \Phi$. Per la proprietà di Φ , in esso dovrà essere presente la negazione di α , $\neg\alpha$, che sarà anche in Φ' . Così Φ' è non consistente. Per l'arbitrarietà di Φ' questa direzione è dimostrata.

Per mostrare l'altra direzione, si supponga, per assurdo, che ci sia una formula α tale che né lei né la sua negazione appartengono a un insieme massimale consistente Φ . Allora per la massimalità della consistenza di Φ , gli insiemi $\Phi \cup \{\alpha\}$ e $\Phi \cup \{\neg\alpha\}$ sono non consistenti, sicché per quanto visto, si ha che $\Phi \vdash \neg\neg\alpha$ e che $\Phi \vdash \neg\alpha$. Da ciò segue che Φ è non consistente, contro l'ipotesi, e l'assurdo prova l'affermazione.

Corollario. Se una formula si deduce da un insieme massimale consistente, allora gli appartiene.

DIMOSTRAZIONE. Infatti, per il teorema appena dimostrato, o la formula α o la sua negazione $\neg\alpha$ appartiene all'insieme massimale consistente Φ . Se fosse $\neg\alpha$, la negazione della formula, ad appartenere all'insieme, allora sia questa che, per ipotesi, la formula

α di partenza sarebbero deducibili dall'insieme Φ (sia $\Phi \vdash \alpha$ che $\Phi \vdash \neg\alpha$), e Φ sarebbe non consistente. Pertanto la formula α appartiene a Φ .

Si noti che il teorema precedente mette bene in luce il fatto che la nozione di massimale consistenza è relativo al linguaggio che si considera. Infatti arricchendo il linguaggio un insieme che era massimale consistente rimane consistente, ma non è più massimale consistente perché nel linguaggio più ricco ci sono altre formule tali che né loro né le loro negazioni appartengono all'insieme.

Si erano introdotti gli insiemi massimali consistenti nel tentativo di precisare al massimo una eventuale interpretazione che renda vere tutte le formule dell'insieme dato.

Si era già visto che insiemi di formule che hanno certe caratteristiche (essere insieme di Hintikka) sono soddisfacibili. Se un insieme massimale consistente fosse un insieme di Hintikka, allora sarebbe soddisfacibile, e si resterebbe con il solo problema di estendere un insieme consistente ad un insieme massimale consistente. Ma le cose non vanno esattamente così come afferma il seguente

Teorema. Un insieme massimale consistente di formule è quasi un insieme di Hintikka, nel senso che soddisfa tutte le clausole di un insieme di Hintikka eccetto quella che riguarda le formule del tipo $\neg\forall$.

DIMOSTRAZIONE. Per provare questo teorema si dovranno controllare, una per una, le varie clausole della definizione di insieme di Hintikka.

La prima chiede che nell'insieme non ci siano una formula e la sua negazione. Per un insieme consistente, ed in particolare massimale consistente, deve essere evidentemente così.

Poi se una formula del tipo $\neg\neg\alpha$ appartiene all'insieme deve appartenervi anche la formula α . Ma si è visto che da $\neg\neg\alpha$ si deduce α , e che le formule che si deducono da un insieme massimale consistente gli appartengono. Così anche α appartiene all'insieme.

Ancora se una formula del tipo $\wedge\alpha\beta$ appartiene all'insieme allora anche le formule α e β devono appartenere all'insieme. In questo caso l'argomentazione è del tutto analoga alla precedente poiché si è già visto che $\wedge\alpha\beta \vdash \alpha$ e che $\wedge\alpha\beta \vdash \beta$.

Se poi una formula del tipo $\neg\wedge\alpha\beta$ appartiene all'insieme allora almeno una delle due formule $\neg\alpha$ o $\neg\beta$ devono appartenervi. Se nessuna delle due appartenesse, poiché l'insieme è massimale consistente, dovrebbero appartenervi entrambe le loro negazioni $\neg\neg\alpha$ e $\neg\neg\beta$, sicché l'insieme $\{\neg\wedge\alpha\beta, \neg\neg\alpha, \neg\neg\beta\}$ sarebbe un sottinsieme dell'insieme massimale consistente dato. Ma ciò è impossibile perché l'insieme $\{\neg\wedge\alpha\beta, \neg\neg\alpha, \neg\neg\beta\}$ è non consistente in quanto da $\neg\neg\alpha$ e $\neg\neg\beta$ si possono dedurre rispettivamente α e β e da queste si deduce $\wedge\alpha\beta$, come si è visto alla fine della sezione precedente.

Si deve far anche vedere che se una formula del tipo $\forall x\alpha$ appartiene all'insieme allora, per ogni termine t , la formula $\alpha(x/t)$ appartiene all'insieme. Di fatto, se la formula $\forall x\alpha$ appartiene all'insieme allora applicando il modus ponens a quella formula e all' $Ax. 6$. da quell'insieme si deduce $\alpha(x/t)$ per il termine t voluto. Ancora, poiché ciò che si deduce da un insieme massimale consistente appartiene all'insieme, anche $\alpha(x/t)$ appartiene all'insieme.

Non si deve considerare la clausola che riguarda le formule del tipo $\neg\forall$ poiché è stata esclusa nell'enunciare questo teorema.

Ovviamente le formule del tipo $\Rightarrow t$ appartengono ad un insieme massimale consistente in quanto sono dimostrabili e dunque anche deducibili dall'insieme.

Infine si consideri il caso in cui la formula $\neg t=t$ appartenga all'insieme massimale consistente ed anche la formula $\alpha(x/t)$ vi appartenga. Il secondo teorema di sostituzione, grazie al teorema di deduzione, può essere letto anche nel seguente modo: $\{t=t, \alpha(x/t)\} \vdash \alpha(x/t/t)$. Così la formula $\alpha(x/t/t)$ sarà deducibile dall'insieme massimale consistente e, dunque, anche gli apparterrà, e ciò è quanto richiede l'ultima clausola della definizione di insieme di Hintikka.

Il fatto che non si è riusciti a mostrare che un insieme massimale consistente è un insieme di Hintikka, non dipende da una scarsa conoscenza al momento, ma dipende dall'impossibilità di raggiungere un risultato migliore, come il seguente esempio può giustificare. In questo esempio si costruirà un insieme massimale consistente che non è un insieme di Hintikka.

Si consideri una struttura il cui universo è formato da esattamente due elementi, a e b , con la sola relazione di uguaglianza, senza funzioni e senza costanti, $\mathcal{A} = (\{a, b\}, \{=\}, \emptyset, \emptyset)$. Fissata l'attribuzione di valori alle variabili \underline{a} che ad ogni variabile assegna l'elemento a , $\underline{a}(v_i) = a$, si consideri la realizzazione $\sigma = (\mathcal{A}, \underline{a})$. Infine si consideri il seguente insieme Σ di formule $\{\varphi: \varphi^\sigma = V\}$. Σ è consistente perché se non lo fosse dovrebbe anche essere non soddisfacibile, per il teorema di validità, ma invece le sue formule sono tutte vere nella realizzazione σ , sicché è soddisfacibile. Inoltre Σ è massimale consistente perché per ogni formula o lei o la sua negazione appartengono a Σ dal momento che o l'una o l'altra è vera nella realizzazione σ . Per mostrare che Σ non è un insieme di Hintikka, si consideri la formula $\neg \forall v_0 = v_0 v_1$. Questa è vera nella realizzazione σ dal momento che σ interpreta v_1 in a ma esiste un altro elemento diverso da a . Così questa formula appartiene all'insieme Σ . Se Σ fosse un insieme di Hintikka, allora ci dovrebbe essere un termine t tale che anche la formula $\neg =tv_1$ appartenga a Σ . Ma nel linguaggio adatto a questa struttura i soli termini sono le variabili e σ interpreta ogni variabile in a , sicché $(\neg =tv_1)^\sigma = F$ e, per ogni termine t , $\neg =tv_1$ non appartiene a Σ . Così Σ non è un insieme di Hintikka.

Ci si può domandare qual'è la causa di questo ostacolo, e si vede immediatamente che, per ogni termine t , la formula $\neg =tv_1$ non appartiene a Σ perché non c'è alcun termine che possa essere interpretato nell'elemento b . Ecco allora l'idea, già sfruttata precedentemente proprio per trovare nomi per elementi di cui si asserisce l'esistenza, di arricchire il linguaggio con un numero sufficiente di nuovi simboli di costante da interpretare opportunamente.

Dalle osservazioni sviluppate si vede che, per mostrare che un insieme consistente è soddisfacibile sfruttando la soddisfacibilità degli insiemi di Hintikka, non basta trovare un insieme massimale consistente che lo contenga, ma ci vuole qualcosa di più.

Si chiama **insieme di Henkin** un insieme di formule di un linguaggio \mathcal{L} che sia massimale consistente e che abbia la seguente ulteriore proprietà: per ogni formula del tipo $\neg \forall x \alpha$ dell'insieme esiste un termine t nel linguaggio \mathcal{L} tale che la formula $\neg \alpha(x/t)$ appartenga all'insieme.

E' immediato dal risultato precedente e dalla definizione che un insieme di Henkin è un insieme di Hintikka, ed è, quindi, soddisfacibile.

Così, tornando al problema di mostrare che un insieme consistente è soddisfacibile, basterebbe mostrare che esiste un insieme di Henkin, in un linguaggio opportunamente arricchito, che lo contiene. Ciò è quando si vuole ora far vedere.

Anzitutto si deve ricordare che il numero di formule di un linguaggio \mathcal{L} , e di conseguenza anche il numero delle formule del tipo $\neg\forall x\alpha$, è uguale alla cardinalità del linguaggio \mathcal{L} . Ciò ci suggerisce che dovrebbe essere sufficiente passare ad un linguaggio \mathcal{L}' ottenuto arricchendo il linguaggio \mathcal{L} con un insieme C di nuovi simboli di costante di cardinalità uguale alla cardinalità di \mathcal{L} . La cardinalità del linguaggio \mathcal{L}' è uguale alla cardinalità del linguaggio \mathcal{L} .

Poi si vuole mostrare il seguente

Teorema per la completezza. Sia Φ un insieme consistente in un linguaggio \mathcal{L} . Sia \mathcal{L}' un linguaggio ottenuto aggiungendo al linguaggio \mathcal{L} un insieme C di nuovi simboli di costante di cardinalità uguale a quella di \mathcal{L} . Allora esiste un insieme di formule Ψ del linguaggio \mathcal{L}' che è un insieme di Henkin e che contiene Φ .

DIMOSTRAZIONE. Nelle argomentazioni seguenti si farà ricorso ai numeri ordinali per mostrare il risultato a partire da un linguaggio \mathcal{L} di cardinalità qualsiasi. Se invece il linguaggio \mathcal{L} fosse numerabile, allora sono sufficienti i numeri naturali che sono un tratto iniziale dei numeri ordinali. Non si introdurrà qui la nozione di numero ordinale, ma si farà riferimento ai manuali nei quali è ampiamente svolta. Si aprirà una parentesi per ricordare solo alcuni aspetti dei numeri ordinali particolarmente rilevanti in questo contesto.

I numeri ordinali vogliono rappresentare i tipi di buon ordine di insiemi anche infiniti (un insieme è bene ordinato se c'è una relazione binaria su di esso che è un ordine tale che ogni sottoinsieme ha elemento minimo). Per gli insiemi finiti i numeri naturali già svolgono egregiamente questa funzione, sicché i numeri ordinali estenderanno i naturali avendo questi come loro tratto iniziale. L'importanza di rappresentare i tipi di buon ordine di insiemi infiniti segue dal fatto che così si possono, in un certo senso, individuare i singoli elementi di un insieme infinito, e ciò è reso possibile dall'accettazione dell'assioma della scelta: infatti esso è equivalente al principio del buon ordinamento per cui ogni insieme di qualsiasi cardinalità può essere bene ordinato. Ovviamente, se l'insieme è più che numerabile, il suo tipo di buon ordine non può essere rappresentato con i numeri naturali. Anche per le classi di buoni ordini tra loro isomorfi, come per le classi di equinumerosità, si presenta il problema che queste classi sono proprie (eccetto la classe contenente il buon ordinamento sull'insieme vuoto) e dunque inutili per costruire un loro calcolo non potendo essere considerate elementi pena contraddizioni. Così anche per le classi di buoni ordini tra loro isomorfi si ricorre a scegliere all'interno di ciascuna classe un elemento tipico e con questo poi si svolgerà il calcolo. La scelta dell'elemento tipico nel caso di buoni ordini finiti è proprio il numero naturale (visto insiemisticamente come ordinale) che conta gli elementi dell'insieme. Se invece l'insieme è infinito si può continuare a scegliere come rappresentante di una classe un elemento che mantenga i criteri che avevano portato a scegliere i rappresentanti per i buoni ordini finiti. Così la relazione d'ordine tra gli elementi del buon ordine da scegliersi come rappresentante di una classe sarà l'appartenenza e ogni ordinale avrà per elementi gli ordinali che lo precedono. In tal modo si arriva a definire un ordinale come un insieme bene ordinato dall'appartenenza e transitivo rispetto alla stessa relazione.

Il più piccolo ordinale infinito è l'insieme dei naturali, poiché questo insieme è bene ordinato dall'appartenenza e transitivo per essa, e i suoi predecessori, che sono i suoi elementi, rappresentano solo buoni ordini finiti. Se all'insieme dei naturali si aggiunge il singolo elemento che è l'insieme dei naturali e lo si considera come successivo a tutti i numeri naturali, si trova un ulteriore insieme bene ordinato dall'appartenenza e transitivo, e pertanto un nuovo ordinale, che non è ordine isomorfo all'insieme dei numeri naturali, pur essendo equinumeroso allo stesso. Più in generale, partendo da un qualsiasi ordinale, si può considerare l'insieme dei suoi elementi a cui si può aggiungere, come ultimo, l'elemento che è l'insieme (l'ordinale) stesso. L'insieme che si ottiene è ancora bene ordinato dall'appartenenza e transitivo, e quindi è un ordinale, che non è isomorfo all'ordinale di partenza, ma è il più piccolo che lo con-

tenga come tratto iniziale essendo stato aggiunto un solo elemento: così è naturale chiamare l'ordinale ottenuto l'immediato successore di quello di partenza. Si noti una importante differenza tra i numeri naturali e gli ordinali: mentre due naturali ordinali diversi hanno diverse cardinalità, ci sono ordinali diversi che hanno la stessa cardinalità. Detto altrimenti, il contare gli elementi di un insieme finito in un modo o nell'altro porta a buoni ordinamenti tra loro isomorfi, mentre la stessa cosa non vale per insiemi infiniti, anzi gli insiemi infiniti potrebbero essere proprio caratterizzati dalla mancanza di questa proprietà, cioè dalla proprietà che uno stesso insieme infinito può essere bene ordinato in modi diversi tra loro non isomorfi.

Come si è detto, ogni ordinale, alla stessa stregua di ogni naturale, ha un successore immediato. Invece, mentre ogni naturale diverso da zero ha un predecessore immediato, ci sono ordinali diversi da zero che non hanno predecessore immediato. Un esempio è l'insieme dei naturali, che si è detto essere un ordinale e che si indica con ω ; esso è preceduto solo da numeri naturali senza che nessuno di questi sia un predecessore immediato. L'ordinale ω non è l'unico con questa caratteristica: si parta da un qualsiasi ordinale e si ripeta indefinitamente l'operazione di passaggio all'immediato successore, si otterranno tanti nuovi ordinali sempre maggiori, ma sempre equinumerosi a quello di partenza; si consideri l'insieme di tutti gli ordinali minori di quelli ora indicati: questo insieme è bene ordinato dall'appartenenza e transitivo, dunque è un ordinale maggiore di quelli che gli appartengono, ma nessuno di questi è suo predecessore immediato. I numeri ordinali diversi da zero che non hanno predecessore immediato sono detti **ordinali limite**. Si può pensare che la costruzione degli ordinali sia realizzata nel modo seguente. Si parte da zero e si passa al successore indefinitamente, dopo essere andati avanti indefinitamente ed aver ottenuto tutta questa successione infinita di nuovi numeri si considera il loro insieme, che è ancora un ordinale e si riprende a passare al successore indefinitamente, e si ripete il considerare l'insieme degli elementi a cui si è arrivati passando al successore immediato indefinitamente, per poi riprendere a considerare, indefinitamente, i successori immediati di quanto si è ottenuto. Quanto è lungo questo ripetersi? In modo impercibile, poiché, finché si riesce a tener traccia delle ripetizioni attraverso cui si è passati, si rimane a insiemi numerabili, mentre ci sono buoni ordini anche di insiemi non numerabili, sempre a causa del principio del buon ordinamento. Nella visione presentata degli ordinali si inserisce il principio d'induzione e la definizione per induzione, con la differenza, rispetto ai naturali, che ora si devono considerare due tipi di passaggi generativi degli ordinali, e precisamente il passaggio al successore immediato (come già si faceva per i naturali) ed in più (cosa che non ha corrispondente tra i naturali), dopo aver eseguito il primo tipo di costruzione indefinitamente, il collezionare in un nuovo insieme tutto ciò che è stato fatto. Pur essendo questa presentazione degli ordinali solo una traccia lontana dall'essere esaustiva e senza le dovute argomentazioni delle affermazioni fatte, nel rinviare a un qualsiasi manuale sul tema, si ritiene che siano stati ricordati gli aspetti essenziali che servono per le utilizzazioni che seguiranno.

Riprendiamo ora la dimostrazione del teorema per la completezza. L'idea è di considerare una alla volta le formule del linguaggio \mathcal{L} e vedere se possono essere via via aggiunte all'insieme consistente di formule dato inizialmente in modo di arrivare possibilmente ad un insieme di Henkin, cioè ad un insieme massimale consistente tale che, per ogni formula del tipo $\neg\forall x\alpha$ che sia nell'insieme, nello stesso ci deve essere anche la formula $\neg\alpha(x/t)$ per un opportuno termine t , che sarà uno dei nuovi simboli di costante aggiunti. Se il linguaggio \mathcal{L} è numerabile lo sarà anche \mathcal{L}' e tutte le formule possono essere messe in corrispondenza con i numeri naturali, e l'insieme delle formule potrà essere considerato come l'insieme $\{\varphi_i: i \in \mathbb{N}\}$, ovvero come l'insieme $\{\varphi_i: i \in \omega\}$ dove ω indica l'ordinale dell'insieme dei numeri naturali. Se il linguaggio è più che numerabile, sia di cardinalità l'ordinale λ , si farà ricorso ad un buon ordinamento delle formule, che esiste per l'assioma della scelta, e l'insieme delle formule potrà ora essere considerato come l'insieme $\{\varphi_\xi: \xi \in \lambda\}$, dove ξ indica un ordinale.

Volendo considerare per una possibile aggiunta una formula alla volta, si costruirà una successione di insiemi di formule $\Phi = \Phi_0, \dots, \Phi_\xi, \dots$ con $\xi \in \lambda$, che dovranno avere le seguenti caratteristiche: 1) ognuno deve essere consistente, 2) ognuno deve contenere i precedenti, e 3) il numero di nuovi simboli di costante in ciascuno degli insiemi dovrà essere finito o minore o uguale alla cardinalità dell'indice dell'insieme.

Come per i naturali, anche per gli ordinali vale la definizione per induzione, solo che ora, oltre la base, ci saranno due casi da considerare, e precisamente il caso in cui un numero è successore immediato di un altro (come avviene per i naturali diversi da 0), e il caso in cui un numero ordinale, pur non essendo 0, non è un successore immediato di alcun ordinale, ma è un ordinale limite (caso che non si presenta per i numeri naturali).

Ecco ora come costruire una successione di insiemi di formule che abbia le caratteristiche prescritte e che possibilmente porti al risultato cercato.

Come già indicato, si sceglie per primo insieme (0-esimo) della successione proprio l'insieme consistente che si vuol mostrare essere soddisfacibile.

Si supponga ora che ξ sia un ordinale limite (questo caso non va considerato se il linguaggio \mathcal{L} è numerabile) e che siano già stati definiti gli insiemi Φ_η per $\eta \in \xi$, ciascuno con le caratteristiche richieste. Si definisce $\Phi_\xi = \cup \{ \Phi_\eta : \eta \in \xi \}$. Bisogna mostrare che l'insieme così definito soddisfa ancora le tre proprietà richieste. E' banale controllare che verifica la 2) essendo l'unione degli insiemi precedenti, sicché conterrà ciascuno di essi. La 3) segue dalle proprietà dell'aritmetica ordinale e cardinale: per ogni $\eta \in \xi$ le costanti in Φ_η sono in numero finito o minore od uguale alla cardinalità di η , che è minore od uguale alla cardinalità di ξ , e una unione di ξ insiemi, ciascuno con al più tanti elementi quant'è la cardinalità di ξ , non può avere una cardinalità maggiore della cardinalità di ξ . Rimane da verificare la 1) e per assurdo si supponga che Φ_ξ sia non consistente. Allora ci sono, a partire da Φ_ξ , una deduzione di una formula e una deduzione della sua negazione. In queste deduzioni occorrono un numero finito di formule di Φ_ξ , ognuna in un insieme della successione, Φ_{η_i} , la cui unione è Φ_ξ , ma questi insiemi Φ_{η_i} sono in numero finito e uno contenuto nell'altro; così ce ne sarà uno, Φ_μ , che contiene tutti gli altri e contiene tutte le premesse da cui si erano ottenute le due deduzioni una di una formula e l'altra della sua negazione: così anche Φ_μ sarebbe non consistente, contro l'ipotesi induttiva.

Ora si deve considerare il caso in cui ξ è un ordinale successore, ovvero $\xi = \nu + 1$. Per definire $\Phi_{\nu+1}$ a partire da Φ_ν , che si suppone già ottenuto per induzione con le caratteristiche volute, si considererà la ν -esima formula della successione iniziale delle formule del linguaggio \mathcal{L} . Bisognerà considerare alcuni casi. In primo luogo può darsi che l'insieme $\Phi_\nu \cup \{ \varphi_\nu \}$ sia non consistente: in tal caso per $\Phi_{\nu+1}$ si prende l'insieme Φ_ν stesso. In questo caso $\Phi_{\nu+1}$ rispetta tutte le caratteristiche richieste agli insiemi della successione perché Φ_ν le rispettava. Se invece l'insieme $\Phi_\nu \cup \{ \varphi_\nu \}$ è consistente, allora si distinguono ancora due sottocasi: il primo quando φ_ν non è del tipo $\neg \forall x \alpha$, il secondo quando è di quel tipo. Nel primo sottocaso, per $\Phi_{\nu+1}$ si prende $\Phi_\nu \cup \{ \varphi_\nu \}$. Chiaramente questo insieme è consistente, contiene i precedenti, e ha solo un numero finito di ulteriori nuovi simboli per costante (quelli occorrenti eventualmente in φ_ν), sicché rispetta tutte le caratteristiche richieste per gli insiemi della successione. Rimane solo l'altro sottocaso: se φ_ν è del tipo $\neg \forall x \alpha$, per $\Phi_{\nu+1}$ si prende $\Phi_\nu \cup \{ \varphi_\nu \} \cup \{ \neg \alpha(x/c) \}$ con c simbolo di costante di C non occorrente in $\Phi_\nu \cup \{ \varphi_\nu \}$ (tale c esiste perché la cardinalità di C è λ mentre i simboli per costante già usati sono in numero finito o al più una quantità di cardinalità minore od uguale alla cardinalità di ν che è strettamente minore di λ). Ancora si deve far vedere che l'insieme così definito ha tutte le caratteristiche previste. Per come è definito, ovviamente contiene i precedenti e il numero dei nuovi simboli di costante è aumentato di una quantità finita: così la 2) e la 3) sono soddisfatte. Per completare il controllo di tutte le condizioni che devono soddisfare gli elementi della successione dei Φ_ξ , resta solo da mostrare che $\Phi_\nu \cup \{ \varphi_\nu \} \cup \{ \neg \alpha(x/c) \}$ è consi-

te, sapendo che $\Phi_{\nu} \cup \{\varphi_{\nu}\}$ lo è perché si sta considerando proprio questa situazione. Se, per assurdo, $\Phi_{\nu} \cup \{\varphi_{\nu}\} \cup \{\neg\alpha(x/c)\}$ non fosse consistente, allora, per quanto si è visto, si avrebbe che $\Phi_{\nu} \cup \{\varphi_{\nu}\} \vdash \alpha(x/c)$; ma il simbolo di costante c non occorre nelle premesse e, per il teorema di generalizzazione sui simboli di costante, si avrebbe anche che $\Phi_{\nu} \cup \{\varphi_{\nu}\} \vdash \forall x\alpha$: impossibile perché φ_{ν} è $\neg\forall x\alpha$ e $\Phi_{\nu} \cup \{\varphi_{\nu}\}$ è consistente.

Così si è completata la definizione della successione degli insiemi Φ_{ξ} per ogni $\xi \in \lambda$.

Ora si può definire l'insieme Ψ e si prende $\Psi = \cup \{\Phi_{\xi} : \xi \in \lambda\}$. Evidentemente $\Psi \supset \Phi$. Per concludere il teorema basta mostrare che quanto si è fatto raggiunge proprio lo scopo per cui è stato fatto, e cioè che Ψ è un insieme di Henkin, mostrando in successione che è consistente, che è massimale consistente, e che soddisfa l'ulteriore proprietà per essere un insieme di Henkin.

Che Ψ sia un insieme consistente, sia nel caso che il linguaggio sia numerabile sia non numerabile, si mostra nello stesso modo in cui si è mostrata la consistenza di Φ_{ξ} , con ξ limite.

Per la massimale consistenza, si deve far vedere che, per ogni insieme Δ di formule di \mathcal{L}' che contiene propriamente Ψ non è consistente. Sia α una formula in $\Delta - \Psi$. α essendo una delle formule di \mathcal{L}' sarà ad un certo punto nel buon ordinamento di tali formule, α sia φ_l . Allora $\Phi_l \cup \{\varphi_l\}$ deve essere non consistente altrimenti φ_l appartenerebbe a Φ_{l+1} e a Ψ . Poiché Δ contiene $\Phi_l \cup \{\varphi_l\}$, anche Δ è non consistente. Così Ψ è massimale consistente.

Finalmente si supponga che la formula $\neg\forall x\alpha$ appartenga a Ψ . Anche la formula $\neg\forall x\alpha$ sarà ad un certo punto nel buon ordinamento delle formule di \mathcal{L}' , $\neg\forall x\alpha$ sia φ_l . Allora $\Phi_l \cup \{\varphi_l\}$ deve essere consistente altrimenti $\neg\forall x\alpha$ non appartenerebbe a Φ_{l+1} e neppure a Ψ . Ma allora, per definizione di Φ_{l+1} , anche $\neg\alpha(x/c)$ gli appartiene e dunque appartiene pure a Ψ , sicché Ψ è proprio un insieme di Henkin, come volevasi mostrare.

Ora che si è mostrato che ogni insieme consistente di formule in un linguaggio \mathcal{L} è contenuto in un insieme di Henkin in un linguaggio \mathcal{L}' che contiene \mathcal{L} , si può concludere che un insieme consistente è soddisfacibile, poiché lo è l'insieme di Henkin che lo contiene. Si possono così riassumere i risultati ottenuti enunciando il seguente

Teorema di completezza per il calcolo predicativo. (prima formulazione) Un insieme di formule è soddisfacibile se e solo se è consistente.

Ricordando i legami più volte richiamati tra non soddisfacibilità e conseguenza logica, e tra non consistenza e deducibilità si può riformulare il precedente teorema nel seguente

Teorema di completezza per il calcolo predicativo. (seconda formulazione). Una formula è conseguenza logica di un insieme di formule se e solo se si deduce da quello.

Ovviamente lo stesso risultato si ottiene anche quando l'insieme di formule è costituito da una sola formula: in tal caso la sua non soddisfacibilità equivale alla validità della sua negazione, mentre la sua non consistenza equivale alla dimostrabilità della sua negazione. Questo caso particolare può essere ricordato nel seguente

Teorema debole di completezza. Una formula è valida se e solo se è dimostrabile.

Dal teorema di compattezza sintattico per il calcolo predicativo e dal teorema di completezza appena enunciato segue una ulteriore dimostrazione del teorema di compattezza semantico che afferma che un insieme di formule è non soddisfacibile se e solo se c'è un suo sottinsieme finito che è non soddisfacibile. Infatti, per il teorema di completezza, un insieme di formule è non soddisfacibile se e solo se è non consistente; ma, per il teorema di compattezza sintattico per il calcolo predicativo, ciò è vero se e solo se c'è un suo sottinsieme finito (eventualmente quello costituito dalle premesse delle dimostrazioni, una che si conclude con una formula e l'altra che si conclude con la sua negazione) che è non consistente, e questo sottinsieme finito deve essere non soddisfacibile, sempre per il teorema di completezza.

Si osservi che anche il controllo sintattico basato sul metodo della deduzione con la regola del modus ponens a partire dagli assiomi precisati (calcolo predicativo) è

- 1) adatto a linguaggi di qualsiasi cardinalità,
- 2) completo nel senso della completa corrispondenza tra le nozioni semantiche e le loro caratterizzazioni sintattiche,
- 3) non categorico nel senso che nessuna teoria consistente con modelli infiniti è in grado di individuare i suoi modelli a meno di isomorfismi (a causa del teorema di compattezza),
- 4) semidecidibile, cioè se un insieme di formule è non consistente il controllo sintattico porta a mostrare che non è consistente dopo un numero finito di passi (in quantità non precedentemente prevedibile), mentre se l'insieme di formule è soddisfacibile il controllo sintattico di questa situazione si protrarrà indefinitamente dovendo verificare che non si giungerà mai a dedurre sia una formula che la sua negazione.

Sostanzialmente si è pervenuti al calcolo predicativo che è un controllo sintattico con le stesse caratteristiche di quello realizzato inizialmente con gli alberi di confutazione a blocchi. Più avanti si cercherà di affrontare il problema della ricerca di un calcolo sintattico migliore dal punto di vista della decidibilità del metodo: pur sapendo che da un punto di vista generale non si possono ottenere risultati migliori a causa del teorema di Church (strettamente legato al teorema di incompletezza di Gödel, risultati che vanno ben oltre il traguardo che si prefiggono queste note) che afferma che l'insieme delle formule valide non è decidibile, le ulteriori indagini sono rivolte ad individuare casi specifici e utili in cui i risultati possono essere migliorati.

Dal punto di vista delle richieste di principi fondazionali generali per poter sviluppare le argomentazioni la situazione dei due approcci (analisi della soddisfacibilità a blocchi o con gli insiemi consistenti) è analoga. Se il linguaggio è al più numerabile non c'è alcuna particolare richiesta oltre le usuali assunzioni della teoria degli insiemi, ad esempio della teoria ZF. Mentre se il linguaggio è più che numerabile l'assunzione dell'assioma della scelta porta a tutti i risultati voluti in entrambi gli approcci. Ma si può fare anche meglio richiedendo solo la più debole assunzione dell'esistenza di ultrafiltri. Questa può essere utilizzata anche nel caso del calcolo predicativo (anche se qui non si è fatto così) dimostrando, per altra via (eventualmente semantica) che usa solo l'esistenza degli ultrafiltri, il teorema di compattezza e riducendo, mediante questo, i casi di linguaggi più che numerabili a quelli di linguaggi numerabili (quelli minimi per un insieme finito di formule).

Allora perché tutto questo lavoro?

Si è già accennato al fatto che il metodo presentato per primo metteva in luce la determinatezza dell'analisi svolta e la piena corrispondenza con la costruzione del lin-

guaggio. Questi aspetti non sono immediatamente presenti nel calcolo predicativo che sembra anzi legato ad un certo ingegno nel trovare il percorso per arrivare a una deduzione. Tuttavia, proprio per l'equivalenza dei metodi, ma ancor di più dalla trasformazione deterministica di un metodo nell'altro, che qui non è stato possibile considerare per ovvie limitazioni di estensione, segue che gli aspetti di ingegno sono solo una impressione. Ciononostante, partendo dal primo metodo che non crea false illusioni, si è voluto arrivare al calcolo predicativo per la sua diffusione nella letteratura e per la sua tradizione storica. Nel passare da uno all'altro si sono voluti ricordare sia gli aspetti di carico computazionale sia le varie esigenze e punti di vista a cui i vari controlli sintattici cercano di rispondere, pur rimanendo tutti strettamente imparentati basandosi su varianti di idee che sono sostanzialmente sempre le stesse.

LEZIONE 14

38. CALCOLO PROPOSIZIONALE

Fin qui gli argomenti di logica sono stati presentati in un certo modo non comune a tutte le presentazioni. Nei trattati più antichi si parlava di sillogismi. Chi conosce i sillogismi (per chi non li conosce questa nota è di poca importanza, ma non ha perso molto) sa che presentano delle connessioni tra affermazioni. Riportate nel linguaggio qui presentato, tali connessioni si possono esprimere come legami tra formule dei tipi seguenti: una formula che è la quantificazione universale di una implicazione tra due formule atomiche entrambe con predicato unario (cioè del tipo $\forall v_0(Pv_0 \rightarrow Qv_0)$), una formula atomica ottenuta dall'implicazione nella formula precedente sostituendo al posto della variabile un simbolo di costante (cioè Pc), ed infine una ulteriore formula atomica, questa volta ottenuta dalla conseguente nell'implicazione mediante la sostituzione dello stesso simbolo di costante alla variabile (cioè Qc). Evidentemente se in una struttura (possiamo limitarci alle strutture invece di coinvolgere le realizzazioni perché le formule considerate sono enunciati) sono vere le prime due allora è vera anche la terza, e se non è vera la terza allora anche una delle prime due non può essere vera, oppure se una delle prime due non è vera non si può dire niente a priori della terza, e così via. Tutte queste osservazioni possono essere interessanti, ma sono solo casi estremamente limitati di quanto si è riusciti a fare nella trattazione sviluppata in queste lezioni. Si potrebbe dire che sono esempi iniziali per lanciarsi nello studio che si è proposto, esempi che hanno avuto un ruolo storico nel suggerire un filone di ricerca, ma a cui non ci si può limitare. Nella logica antica non si consideravano solo i sillogismi ma anche altre forme di relazioni tra varie affermazioni che si contrapponevano, ma ancora il tutto si riferiva a semplicissimi enunciati con predicati solo unari, troppo poco affinché la logica abbia un ruolo significativo.

Gli antichi avevano considerato il ruolo anche di aspetti, qui non considerati, quali la necessità, la possibilità, eccetera. Questi aspetti sono studiati nella logica moderna con molta maggiore ampiezza, e vanno sotto il nome di logiche modali, logiche temporali, logiche intuizioniste, e altre, ma qui ci si è voluti limitare alla cosiddetta logica classica, quella della descrizione, perché la si ritiene fondamentale (e il cui studio richiede già abbastanza impegno) prima di passare alle logiche non classiche.

Ma la presentazione della logica seguita in queste lezioni non differisce solo dalle presentazioni antiche, ma anche da molte recenti.

In genere i manuali di logica (ma non tutti) partono con il calcolo proposizionale. Qui non se ne è finora parlato, e se ne potrebbe anche fare a meno, se non fosse per chiarire perché finora è stato tralasciato.

Si è visto che per certe formule, ad esempio $\varphi \rightarrow \varphi$, è immediato accorgersi della loro validità, senza verificare la sua verità in ogni realizzazione, e neppure senza grandi analisi sintattiche, ed anche qualunque sia la formula φ . Ciò dipende dal significato dato, nel linguaggio formale, al connettivo \rightarrow . Oltre quella esibita ci sono varie altre formule la cui validità dipende esclusivamente dai connettivi usati nel costruirle, e non dai quantificatori o dall'uguaglianza o dalle formule atomiche che possono occorrere nella formula. Questa indipendenza si può precisare dicendo che sia che le sottoformule di una formula o atomiche o che iniziano con un quantificatore siano interpretate in vero o in falso comunque la formula ha un determinato valore di verità.

Si considerino ad esempio le formule $(\forall v_0 \neg =v_0 v_0) \rightarrow (\forall v_0 \neg =v_0 v_0)$, $\forall v_0 \neg =v_0 v_0$, $\neg \forall v_0 \neg =v_0 v_0$. La seconda è evidentemente falsa in ogni realizzazione e la terza è vera in ogni realizzazione, ma questi fatti non dipendono da connettivi che compaiono nella formula, quindi dal punto di vista che si vuole considerare sono o vere o false. Invece la prima è sempre vera, non tanto perché l'antecedente e il conseguente dell'implicazione siano falsi in ogni realizzazione (come di fatto sono), ma anche se fossero a volte veri e a volte falsi in qualche realizzazione, purché siano la stessa formula.

Il calcolo proposizionale è quello che si cura dell'analisi delle formule che può essere condotta considerando solo l'opera dei connettivi ed attribuendo alle formule atomiche e a quelle che iniziano con un quantificatore qualsiasi valore di verità indipendentemente da quello che effettivamente hanno in una realizzazione. Naturalmente, considerando solo l'effetto dei connettivi, l'espressività del linguaggio diminuisce grandemente, ma le considerazioni che si possono fare sono molto più semplici.

Si definiscono come formule elementari le formule che sono atomiche o iniziano con un quantificatore. Se si attribuisce ad esse un valore di verità scelto a piacere si dà quella che è detta una **valutazione proposizionale**. Ai connettivi si attribuiscono i significati noti e visti mediante le varie funzioni sui valori di verità. Poi si va a vedere se una certa formula risulta vera a partire dalla valutazione proposizionale scelta delle formule elementari. Se lo è sempre, cioè per ogni valutazione proposizionale, la si dice **proposizionalmente valida**. Si vede facilmente che una tale conclusione può essere raggiunta con il solo uso delle tavole di verità (cioè delle funzioni sui valori di verità). Si possono dare anche altri sistemi equivalenti con alberi e regole che però considerino solo i connettivi.

Questo semplice lavoro viene spesso introdotto nei manuali di logica come primo assaggio della disciplina. Ma, secondo me, è altamente fuorviante. Intanto se non si sono ancora definite le formule a cosa si applica? A dei segni che indicano delle formule; ma ancora se non si sa che cosa sono le formule non è chiaro cosa si voglia fare con questi segni. Allora si dice che sono segni che possono assumere o il valore vero o il valore falso. Ma cosa sono il valore vero e il valore falso? Si risponde che sono i valori che possono essere dati a quei segni, con un evidente circolo vizioso che non può che allontanare gli allievi non solo intelligenti, ma anche quelli non troppo stupidi. Magari le cose vengono dette in modo più sofisticato. I segni rappresentano espressioni del linguaggio (quale? quello naturale?) che non sono interrogazioni o ordini, ma per le quali si possa dire se sono vere o false. Ma, ancora, cosa vogliono dire vero e falso? O sono gli attributi che possono avere quelle espressioni del linguaggio, e si è ricaduti nel circolo vizioso, o sono attributi dal significato noto, ma quale significato e in che modo è noto?

Ma si accetti pure di avere superato questo ostacolo (non superato), e si considerino i prossimi passi di questo sviluppo. Vengono introdotti i connettivi, senza dire cosa sono, ma presentandone alcuni e indicando il loro comportamento. Non viene però spiegato il perché e il ruolo di tali scelte. Finalmente si sviluppano alcuni metodi di controllo, si vede che funzionano, ma a che conclusioni portano? Hanno chiarito il significato dei connettivi? Su tutto lo sviluppo riportato nelle presentazioni che seguono questa via, aleggia l'idea che la logica riesca a cogliere il modo (ed eventualmente anche le regole) di funzionare del pensiero umano, colga l'essenza della razionalità. La sorpresa che lo studio della razionalità venga fatto attraverso

l'analisi delle espressioni linguistiche, viene superata dall'affermazione che è proprio attraverso il linguaggio che si manifesta la razionalità. Così questa viene studiata attraverso la sua manifestazione. Non ci si domanda, però, se questa manifestazione è fedele alla razionalità, la rappresenta così com'è, o la manifestazione ha dei suoi problemi che le impediscono di rappresentare fedelmente il ragionamento. Non ci si chiede se le regolarità e le regole che emergono dallo studio sono insite nel linguaggio, cioè nel modo di rappresentare la razionalità, o sono proprie della razionalità. Spesso si vorrebbe fare credere proprio che le regolarità notate siano proprie della razionalità, ma questo messaggio può passare solo grazie alla grande confusione ed imprecisione della presentazione.

39. ALCUNE CONSIDERAZIONI SU QUANTO FATTO FINORA

E' proprio per evitare questi rischi che si è seguita una via completamente diversa. Anzitutto si è dichiarato che il linguaggio formale che si è costruito mirava solo a descrivere situazioni che erano date. Si sono poi precisate esplicitamente le successioni di simboli da accettare come formule e si è assegnato un significato a queste in un'interpretazione. Si è anche visto il modo di combinare tra loro affermazioni/formule più semplici per ottenerne di più complesse attraverso l'introduzione dei connettivi e dei quantificatori. Si è notato che questi non potrebbero essere descritti se già non si conoscessero i connettivi e i quantificatori nel linguaggio naturale. E' emerso, attraverso lo studio del controllo sintattico, poi che le nozioni date di validità, soddisfacibilità e conseguenza logica dipendono non certo dai significati attribuiti ai simboli da una interpretazione, ma dal modo precisato di organizzare il linguaggio in formule più complesse, cioè dipendono dalle espressioni del linguaggio sincategorematiche. Questa parola vuole distinguere le espressioni che hanno un significato (nomi, verbi, eccetera), dette categorematiche, da quelle che non hanno un tale significato di per sé ma solo se aggregate ad altre (sin è un prefisso che indica assieme a qualcosa). E' parzialmente vero che i connettivi e i quantificatori non hanno un significato in sé ma solo se collegati ad altre espressioni: è vero se ci si aspetta un significato dello stesso tipo delle espressioni categorematiche, tipo di significato che peraltro si riottiene aggregando una espressione sincategorematica ad una categorematica; tuttavia hanno anche un significato in sé di diverso tipo, che è quello di precisare un modo di organizzarsi del linguaggio.

Ci si può domandare allora che valore hanno le formule valide. In un certo senso nessuno: essendo valide sono vere in ogni realizzazione e non danno alcuna informazione su cosa si vuole considerare o meno. Sono tali solo in funzione di come le loro componenti sono state combinate, indipendentemente dal significato delle stesse componenti; sono un segno dell'organizzarsi del linguaggio. Poiché le nozioni semantiche di validità, soddisfacibilità e conseguenza logica dipendono dall'organizzarsi del linguaggio, e non dai significati, come si può dire qualcosa del ragionamento attraverso lo studio della sua manifestazione mediante il linguaggio (a meno che non si voglia ridurre il ragionamento all'organizzarsi del linguaggio)? Tuttavia ha un certo interesse stabilire se una formula è conseguenza logica di altre.

Per illustrare questo interesse farò degli esempi. Si pensi ad un albero genealogico di una famiglia, anche ampia. Sapere chi è genitore di chi è sufficiente per completare l'albero in ogni dettaglio, e quando si osserverà che un certo individuo è nonno di un

altro o cugino di un terzo non si sarà aggiunta alcuna informazione rispetto a quanto già contenuto nell'albero genealogico. Cioè l'affermazione che uno sia nonno di un altro non è che un modo diverso di esprimere un fatto che poteva già essere espresso usando più volte, e combinandola adeguatamente, la relazione essere padre di; si è così esplicitato qualcosa che era già contenuto nell'albero genealogico, e non si è aggiunta alcuna informazione su quella struttura. Tuttavia sapere chi sono i nonni può essere rilevante in particolari circostanze.

Altro esempio. Per costruire un ponte è importante conoscere il carichi a cui si vuole sottoporlo, le proprietà dei materiali e le leggi fondamentali della fisica. I calcoli poi per la sua costruzione non ci danno nessuna informazione in più sullo stato delle cose, esplicitano solo, nel caso particolare che ci interessa, quanto si supponeva già di conoscere. Anche se i calcoli non aggiungono niente di nuovo alle conoscenze che si hanno, le esplicitano e specificano nel caso che interessa; non interessa tanto che si possano costruire ponti che reggono grazie alle proprietà dei materiali, quanto piuttosto che quel particolare ponte regga. E il ponte non regge in virtù dei calcoli, ma per le caratteristiche fisiche: i calcoli esplicitano il comportamento delle caratteristiche fisiche note e consentono di essere fiduciosi quando si attraversa il ponte.

Dunque l'esplicitare conseguenze logiche di certe ipotesi, pure non aggiungendo alcunché alle informazioni date da quelle ipotesi sulle strutture in cui sono vere, sono importanti perché fanno cogliere gli aspetti di quelle ipotesi che sono rilevanti per una certa finalità. Di conseguenza è interessante sapere quali sono le conseguenze logiche. Questo motiva lo studio della logica come controllo sintattico per trovare le conseguenze logiche di certe premesse. Sarebbe bello che ci fosse un metodo che data una affermazione ci rispondesse automaticamente se essa è una conseguenza logica di certe premesse. Con le analisi fatte si è andati abbastanza avanti in questa direzione, raggiungendo il notevole risultato di completezza: qualunque sia la formula si può giungere a determinare sintatticamente se è conseguenza logica o meno, ma si è visto che questo metodo è solo semidecidibile. Si può trovare un altro metodo effettivo e decidibile? Per ora questa domanda resta aperta, anche perché bisogna precisare meglio cosa si intende per effettivo, e si dovranno attendere ulteriori sviluppi.

Ancora un tipo di osservazioni. Il linguaggio formale costruito è stato chiamato linguaggio perché vuole cogliere gli aspetti essenziali di un linguaggio. Si potrebbe dire che ci si è posti di fronte al problema di costruire un linguaggio ottimale, prendendo spunto dal linguaggio naturale, ma soprattutto cercando di cogliere il problema da risolvere al meglio. Quale problema, dal momento che il linguaggio naturale ne affronta tanti? Come più volte è stato ricordato, il primo obiettivo di un linguaggio è quello di descrivere una situazione. Altri problemi, come quello di comandare o di domandare, possono forse essere ricondotti a quello di descrivere l'azione del comandare o del domandare, se queste possono essere descritte.

E' abbastanza facile leggere lo sviluppo della logica che è stato presentato nelle scorse lezioni dal punto di vista di un'analisi del ruolo di un linguaggio ottimale, e i risultati positivi ottenuti dicono che la soluzione trovata è abbastanza buona, ma quelli negativi dicono che qualcosa manca ancora ad una soluzione ideale. Come è stato osservato più volte lo scopo principale di un linguaggio è il comunicare: nel caso svolto si è cercato di descrivere una qualsiasi situazione con formule che trasmesse e raccolte dovrebbero essere vere esattamente nella situazione descritta (sappiamo a meno di isomorfismi) in modo che chi ascolta si faccia una corretta idea di quanto

descritto. Abbiamo visto che ciò è possibile per le strutture finite, ma non per quelle infinite, ed anche limitandosi al descrivere solo alcuni aspetti e relazioni bisogna che siano nozioni assolute affinché possano essere colte correttamente, assolute nel senso precisato che possano essere indicate con lo stesso significato dall'interno e dall'esterno di una struttura. Di fatto quando si tratta di una semplice struttura finita che si può descrivere dal di fuori ci si potrebbe accontentare di una descrizione dall'esterno, ma quando quello che si vuole descrivere è lo stesso mondo in cui si vive la descrizione dall'esterno non è proprio utilizzabile. Come descrivere allora dall'interno nozioni non assolute? I risultati ottenuti ci dicono che ciò non può essere fatto con un linguaggio, a meno che non si possano costruire dei linguaggi migliori di quanto è stato presentato finora.

40. LINGUAGGI DI ORDINE SUPERIORE

Osservando il linguaggio naturale ci si accorge che in esso a volte si usano espressioni del tipo "qualunque sia una certa relazione succede qualcosa". Qui si è di fronte ad una quantificazione non su individui, ma su relazioni, facoltà non contemplata nel linguaggio del primo ordine finora studiato (si chiama del primo ordine proprio per distinguerlo da quelli di ordine superiore che si stanno per introdurre).

Nel linguaggio finora costruito le relazioni sono descritte mediante predicati della stessa arietà della relazione a cui corrispondono. Dire che il fatto che per ogni relazione valga una certa proprietà dovrebbe poter essere espresso dicendo che, al variare delle interpretazioni di un predicato, e solo di quello (nelle sue varie occorrenze in una formula), il valore di verità dell'intera formula resta sempre il vero, o un qualche altro comportamento globale dei valori di verità della formula. Forti dell'esperienza acquisita con il lavoro già svolto, viene spontaneo introdurre dapprima delle variabili per relazioni (cioè dei nomi per relazioni la cui interpretazione non è fissata nella struttura ma che deve essere precisata a parte), dette variabili predicative (in contrasto, le variabili prima introdotte verranno ora dette variabili individuali) che possono essere indicate con delle V maiuscole con doppio indice, $V_{i,j}$, il primo un numero naturale per indicare l'arietà considerata e il secondo, pure un numero naturale, per indicare di quale variabile si tratta (ancora le formule saranno successioni finite di simboli e in una formula non potranno occorrere più di un numero finito di variabili, ma siccome questo numero può essere grande quanto si vuole è opportuno avere tante variabili della stessa arietà quanti sono i numeri naturali). Poi si vorranno introdurre realizzazioni del tipo " $\sigma(V_{i,j}/R)$ ", con R relazione i -aria, cioè realizzazioni che differiscono dalla realizzazione " σ " solo per l'interpretazione della variabile predicativa $V_{i,j}$ che ora è interpretata nella relazione i -aria R . Sorge però il problema di determinare che relazione debba essere R , in quale ambito sceglierla. Nel caso delle variabili individuali la struttura si basava su di un universo che era appunto l'ambito in cui cercare le interpretazioni delle variabili individuali: ora bisognerebbe precisare nelle strutture anche gli ambiti dove andare a cercare le relazioni di ciascuna arietà. Così una struttura del secondo ordine (chiamiamo così quelle che dovranno essere adatte alla nuova situazione) ci dovranno essere varie cose del tipo: un universo di individui, un universo di relazioni unarie, un universo di relazioni binarie,, un universo di relazioni k -arie,, delle fissate relazioni, delle

fissate funzioni, delle fissate costanti. Si può indicare ciò con la notazione " $\mathcal{A} = (A_0, A_1, \dots, A_k, \dots, \mathcal{R}, \mathcal{F}, C)$ ".

E' naturale la domanda su chi debbano essere gli insiemi A_k quando k è un naturale maggiore di 0. Sappiamo che A_0 è un qualsiasi insieme, ma gli A_k devono essere insiemi di relazioni k -arie, come si è detto, ma non basta: sicuramente dovranno essere relazioni su A_0 , perché solo così potranno avere senso le formule atomiche che avranno una variabile predicativa al posto di un predicato. Ciò equivale a dire che ciascun A_k sarà un sottinsieme dell'insieme dei sottinsiemi del prodotto cartesiano di A_0 con se stesso k volte, quello che si indica con $P(A_0^k)$: infatti ciascuna relazione k -aria su A_0 è un insieme di k -uple ordinate di A_0 cioè un sottinsieme del prodotto cartesiano di A_0 con se stesso k volte, A_0^k , e l'insieme delle relazioni che si vogliono considerare in A_k dovrà essere contenuto in $P(A_0^k)$.

Così una **struttura del secondo ordine** sarà qualcosa del tipo " $\mathcal{A} = (A_0, A_1, \dots, A_k, \dots, \mathcal{R}, \mathcal{F}, C)$ ", dove A_0 è un insieme non vuoto arbitrariamente scelto (non vuoto al solito per evitare casi banali), per ogni naturale k maggiore di 0 A_k è un sottinsieme di $P(A_0^k)$, \mathcal{R} è un insieme di particolari relazioni su A_0 , \mathcal{F} è un insieme di particolari funzioni su A_0 , C è un sottinsieme di A_0 costituito da particolari elementi (le costanti).

Per descrivere una struttura del secondo ordine si sono già precisati i simboli del linguaggio avendo aggiunto le variabili predicative ai simboli già introdotti per i linguaggi del primo ordine. I termini rimangono gli stessi, mentre tra le formule atomiche vanno aggiunte anche quelle del tipo $V_{i,j}t_1\dots t_i$, dove $V_{i,j}$ è appunto la j -esima variabile predicativa i -aria e t_1, \dots, t_i sono termini, oltre naturalmente quelle generate con i metodi noti a partire da queste. Per dare un significato a queste espressioni del linguaggio sarà sufficiente aggiungere a quanto già visto il significato, in una realizzazione, di una formula atomica del tipo appena introdotto. Però ora, per motivi del tutto analoghi a quelli visti a suo tempo, in una realizzazione bisogna precisare anche come interpretare le variabili predicative, sicché la funzione di attribuzione di valori alle variabili sarà una nuova cosa, che sarà chiamata attribuzione del secondo ordine di valori alle variabili, che ora avrà per dominio tutte le variabili (sia individuali che predicative) e ad ognuna assocerà un elemento dell'universo della arietà corrispondente a quella della variabile (in questo contesto, per semplificare e uniformare la notazione è opportuno considerare le variabili individuali come variabili 0-arie). Con a disposizione una struttura del secondo ordine " \mathcal{A} " e una attribuzione di valori alle variabili del secondo ordine " \underline{a} ", cioè una **realizzazione del secondo ordine** " $\sigma = (\mathcal{A}, \underline{a})$ ", si possono definire, come prima, le interpretazioni dei termini in questa realizzazione " σ " del secondo ordine, e anche le interpretazioni delle formule atomiche in questa realizzazione " σ " aggiungendo a quanto già visto che, se la formula atomica è del tipo $V_{i,j}t_1\dots t_i$, allora la sua interpretazione nella realizzazione " σ ", $(V_{i,j}t_1\dots t_i)^\sigma$, è V se $(t_1^\sigma, \dots, t_i^\sigma) \in (V_{i,j})^\sigma$, dove $(V_{i,j})^\sigma$ è appunto " $\underline{a}(V_{i,j})$ ", F altrimenti.

Dalle formule atomiche si può passare alle altre formule aggiungendo alla definizione già vista la seguente nuova modalità di costruire formule: se φ è una formula e $V_{i,j}$ è una variabile predicativa, allora anche $\forall V_{i,j} \varphi$ è una formula. Ancora bisognerà dire come si interpretano le formule in una realizzazione del secondo ordine, ma tutto il lavoro svolto era proprio orientato a precisare questo punto, sicché dovrebbe essere naturale definire la interpretazione delle formule dei tipi già visti in modo analogo a ciò che si era fatto, e l'interpretazione di una formula del tipo $\forall V_{i,j} \varphi$ in una realizzazione del secondo ordine " σ " come segue: l'interpretazione della formula $\forall V_{i,j} \varphi$

in una realizzazione del secondo ordine " σ , $(\forall V_{i,j} \varphi)^\sigma$, è V se per ogni relazione R appartenente all'insieme A_i della struttura della realizzazione " σ si ha che $(\varphi)^\sigma(V_{i,j}/R)$ è V, F altrimenti.

A questo punto si è riconquistata pienamente la definizione di interpretazione di una formula, nel senso ampliato, in una realizzazione del secondo ordine, e si possono al solito definire le nozioni di validità al secondo ordine, di soddisfacibilità al secondo ordine e di conseguenza logica al secondo ordine.

In modo del tutto analogo a quanto già fatto, si può introdurre una analisi sintattica di un insieme di formule del secondo ordine per vedere se è soddisfacibile: basterà aggiungere a quanto prodotto dalla regola $R_{1,n}$ dei nuovi insiemi che tengano conto delle formule del tipo $\forall V_{i,j}$ e del tipo $\neg \forall V_{i,j}$ (incluso l'arricchimento del linguaggio voluto da quest'ultimo tipo di formule).

Naturalmente a questo punto ci si aspetta di riottenere tutti i risultati già visti per i linguaggi del primo ordine: completezza, compattezza non categoricità, non definibilità di certe nozioni, eccetera.

Tuttavia Peano a cavallo tra il 1800 e il 1900 ha dimostrato la categoricità della teoria dell'aritmetica usando i linguaggi del secondo ordine. Come è possibile? Forse che risultati visti non si estendono (come ci si aspettava) ai linguaggi del secondo ordine, che dunque rappresentano un notevole potenziamento dell'espressività di un linguaggio?

Il problema sta proprio nella stessa definizione di struttura del secondo ordine. Quando si sono introdotti gli insiemi di relazioni A_k , con k numero naturale maggiore di 0, si è osservato che dovevano essere contenuti negli insiemi $P(A_0^k)$ di tutte le relazioni k-arie su A_0 . La nozione di contenuto contiene anche la possibilità che il sottinsieme sia uguale all'insieme in cui è contenuto, sicché può anche darsi il caso che sia $A_k = P(A_0^k)$. Una struttura del secondo ordine in cui $A_k = P(A_0^k)$, per ogni numero naturale k maggiore di 0, viene detta una struttura del secondo ordine **piena**. Ovviamente si possono considerare strutture del secondo ordine non piene. Peano nella sua dimostrazione di categoricità della teoria dell'aritmetica aveva considerato solo strutture piene. Se si considerano appunto anche le strutture non piene cade la categoricità dell'aritmetica, e si ottengono invece tutti i risultati analoghi a quelli ottenuti al primo ordine, a cui si è già accennato.

Ci si può domandare quanto sia giustificato considerare solo strutture del secondo ordine piene. Se ci fosse una formula o un insieme di formule del secondo ordine vere esattamente quando interpretate in strutture piene si potrebbe dire che questa nozione è definibile con il linguaggio e che, mediante lo stesso linguaggio, si può precisare univocamente (al solito a meno di isomorfismi) cosa sono i numeri naturali. Ma questo insieme di formule non esiste (proprio perché valgono i teoremi di compattezza e di non categoricità). Comunque, dal di fuori si potrebbe decidere di considerare solo strutture piene. Ciò corrisponderebbe al decidere che le strutture del primo ordine devono essere tutte con un universo che è la classe di tutti gli insiemi, richieste che limitano immotivatamente la possibilità di considerare ogni eventuale realizzazione. In qualche modo, il risultato di Peano è come dire che la teoria dell'aritmetica è categorica perché si considerano come modelli solo le strutture che sono i numeri naturali. In questo modo certo si ottiene la categoricità, ma non ha alcun valore riguardo al problema fondazionale di determinare certe strutture solamente attraverso il linguaggio.

Potrebbe sorgere ancora il dubbio che i linguaggi studiati non considerino tutte le potenzialità suggerite dal linguaggio naturale: come si è passati dal primo al secondo ordine considerando variabili e quantificazioni per relazioni, non si potrebbero considerare anche variabili e quantificazioni per relazioni tra relazioni (invece che per relazioni tra individui) e così via? Certo, e questo è stato fatto, a partire da Whitehead e Russell nei *Principia Mathematica*, e va sotto il nome di teoria dei tipi in cui si considerano tutti i possibili ordini. Però anche in questo caso si ottengono gli stessi risultati che ormai si sono visti più volte considerando strutture anche non piene, come è giusto fare. Inoltre se si considerano le relazioni come particolari insiemi, e le relazioni su relazioni come altri insiemi, e così via, tutta la teoria dei tipi può essere vista come una teoria degli insiemi in un linguaggio del primo ordine, e diviene del tutto evidente che dovranno continuare a valere i risultati conseguiti per le teorie nei linguaggi del primo ordine.

Che altri suggerimenti si possono trarre dal linguaggio comune per superare i limiti dei linguaggi formali? I linguaggi comuni possono parlare di se stessi, della propria costruzione, dell'interpretazione delle proprie espressioni, fatto che si è voluto decisamente evitare introducendo appunto la distinzione tra linguaggio e metalinguaggio. Infatti l'autoriferimento, la possibilità di potere parlare di se stesso, è ciò che permette di generare, in un linguaggio, paradossi come quelli del mentitore, cioè frasi che se sono supposte vere allora sono false e che se sono supposte false allora sono vere. Siccome non si vogliono ottenere contraddizioni dal linguaggio, altrimenti ogni frase è vera (l'"*ex falso quodlibet*" insegna) perdendo completamente il valore della distinzione tra vero e falso e ogni qualsiasi uso del linguaggio, se non vuota sonorità, non si può accettare l'autoriferimento, e i limiti dei linguaggi formali non possono essere superati in alcun modo. Così si deve accettare, dal punto di vista fondazionale, che il linguaggio non può autofondare la conoscenza la cui base deve essere acquisita con mezzi diversi da un linguaggio. Come si è visto certe nozioni, importanti per la matematica non possono essere spiegate con il linguaggio e rimane il problema di come si spiegano.

Ciò non vuole dire che i linguaggi formali non possano essere estremamente importanti. Tutta l'informatica e gran parte della matematica sarebbero impossibili se l'uomo non avesse scoperto linguaggi adatti a sviluppare calcoli simbolici. Non solo, ma senza lo sviluppo di questi studi non si sarebbero potuti ottenere i risultati qui presentati, e si sarebbe sempre rimasti incerti sull'eventuale ruolo fondazionale (capacità di giustificare la propria ragione d'essere di una scienza) dei linguaggi formali: di fatto Hilbert nel suo elenco dei problemi aperti della matematica, presentato al congresso dei matematici a Parigi nell'anno 1900, aveva indicato proprio come primo problema non ancora risolto quello di dare alle teorie matematiche certezza, solido fondamento, e dimostrazione di non contraddittorietà attraverso lo studio del linguaggio formale.

LEZIONE 15

41. IL PROBLEMA DELL'EFFETTIVITA'.

Accettata allora l'impossibilità di caratterizzare univocamente strutture (a meno di isomorfismi), ci si potrebbe domandare se, senza volere precisare univocamente una struttura, ma accettando tutte quelle tanto simili da rendere veri tutti gli enunciati di un insieme, almeno si possono precisare tutti gli enunciati veri in queste strutture tra loro indistinguibili mediante il linguaggio. Detto altrimenti, in mancanza di categoricità vorremmo almeno conoscere per ogni enunciato se è vero lui o la sua negazione in questi modelli tra loro elementarmente equivalenti.

In questa direzione si può giungere ad un atteggiamento formalista che, non dando importanza al significato (ritenuto irraggiungibile), quasi negando l'esistenza di un significato, vede tutta la realtà nelle espressioni di un linguaggio formale, non c'è niente al di fuori di queste espressioni. Ma, pur assumendo questa posizione, sorge il problema di quali sono gli insiemi di enunciati (teorie) da accettare e cosa implicano le singole teorie. Una teoria sarebbe sufficientemente forte se per ogni enunciato o lui o la sua negazione fossero conseguenze logiche della teoria. Tali teorie vengono dette **sintatticamente complete**. Inoltre per poter accettare una teoria ci si accontenta che da essa non seguano sia una formula che la sua negazione; ma per vedere se si possono dedurre una formula e la sua negazione bisogna aspettare di aver ottenuto tutte le possibili deduzioni, che sono infinite, oppure si può dimostrare che in certe teorie ciò non potrà mai succedere? Una dimostrazione di questo tipo viene detta una dimostrazione di consistenza della teoria, e la teoria stessa viene detta **dimostrabilmente consistente**. La dimostrazione qui considerata della consistenza non può essere una dimostrazione all'interno della stessa teoria perché le teorie che si considerano non parlano di se stesse (si ricordi la distinzione, più volte richiamata tra linguaggio e metalinguaggio). La dimostrazione dovrà avvenire in una metateoria (quale, come fatta, quanto affidabile?), per la quale si pone immediatamente il problema della sua credibilità, a meno che non ci sia un modo attraverso il quale una teoria possa parlare di se stessa: ma come può una teoria parlare di se stessa, evitando inoltre i pericoli dell'autoriferimento?

Avendo disperato di precisare i significati per mezzo del linguaggio, è almeno possibile considerare delle teorie consistenti e complete che colgano le principali nozioni matematiche?

La risposta a questa domanda può essere in un certo senso affermativa in modo del tutto banale. Si pensi ad esempio alla struttura dei numeri naturali, e alla teoria di questa struttura, cioè l'insieme degli enunciati veri in questa struttura. Questa teoria è consistente perché se non lo fosse non potrebbe avere modelli (mentre un modello è proprio la struttura di cui questo insieme di enunciati è la teoria). Inoltre è sintatticamente completa perché ogni enunciato se non è vero nella struttura dei numeri naturali, la sua negazione è vera nella struttura dei numeri naturali, sicché per ogni enunciato o lui o la sua negazione appartiene alla teoria. Tuttavia si noti che stiamo considerando la teoria di una struttura, e per fare ciò si è dovuto fare ricorso ad una struttura, mentre si volevano evitare i riferimenti alle strutture. Di più non si conoscono tutti gli enunciati veri in questa struttura: ci sono ancora molti problemi aperti che riguardano proprietà dei numeri naturali che non si sa se valgano o meno. Anche per le enunciazioni dei problemi aperti, dire che si sceglie l'enunciato vero

nella struttura dei numeri naturale, se da una parte indica dettagliatamente cosa si sta cercando, dall'altra non dice niente su quale sarà l'enunciato che si troverà. Così, quali sono gli enunciati che appartengono a tale teoria? C'è un modo di dire quali sono diverso da quello di dire che sono gli enunciati veri in quella struttura? C'è un modo effettivo di riconoscere quali sono?

Per quanto queste domande appaiano del tutto chiare (ci pare di sapere cosa vogliono dire), la difficoltà di rispondere dipende proprio dal fatto che queste domande non sono bene formulate, sono un po' equivoche. Infatti che modi sono consentiti per dire quali sono gli enunciati di una teoria? La risposta potrebbe essere metodi effettivi, cioè metodi che consentano di capire effettivamente quali enunciati appartengono e quali non appartengono a una teoria, tali per cui c'è un processo di decisione per dire cosa deve appartenere e cosa no. Ma cosa vuole dire effettivo, cos'è un processo di decisione? Siccome non vogliamo fare ricorso ai significati a causa dei risultati limitativi dei linguaggi, dovremmo vedere come rispondere a queste domande dall'interno dei sistemi formali.

Dopo l'anno 1900 quando Hilbert aveva dichiarato esplicitamente qual era il primo problema aperto della matematica in quel momento, le ricerche si incamminarono nella direzione tracciata, e non è un caso che vari studiosi siano giunti, attorno agli anni trenta del secolo scorso, a formulare varie proposte di cosa debba intendersi per effettivo.

Tutti sappiamo riconoscere casi evidenti di funzioni sui numeri naturali effettive (ad esempio, aggiungere uno ad uno numero naturale), molto più difficile è dire cosa debba intendersi in generale.

Gödel ha fatto ricorso ad una modalità tipicamente matematica: quella di considerare un insieme a cui appartengono alcuni elementi ed è chiuso rispetto a delle operazioni. Egli ha considerato quello che si chiama l'insieme delle **funzioni ricorsive**, cioè un insieme che contiene delle funzioni iniziali che sono chiaramente effettivamente calcolabili (dati dei valori alle variabili indipendenti si ottiene in modo effettivo il valore da attribuire alla variabile dipendente), come le funzioni identiche su una variabile, la funzione costante essere zero, la funzione successore immediato, ed è chiuso rispetto ad operazioni su funzioni che preservano l'effettiva calcolabilità, come la composizione di funzioni (componendo funzioni effettivamente calcolabili si ottiene evidentemente una funzione effettivamente calcolabile), la definizione di funzioni per ricorsione a partire da altre, e la ricerca del minimo valore da dare ad una variabile per ottenere un certo risultato attraverso una funzione. Poiché si è partiti da funzioni che sono effettivamente calcolabili nel senso, comune come ci si accorge immediatamente, e si sono applicati modi di generare altre funzioni che preservano l'effettiva calcolabilità, sempre nel senso comune, si è individuata una classe di funzioni (dette **ricorsivamente calcolabili**) che sono sicuramente effettivamente calcolabili nel senso che si vuole cogliere, ma sono proprio tutte le funzioni da ritenersi effettivamente calcolabili, o ce ne sono altre non ottenibili con i modi indicati?

Turing affrontò il problema da un punto di vista ben diverso. Se una funzione è effettivamente calcolabile, ci deve essere un modo di calcolarla che è eseguibile anche da una macchina che possieda le dovute indicazioni di calcolo (non sui significati di quello che si vuole fare). La macchina pensata da Turing è certo una macchina ideale perché, pur eseguendo i suoi processi in un tempo finito, non ha alcun limite alla grandezza del numero finito che limita il tempo concesso, potendo impiegare tutto il

tempo finito di volta in volta richiesto dal proprio operare, e, similmente, potendo annotare lo sviluppo del proprio operare in registri finiti, non c'è alcun limite a quanto debba essere la grandezza massima dello spazio concesso ai registri, cioè è concesso tutto lo spazio finito che di volta in volta può servire (concessioni irrealizzabili nei fatti concreti). Una macchina di Turing è una macchina che può avere un numero finito di stati in cui trovarsi e in ogni stato esegue delle operazioni meccaniche ben precise. E' posizionata in un certo punto del registro di cui dispone (che è un nastro diviso in una successione di caselle), legge quanto è segnato in quella casella, e, in funzione dello stato in cui si trova e di quanto ha letto nella casella, esegue una delle seguenti operazioni: si sposta di una casella sul nastro di lettura o a destra o a sinistra, oppure sostituisce il simbolo letto nella casella con un nuovo simbolo di un alfabeto finito, e, in ogni caso, si mette in un certo stato di quelli (in numero finito) di cui dispone. Sia chiaro che quale operazione svolge e in quale stato venga a trovarsi dipende esclusivamente dallo stato in cui era e da cosa ha letto nella casella dove era posizionata. Dunque la macchina di Turing è una vera e propria macchina, è totalmente determinata nel fare certe operazioni meccanicamente realizzabili, senza bisogno né di intelligenza né di scelte libere.

La macchina di Turing può calcolare i valori di una funzione sui numeri naturali partendo dai valori dati alle variabili indipendenti scritti opportunamente sul nastro, che è il suo registro, al momento dell'avvio, ed arrestandosi dopo avere trasformato quanto scritto sul nastro in modo che con la stessa codifica si possa leggere il numero che è il valore della funzione applicata ai numeri inizialmente dati. Una funzione calcolabile da una macchina di Turing (detta **Turing calcolabile**) è sicuramente una funzione effettivamente calcolabile, perché i processi di calcolo sono stati svolti effettivamente da una macchina, ma ancora è vero che ogni funzione effettivamente calcolabile nel senso che vogliamo cogliere è calcolabile con una macchina di Turing, o non dovrebbe questa poter essere potenziata con delle oltre operazioni meccaniche effettive per potere calcolare effettivamente anche altre funzioni?

Altra idea fu quella di Von Newman. Egli considerò le cosiddette macchine a registri. Queste sono macchine con vari registri, dove possono essere segnati dei numeri naturali, e possono eseguire delle banali operazioni (aggiungere 1 o togliere 1 ad un certo registro, spostarsi da un registro all'altro, confrontare il contenuto di due registri), operazioni che si eseguono seguendo un elenco finito di comandi (le successioni di comandi sono dette **programmi**), comandi che possono prevedere anche di interrompere la loro successione naturale per passare ad un diverso comando della successione se un confronto tra contenuti di ben precisati registri dà un esito piuttosto che un altro (i numeri nei due registri sono uguali piuttosto che diversi). Ancora i possibili programmi applicati ad una tale macchina possono calcolare delle funzioni: quelle che fanno corrispondere ai valori iniziali attribuiti alle variabili, inserendoli in ben precisati registri quando la macchina si avvia, il valore contenuto in un registro del tutto particolare quando la macchina si arresta. Ancora le funzioni così calcolate (dette **calcolabili con macchine a registri**) sono funzioni che ben possono essere riconosciute come effettivamente calcolabili (sono state calcolate con una procedura meccanica ed effettiva), ma sono tutte le funzioni effettivamente calcolabili nel senso che si sta cercando di precisare, o ancora ci si è dimenticati di qualche funzionalità della macchina (magari presente nei moderni linguaggi di programmazione dei computers), aggiungendo la quale si potrebbero calcolare altre funzioni sempre in modo effettivo?

Ovviamente i vari studiosi avevano cercato di inserire nelle loro analisi del concetto di effettiva computabilità tutto quello che poteva essere utile (per quanto sicuramente effettivo) per allargare al massimo la classe delle funzioni che consideravano e, possibilmente, cogliere proprio tutte le funzioni effettivamente calcolabili. Ma erano riusciti pienamente nel loro intento o era scappata una qualche funzione che, una volta esibita, concorderemmo nel dire che è effettivamente computabile, anche se non rientra nelle famiglie di funzioni esaminate dai vari studiosi?

Una indicazione che i lavori di Gödel, Turing, Von Newman avessero colto nel segno abbastanza bene venne dalle dimostrazioni che si ottennero negli anni successivi che le varie classi di funzioni definite erano equivalenti, nel senso che la classe delle funzioni ricorsive è uguale alla classe delle funzioni Turing calcolabili, è uguale alla classe delle funzioni calcolabili con macchine a registri. Ma delle indicazioni ancora più rilevanti vennero dal modo come tali dimostrazioni furono condotte.

In un certo senso la direzione più facile è quella di mostrare che se una funzione è ricorsiva allora è sia Turing calcolabile che calcolabile con macchine a registri. Infatti una funzione ricorsiva, per la sua stessa definizione, è ottenibile dalle poche funzioni iniziali applicando ad esse delle operazioni sulle funzioni ed iterando tali applicazioni un numero finito di volte. Così trovando macchine di Turing o programmi per macchine a registri che calcolino le funzioni iniziali o che trasformino calcoli di funzioni già ottenute in calcoli di funzioni che si ottengono da queste attraverso le operazioni previste dalla costruzione delle funzioni ricorsive, iterando queste trasformazioni si mostra che ciascuna funzione ricorsiva è pure Turing calcolabile o calcolabile con una macchina a registri.

L'altra direzione è più difficile perché la classe delle funzioni Turing calcolabili o quella delle funzioni calcolabili con macchine a registri non sono generate con opportuni procedimenti a partire da particolari funzioni di quel tipo da ritenersi più semplici. Invece quello che si riuscì a dimostrare, attraverso una codifica in numeri dei vari aspetti coinvolti dalle particolari nozioni di calcolabilità, fu che le stesse nozioni di funzione n -aria Turing calcolabile o di funzione n -aria calcolabile attraverso macchine a registri divenivano funzioni ricorsive $(n+1)$ -arie in cui l' $(n+1)$ -esimo valore assegnato permetteva di determinare quale delle funzioni n -arie Turing calcolabili o calcolabili da una macchina a registri veniva calcolata dalla funzione ricorsiva n -aria ottenuta fissando con quel valore la $(n+1)$ -esima variabile.

Ma l'osservazione più rilevante è che se anche si dovesse usare una diversa nozione di macchina (al di là di quella di Turing o di quella a registri), se questa è una macchina che passa attraverso diverse posizioni per effetto di un insieme finito (ma non si sa quanto grande) di comandi organizzati a cui deve obbedire (come pare del tutto naturale supporre se si vuole parlare di macchina che esegue un processo effettivo), ebbene, sotto tali ipotesi si dovrebbe potere modificare adeguatamente la codifica e fare vedere che le funzioni calcolate da una tale macchina (anche apparentemente molto più potente a causa di sofisticati comandi che può prevedere) sono funzioni ricorsive. Così una macchina di Turing sarebbe in grado di calcolare una qualsiasi funzione calcolabile da macchine con funzionalità anche molto più sofisticate e potenti. Detto altrimenti una macchina di Turing (o una macchina a registri) sarebbe in grado di fare il lavoro di una qualsiasi altra macchina per quanto potente, ma sempre macchina. Dunque la macchina di Turing (o la macchina a registri, o la ricorsività) saprebbero calcolare tutte le funzioni effettivamente calcolabili.

Si sarà notato che nella frase precedente si è usato spesso il condizionale. Vediamone il perché.

Si stanno confrontando delle nozioni ben precisate, come quelle di classe delle funzioni ricorsive, classe delle funzioni Turing calcolabili, classe delle funzioni calcolabili con macchine a registri (a queste definizioni qui si è accennato velocemente, ma possono essere date in tutti i dettagli, come facilmente riscontrabile nella letteratura), con una nozione vaga qual è quella di effettivamente calcolabile, e non ci potrà essere alcun teorema che affermi l'equivalenza di una nozione precisa non una nozione vaga, proprio perché non si sa cosa si dovrebbe dimostrare. E questo si è manifestato nel paragrafo precedente quando si considerava una qualsiasi macchina anche senza sapere di quale si parlasse. Se è una macchina dovremmo essere in grado dire come si comporta e di rappresentare il suo funzionamento in modo codificato. Dovremmo, e in realtà non appena si specifica la macchina lo si può fare, ma si sta facendo una affermazione che dovrebbe valere per una qualsiasi macchina anche per quelle a cui non si è ancora pensato, dunque è d'obbligo il condizionale. D'altra parte è del tutto naturale per l'uomo il processo di generalizzazione (a volte chiamato d'astrazione): se in tutti i casi controllati c'è stato sempre un certo comportamento, si ipotizza che questo si verificherà sempre. E' dunque umanamente naturale accettare la **tesi di Church** (tesi e non teorema per quanto si è detto): la classe delle funzioni effettivamente calcolabili coincide con la classe delle funzioni ricorsive, con la classe delle funzioni Turing calcolabili, con la classe delle funzioni calcolabili da macchine a registri. Così si afferma che le caratterizzazioni proposte della nozione di effettiva calcolabilità colgono quello che si voleva significare, oppure che quello che si voleva affermare può essere opportunamente visto come coincidente con le nozioni di effettività che sono state introdotte con precisione.

Forse quanto è stato fin qui esposto, seppure in maniera succinta, può essere sufficiente per avere un'idea di cosa debba intendersi per effettività ai fini dell'utilizzo di questa nozione per rispondere alle domande che ci si poneva all'inizio, e cioè di determinare effettivamente teorie possibilmente sintatticamente complete e dimostrabilmente consistenti.

Si potrebbe obiettare che si è introdotta la nozione di effettività per funzioni sui numeri naturali e non per le nozioni relative ai linguaggi. Tuttavia non è difficile avendo la prima nozione passare ad una ulteriore nozione di effettività che coinvolga anche altri ambiti. Infatti si possono associare, in modo biiettivo, ben preciso ed effettivo, numeri naturali ai simboli di un linguaggio, anche se sono infiniti, ma di un certo numero finito di tipi. Poi si possono associare numeri anche alle successioni finite di simboli e alle successioni finite di successioni finite, e così via, in modo biiettivo ed effettivo, facendo corrispondere ad una successione il numero che è il prodotto dei successivi numeri primi ciascuno numero primo elevato al numero che corrisponde all'elemento della successione nella posizione di uguale posto del numero primo di cui è esponente nella successione dei numeri primi. Cioè, si associa alla successione finita $(a_0, \dots, a_i, \dots, a_k)$ il numero naturale $p_0^{a_0} \times \dots \times p_i^{a_i} \times \dots \times p_k^{a_k}$, dove p_i è l' i -esimo numero primo e a_i è il numero associato ad a_i . Si noti che le funzioni utilizzate in questa associazione sono ricorsive, ed anche è ricorsivo il modo inverso di associare ad un numero la successione dei numeri che indicano la successione degli elementi da considerare, grazie al teorema di fattorizzazione unica dei numeri naturali. Così si possono codificare (associare loro dei numeri) tutti gli elementi

costruiti a partire da un linguaggio (incluse le dimostrazioni che sono successioni finite di formule) in modo che dall'elemento si possa passare alla sua codifica e dalla codifica all'elemento con una modalità biiettiva ed effettiva. Fatto ciò, le relazioni tra elementi della sintassi (tipo essere ultima formula di una deduzione, essere una deduzione di una formula e della sua negazione) diventano relazioni aritmetiche tra i numeri che rappresentano gli elementi in relazione, e il risultato notevole è che tutte tali relazioni aritmetiche sono ricorsive o prodotte da funzioni ricorsive. Questo mostra l'effettività dei processi adottati nella costruzione delle sintassi relative ai linguaggi formali.

Queste osservazioni ci permettono di cogliere come la nozione di effettività possa essere estesa anche alla soluzione di problemi non aritmetici, ma, ad esempio, problemi sulla sintassi di un linguaggio, che avranno soluzione effettiva quando i corrispondenti problemi aritmetici tra i codici che rappresentano i vari enti coinvolti avranno soluzione effettiva.

Un buon riferimento per tutta questa lezione sono larghe parti i capitoli 6 e 7 del testo di Bell e Machover: *A course in mathematical logic*, edito da North Holland 1993. Una traduzione in italiano semplificata e un po' modificata della parte ora rilevante del capitolo 6 dal titolo "effettiva calcolabilità" è inserita nella sottocartella "sussidi didattici" della cartella "material de trabajo" di questo modulo 6.

42. LIMITI DELLE TEORIE ASSIOMATIZZABILI.

Il problema da cui si era partiti è riconoscere quali sono gli enunciati che appartengono ad una data teoria, ad esempio alla teoria chiamata aritmetica. Avevamo capito che definire l'aritmetica come la teoria della struttura dei numeri naturali, da una parte fa ricorso in modo essenziale alla semantica, e dall'altra indica un insieme che pare non si sia in grado di riconoscere effettivamente (almeno a partire dalla definizione semantica, se non ci sono altre caratterizzazioni effettive).

Un modo comune in matematica per costruire con precisione una teoria è quello di darle gli assiomi (cioè un insieme di enunciati di quella teoria dal quale partire) e considerare tutti gli enunciati che da questi si possono dedurre. Si adotterà lo stesso sistema, e si chiamerà **assiomatica** una teoria i cui assiomi abbiano per codice numeri forniti da una successione ricorsiva (o, se si preferisce, effettiva, in base alla tesi di Church), e **assiomatizzabile** una teoria per la quale si possa trovare un insieme di assiomi in base ai quali può essere detta assiomatica. Si noti che il fatto che si possano riconoscere effettivamente tutti gli enunciati di una teoria ed il fatto che la teoria sia assiomatizzabile sono equivalenti. Infatti, se si possono riconoscere effettivamente tutti i suoi enunciati, questi possono essere presi come assiomi e la teoria è assiomatizzabile. D'altra parte se è assiomatizzabile si dimostra che anche l'insieme degli enunciati deducibili da quegli assiomi è effettivamente determinabile, e questo insieme coincide con quanto è deducibile dalla teoria.

Così il problema di trovare teorie effettivamente determinabili che siano sintatticamente complete e dimostrabilmente consistenti, si può riformulare chiedendo di trovare teorie assiomatizzabili, sintatticamente complete e dimostrabilmente consistenti.

Ciò non è impossibile, e se ne possono fare esempi del tutto banali.

Così si consideri un linguaggio i cui unici simboli propri siano un predicato binario P e un simbolo per costante c , e si prendano per assiomi i seguenti enunciati: $\exists v_1 Pcv_1$, $\forall v_0 \neg P v_0 v_0$, $\forall v_0 \forall v_1 \forall v_2 ((Pv_0 v_1 \wedge Pv_1 v_2) \rightarrow Pv_0 v_2)$, $\exists v_0 \exists v_1 ((\neg v_0 = v_1) \wedge \forall v_2 (v_2 = v_0 \vee v_2 = v_1))$. Il primo enunciato è vero esattamente nelle relazioni in cui c'è un elemento nella relazione di nome P con l'elemento che interpreta il simbolo per costante c , il secondo e il terzo enunciato, affermando l'antiriflessività e la transitività della relazione di nome P , sono veri se e solo se tale relazione è una relazione d'ordine stretto, ed infine il quarto enunciato è vero solo nelle strutture con esattamente due elementi. Così questi enunciati sono veri esclusivamente in una struttura con due elementi e una relazione che dice che uno, quello di nome c , precede l'altro, e l'insieme di enunciati dato è categorico. Tutti gli enunciati che si possono dedurre da questi quattro devono essere veri in questa struttura, ma anche tutti gli enunciati veri in questa struttura (che sono gli stessi veri in tutte le strutture isomorfe ad essa) devono essere deducibili dai quattro enunciati data, essendo conseguenze logiche di questi (non è che una applicazione del teorema di completezza). Siccome però in una struttura così semplice è facile determinare se un enunciato è vero o se è vera la sua negazione, proprio grazie all'aspetto semantico si può determinare effettivamente chi è la sua teoria, che sarà sintatticamente completa e dimostrabilmente consistente.

L'esempio appena proposto risponde alle esigenze, ma sembra poco rilevante perché si riferisce ad una situazione molto povera, mentre si vorrebbero considerare teorie più ricche almeno tali da potervi esprimere almeno una certa parte dell'aritmetica, che è considerata proprio la minima base per sviluppare argomentazioni di carattere scientifico e tecnico.

Così si vogliono considerare gli insiemi di enunciati di una teoria assiomatizzabile (almeno per sapere effettivamente quali sono gli enunciati di un suo sistema di assiomi) ed anche sufficientemente ricca da poter esprimere almeno parte dell'aritmetica, e ci si domanda se tale teoria può essere sintatticamente completa e dimostrabilmente consistente.

D'altra parte si era proprio partiti dal problema se la teoria dei numeri naturali non fosse di fatto effettivamente precisabile mediante altri metodi, anche se non sembrava poter essere riconosciuta effettivamente a causa della sua definizione da un punto di vista semantico.

Gödel ha mostrato come codificare la sintassi di un linguaggio formale mediante la struttura dei numeri (cioè come certe relazioni nella struttura dei numeri valgano tra certi numeri se e solo se sussistono certe caratteristiche sintattiche tra espressioni codificate con quei numeri), ma ha fatto anche di più, mostrando che le relazioni tra numeri che interessano per codificare le relazioni della sintassi sono esprimibili attraverso funzioni ricorsive, e, inoltre, le relazioni ricorsive nella struttura dei numeri sono rappresentabili mediante formule in una teoria in grado di esprimere una certa parte dell'aritmetica (ad esempio una teoria sviluppata a partire dagli assiomi di Peano che sono certamente un insieme effettivamente riconoscibile di enunciati). Così, se si accetta che una teoria sia sufficientemente ricca da includere l'aritmetica di Peano, allora essa può parlare della sua sintassi attraverso la codifica di questa nella struttura dei numeri, codifica che può essere successivamente rappresentata in formule dell'aritmetica di Peano, contenute nella teoria stessa. Certo non parla direttamente della propria sintassi, ma lo fa attraverso la codifica, sicché non si arriva direttamente ad un autoriferimento, ma quasi.

Se l'elencazione dei codici degli enunciati veri nella struttura dei naturali (cioè degli enunciati appartenenti all'aritmetica) fosse effettiva (in tal caso sarebbe effettivamente riconoscibile anche l'insieme degli enunciate oltre che dei loro codici), allora ci sarebbe una funzione ricorsiva che fornisce questo codici, e tale funzione ricorsiva sarebbe rappresentabile mediante una formula dell'aritmetica. Sempre in questa ipotesi dell'esistenza di una funzione effettività che fornisce l'elenco dei numeri degli enunciati veri nella struttura dei numeri naturali, ci si potrebbe domandare cosa succede dell'enunciato "il numero di questo enunciato non appartiene all'elenco dei numeri degli enunciati veri". Anche questo enunciato ha un suo numero di codice, che, se appartenesse all'insieme dei numeri di codice degli enunciati veri nella struttura dei numeri, direbbe il numero di questo enunciato non appartiene a quell'insieme, impossibile, dunque dovrà non appartenere a quell'insieme, ma allora direbbe che il numero che lo codifica appartiene all'insieme, cosa che abbiamo appena escluso. Si è giunti così ad una contraddizione basata sull'ipotesi che si potesse dire in modo effettivo chi sono gli enunciati (i loro codici) che sono veri nella struttura dei naturali (che appartengono all'insieme dei codici degli enunciati veri nella struttura dei naturali). Dunque l'ipotesi fatta è falsa e non ci può essere un modo effettivo di dire quali sono gli enunciati veri nella struttura dei naturali (teorema di Tarski). Poiché si dimostra abbastanza semplicemente che in una teoria assiomatizzabile i codici degli enunciati dimostrabili sono elencati da una funzione effettivamente calcolabile, si può anche dire che l'aritmetica (la teoria della struttura dei numeri naturali) non è assiomatizzabile.

Questi risultati negativi dicono che la teoria della struttura dei numeri naturali (che sappiamo essere insufficiente per determinare quella struttura categoricamente) non può essere determinata in modo effettivo, non è assiomatizzabile. Dunque una teoria assiomatica di parte dell'aritmetica che includa l'aritmetica di Peano non può essere sintatticamente completa. Più in generale si dimostra che nessuna teoria consistente e assiomatizzabile che includa l'aritmetica di Peano può essere sintatticamente completa: cioè ci saranno formule tali che né loro né la loro negazione saranno deducibili da quella teoria, cioè ci saranno sempre problemi aperti.

Si considerino ora insiemi di assiomi che sono contenuti o che contengono gli assiomi di Peano. Ripetendo l'argomentazione del teorema di Tarski, questa volta però sostituendo l'insieme dei codici degli enunciati veri nella struttura dei numeri naturali con l'insieme dei codici degli enunciati deducibili da un insieme di assiomi prima specificato, si ottiene che neppure gli insiemi di enunciati deducibili da tali assiomi possono essere determinati effettivamente. Così ad esempio si ottiene anche che l'insieme dei teoremi non è effettivamente determinabile. Questo spiega il perché dell'interesse a dimostrare questi enunciati, che sono i teoremi, validi in ogni struttura (e dunque, come già osservato, privi di informazioni sulle strutture in cui possono essere veri, che si riconoscono come teoremi solo in base all'organizzarsi del linguaggio). Anche se non dicono niente di nuovo, possono esplicitare ciò che accade in ogni struttura da una diversa angolatura, e non è banale ottenerli (nessuna macchina ce li può indicare) proprio perché il loro insieme non è effettivamente determinabile. Questo spiega anche perché nello sviluppo dell'analisi sintattica di insiemi di formule ci si sia sempre fermati a risultati di semidecidibilità senza riuscire ad arrivare a più auspicabili risultati di decidibilità, magari attraverso altre modalità di analisi: il fatto che l'insieme dei teoremi non sia effettivamente determinabile implica che non può esistere alcun metodo di analisi sintattica che porti ad un risultato di decidibilità.

Uno potrebbe dire che di fronte ad un enunciato tale che né lui né la sua negazione sono deducibili da una teoria assiomatizzabile, si possono costruire due nuove teorie, una aggiungendo come assioma quell'enunciato e l'altra aggiungendo come assioma la negazione di quello, teorie che saranno entrambe consistenti se la teoria iniziale lo era. Così si potrebbe ipotizzare che la non completezza derivasse semplicemente dal non essersi ricordati di inserire opportuni enunciati tra gli assiomi. Ma non è così perché sia l'una che l'altra teoria che si sono ottenute sono ancora assiomatizzabili, ancora contengono l'aritmetica di Peano, e sono ancora incomplete (per quanto dimostrato) e, per ciascuna delle nuove teorie, ci sarà un ulteriore enunciato tale che né lui né la sua negazione saranno deducibili da quella teoria.

Quanto visto afferma che data una teoria consistente ed assiomatizzabile esiste un enunciato tale che né lui né la sua negazione sono deducibili dalla teoria stessa. Ma non dice se si può indicare esplicitamente un tale enunciato. Gödel (nel risultato migliorato da Rosser) lo fece indicando l'enunciato che afferma, attraverso la codifica, che non esiste una deduzione di se stesso ma che esiste una deduzione della sua negazione.

Riassumendo, il teorema di Gödel afferma che se una teoria assiomatizzabile includente l'aritmetica di Peano è consistente, allora né l'enunciato che dice, attraverso la codifica, di non essere deducibile in quella teoria mentre la sua negazione lo è, né la sua negazione sono deducibili dalla teoria data. Questa intera dimostrazione di Gödel può essere a sua volta codificata in modo effettivo e rappresentata nella teoria concludendo con una implicazione il cui antecedente indica la consistenza della teoria e il conseguente rappresenta che si è dimostrata la non dimostrabilità di un certo enunciato e della sua negazione. Ma quell'enunciato affermava la propria indimostrabilità e la dimostrabilità della sua negazione, sicché, se si assume la consistenza si dimostra la negazione di quell'enunciato che lo stesso teorema di Gödel dice che non può essere dimostrato. L'unico modo per non cadere in contraddizione è concludere che l'antecedente, che afferma attraverso la codifica la consistenza della stessa teoria, non può essere dimostrato. Questo è appunto il secondo teorema di Gödel che si può enunciare dicendo che una teoria assiomatizzabile e consistente che contenga l'aritmetica di Peano non può (attraverso la codifica) dimostrare la propria consistenza (se si potesse ottenere ciò si sarebbe immediatamente dimostrato che la stessa teoria è non consistente).

Quest'ultimo risultato è molto potente e ricordato in ambiti anche molto lontani dalla logica. Bisogna stare molto attenti a non estrapolarne il significato anche oltre dove arriva. Tuttavia ha rilevanti conseguenze per le teorie matematiche. Ad esempio, applicato proprio all'aritmetica di Peano (che non è altro che quella parte dell'aritmetica che conosciamo abbastanza e che usiamo quotidianamente) dice che non si potrà mai mostrare che è non contraddittoria a partire dalla stessa teoria, o da una teoria più debole: se mai qualcuno dovesse dimostrare ciò, si potrebbe immediatamente concludere che è contraddittoria, e dunque inutile. Sicché ci si trova nella curiosa situazione di credere che sia non contraddittoria e di sperare che nessuno lo dimostri mai. L'unico modo per giustificare la credibilità dell'aritmetica di Peano (a causa della sua non contraddittorietà) è basandosi su teorie ancora più potenti (ad esempio la teoria degli insiemi), ma allora sarà ancora più difficile credere che queste siano consistenti, tanto più che anche per esse continua a valere il secondo teorema di Gödel e non potranno dimostrare la propria consistenza che potrà essere

eventualmente giustificata ricorrendo a teorie ancora più forti e con lo stesso problema.

Alla fine di questo percorso dove siamo arrivati?

Dopo aver introdotto e studiato gli strumenti di un linguaggio formale costruito al meglio (e il teorema di completezza indicava che il lavoro svolto era buono), ci si proponeva di cercare di precisare delle nozioni attraverso la loro descrizione mediante lo stesso linguaggio. Ci si è accorti che ciò può essere fatto per quelle nozioni sono precisabili in una struttura di cardinalità indicata da un fissato numero naturale. Inoltre altre nozioni, quelle che abbiamo chiamate assolute, sono descrivibili con il linguaggio anche se non è rispettata la limitazione precedente. Tuttavia si è visto che ci sono nozioni non assolute, e tra queste anche alcune molto rilevanti per la matematica, che non sono precisabili univocamente mediante descrizioni in un linguaggio formale per quanto questo possa essere costruito bene; addirittura tutte le strutture infinite non possono essere completamente precisate attraverso il linguaggio a causa delle non categoricità delle loro teorie.

Vista l'impossibilità di raggiungere i traguardi auspicabili mediante il linguaggio, si è accennato al tentativo di potersi accontentare di quanto è raggiungibile con il solo linguaggio: opportune teorie che però avrebbero dovuto essere effettive, sintatticamente complete e dimostrabilmente consistenti. Tuttavia la precisazione della nozione di effettività, la capacità di teorie sufficientemente forti (includenti l'aritmetica di Peano) di parlare di se stesse attraverso la codifica, l'effettività della codifica delle nozioni sintattiche, la rappresentabilità, nell'aritmetica di Peano, delle funzioni effettivamente calcolabili, hanno permesso di dimostrare che non esistono teorie sufficientemente forti assiomatizzabili e sintatticamente complete, e che queste teorie non sono in grado di dimostrare la codificazione della propria consistenza. Così anche un approccio puramente formale non giustifica l'accettabilità delle nozioni basilari della matematica (e di molte altre scienze) in base ad una loro presentazione attraverso il linguaggio.

Come giustificare allora l'accettazione di importanti nozioni matematiche? Direi che, osservando un matematico all'opera, si nota che egli si raffigura degli enti, e per lo stesso fatto di esserseli potuti raffigurare pensa all'esistenza della loro struttura e alla conseguente consistenza degli enunciati veri in questa struttura. Quando poi vuole mostrare qualcosa che riguarda quella struttura, o tutte le strutture con proprietà in comune, non segue un calcolo logico, non si appoggia al linguaggio, ma cerca di vedere tutte le strutture che vuole considerare (anche se ciò è pressoché impossibile) e cerca di notare come l'affermazione che vuole mostrare sia vera in tutte quelle strutture. Spesso, invece di considerare tutte le strutture con certe proprietà, se ne considera una tipica e si fa vedere che le conseguenze che si vogliono dimostrare si ottengono tenendo conto, nella struttura tipica, solo di aspetti comuni a tutte le strutture che andrebbero considerate. Così, ad esempio, quando si vogliono mostrare certe proprietà di triangoli con certe particolarità, non si considerano tutti i triangoli di quel tipo, ma uno solo che rappresenti tutti gli altri del tipo voluto, e si fanno osservazioni su quel triangolo che si giustificano solo in base alle proprietà comuni a tutta quella classe di triangoli, sicché tali osservazioni avrebbero potuto essere fatte su ciascun triangolo di quella classe, fino a raggiungere, se è possibile, le conseguenze che si volevano dimostrare. Questo metodo empirico non è poi così sicuro perché non sempre ci si accorge che certe osservazioni sono indipendenti da certe premesse che si

danno per scontate senza averle esplicitate. Era uno slogan di grandi matematici l'affermazione "hypothesis non fingo", ma purtroppo è capitato anche a grandi matematici (Euclide per citarne uno) di non essersi accorti che stavano supponendo delle caratteristiche relevantissime (nello specifico l'ipotesi di continuità) per arrivare a delle affermazioni (il quarto teorema degli "Elementi" nel caso ricordato) che dunque non seguono dalle sole ipotesi esplicitate e non sono vere in tutte le strutture che rendono vere le ipotesi, ma solo in quelle con in più le caratteristiche trascurate.

Dunque i matematici non usano la logica e non sanno che farsene! In gran parte questa affermazione è vera, anche perché spesso non possono usarla non conoscendola. Ma, al di là di questa battuta amara, è vero che per gran parte dell'attività del matematico la logica non serve, anche se in genere il matematico pretenderebbe che quanto ottenuto potrebbe essere anche controllato con la logica, se se ne avesse il tempo e la pazienza per farlo. Ma il matematico che si domanda anche il perché di certi sviluppi e che significato ha porsì certi problemi (atteggiamento indispensabile per la didattica della matematica), deve affrontare il problema della logica, fosse altro che per rendersi conto che da questi studi non si hanno le risposte attese, ma l'apertura ad una problematicità mai esaurita. Inoltre non è necessario vedere la logica solo dal punto di vista fondazionale, ed allora (accettati per altra via i fondamenti della matematica) la logica permette costruzioni di strutture matematiche insospettite, utili a leggere ed affrontare, anche da punti di vista alternativi, le tradizionali problematiche fondamentali della matematica e quelle che continuano ad aggiungersi.