

Sistemi a Tempo Reale

Informatica - Tiziano Villa

12 Gennaio 2009

Nome e Cognome:

Matricola:

Posta elettronica:

problema	punti massimi	i tuoi punti
problema 1	13	
problema 2	9	
problema 3	8	
totale	30	

1. (a) Si considerino le due macchine a stati finiti seguenti:

Macchina M' :

- stati: $s'_1, s'_2, s'_{3a}, s'_{3b}$ con s'_1 stato iniziale;
- transizione da s'_1 a s'_2 : $\bullet/0$,
transizione da s'_2 a s'_{3a} : $\bullet/0$,
transizione da s'_2 a s'_{3b} : $\bullet/0$,
transizione da s'_{3a} a s'_2 : $\bullet/1$,
transizione da s'_{3b} a s'_1 : $\bullet/1$.

Macchina M'' :

- stati: s''_1, s''_2, s''_3 con s''_1 stato iniziale;
- transizione da s''_1 a s''_2 : $\bullet/0$,
transizione da s''_2 a s''_3 : $\bullet/0$,
transizione da s''_3 a s''_2 : $\bullet/1$,
transizione da s''_3 a s''_1 : $\bullet/1$.

Si risponda in ordine alle seguenti domande (si indichi sempre il numerale romano in ogni risposta):

- Si disegnino i diagrammi di transizione delle due macchine.
- Si classifichino le macchine rispetto al determinismo.

Traccia di soluzione.

M' e' nondeterministica, ma non pseudo-nondeterministica.

M'' e' nondeterministica, ma non pseudo-nondeterministica.

- Si trovi una simulazione di M' da parte di M'' , se esiste.

Traccia di soluzione.

M'' simula M' come mostrato dalla relazione:

$$R_{M'-M''} = \{(s'_1, s''_1), (s'_2, s''_2), (s'_{3a}, s''_3), (s'_{3b}, s''_3)\}.$$

- Si trovi una simulazione di M'' da parte di M' , se esiste.

Traccia di soluzione.

M' non simula M'' . Se infatti si cercasse di costruire una simulazione si dovrebbe avere:

$$(s''_1, s'_1) \xrightarrow{\bullet/0} (s''_2, s'_2), \text{ poi } (s''_2, s'_2) \xrightarrow{\bullet/0} \begin{cases} \text{caso a) } (s''_3, s'_{3a}) \\ \text{oppure} \\ \text{caso b) } (s''_3, s'_{3b}) \end{cases}$$

da cui nel caso a) si avrebbe $(s''_3, s'_{3a}) \xrightarrow{\bullet/1} \begin{cases} \text{sia } (s''_2, s'_2) \\ \text{che } (s''_1, s'_1) \end{cases}$ e poi

$$(s_1'', s_2') \xrightarrow{\bullet/0} \begin{cases} \text{caso c)} & (s_2'', s_{3a}') \\ \text{oppure} & \\ \text{caso d)} & (s_2'', s_{3b}') \end{cases} \quad \text{ma in entrambi i casi c) e d) non}$$

si puo' proseguire perche s_2'' puo' produrre solo 0 mentre sia s_{3a}' che s_{3b}' possono produrre solo 1;

nel caso b) si avrebbe $(s_3'', s_{3b}') \xrightarrow{\bullet/1} \begin{cases} \text{sia} & (s_1'', s_1') \\ \text{che} & (s_2'', s_1') \end{cases}$ e poi $(s_2'', s_1') \xrightarrow{\bullet/0}$

(s_3'', s_2') , ma non si puo' proseguire perche s_3'' puo' produrre solo 1 mentre s_2' puo' produrre solo 0.

Quindi non esiste una simulazione di M'' da parte di M' .

- v. Si trovi una bisimulazione tra le due macchine, se esiste.

Traccia di soluzione.

Non puo' esistere una bisimulazione, perche' non esiste neppure una simulazione di M'' da parte di M' .

- vi. A questo punto che cosa si puo' dedurre circa il confronto dei comportamenti di M'' ed M' ?

Traccia di soluzione.

Dal fatto che M' e' simulato da M'' si ha che M' raffina M'' , cioe' $M' \subseteq M''$, mentre nulla si puo' dire nell'altra direzione.

- vii. Si minimizzi la macchina M' (con l'algoritmo che trova una macchina bisimile minima) e si mostri il diagramma di transizione della macchina minimizzata cosi' trovata $\min(M')$.

Traccia di soluzione.

La macchina M' e' gia' minimizzata.

- viii. Si minimizzi la macchina M'' (con l'algoritmo che trova una macchina bisimile minima) e si mostri il diagramma di transizione della macchina minimizzata cosi' trovata $\min(M'')$.

Traccia di soluzione.

La macchina M'' e' gia' minimizzata.

- ix. Si determinizzi la macchina M' e si mostri il diagramma di transizione della macchina deterministica cosi' trovata $\det(M')$.

Traccia di soluzione.

Macchina $\det(M')$:

- stati: $\{s_1'\}, \{s_2'\}, \{s_{3a}', s_{3b}'\}, \{s_1', s_2'\}, \{s_2' s_{3a}', s_{3b}'\}$ con $\{s_1'\}$ stato iniziale;

- transizione da $\{s'_1\}$ a $\{s'_2\}$: $\bullet/0$,
- transizione da $\{s'_2\}$ a $\{s'_{3a}, s'_{3b}\}$: $\bullet/0$,
- transizione da $\{s'_{3a}, s'_{3b}\}$ a $\{s'_1, s'_2\}$: $\bullet/1$,
- transizione da $\{s'_1, s'_2\}$ a $\{s'_2, s'_{3a}, s'_{3b}\}$: $\bullet/0$,
- transizione da $\{s'_2, s'_{3a}, s'_{3b}\}$ a $\{s'_1, s'_2\}$: $\bullet/1$,
- transizione da $\{s'_2, s'_{3a}, s'_{3b}\}$ a $\{s'_{3a}, s'_{3b}\}$: $\bullet/0$.

- x. Si determinizzi la macchina M'' e si mostri il diagramma di transizione della macchina deterministica così trovata $\det(M'')$.

Traccia di soluzione.

Macchina $\det(M'')$:

- stati: $\{s''_1\}, \{s''_2\}, \{s''_3\}, \{s''_1, s''_2\}, \{s''_2, s''_3\}$ con $\{s''_1\}$ stato iniziale;
- transizione da $\{s''_1\}$ a $\{s''_2\}$: $\bullet/0$,
- transizione da $\{s''_2\}$ a $\{s''_3\}$: $\bullet/0$,
- transizione da $\{s''_3\}$ a $\{s''_1, s''_2\}$: $\bullet/1$,
- transizione da $\{s''_1, s''_2\}$ a $\{s''_2, s''_3\}$: $\bullet/0$,
- transizione da $\{s''_2, s''_3\}$ a $\{s''_1, s''_2\}$: $\bullet/1$,
- transizione da $\{s''_2, s''_3\}$ a $\{s''_3\}$: $\bullet/0$.

- xi. Si trovi una simulazione di $\det(M')$ da parte di $\det(M'')$, se esiste; una simulazione di $\det(M'')$ da parte di $\det(M')$, se esiste; una bisimulazione tra $\det(M')$ e $\det(M'')$, se esiste.

Traccia di soluzione.

I grafi delle transizioni delle macchine $\det(M')$ e $\det(M'')$ sono isomorfi (a meno di ridenominazione degli stati) e perciò le macchine $\det(M')$ e $\det(M'')$ sono uguali (e in particolare bisimili), e quindi anche M' e M'' sono uguali.

- xii. Si commentino i risultati precedenti.

Traccia di soluzione.

Con lo strumento della simulazione si è potuto stabilire solo che M' raffina M'' , cioè $M' \subseteq M''$. Per sapere se valga anche l'uguaglianza, si è ricorsi alla determinizzazione di entrambe che ha prodotto due macchine pseudo-nondeterministiche con gli stessi grafi delle transizioni, permettendoci di concludere che sono uguali (e che perciò valeva anche l'inclusione nella direzione opposta).

(b) Si consideri la macchina a stati finiti seguente:

Macchina M :

- stati: s_1, s_2, s_3 con s_1 stato iniziale;
- una variabile d'ingresso $I = \{1, 2, 3, \perp\}$ e una variabile d'uscita $U = \{1, 2, 3, \perp\}$;
- transizione da s_1 a s_1 : 1/2,
transizione da s_1 a s_1 : 3/2,
transizione da s_1 a s_2 : 2/2,
transizione da s_2 a s_2 : 1/3,
transizione da s_2 a s_2 : 2/3,
transizione da s_2 a s_3 : 3/3,
transizione da s_3 a s_3 : 2/1,
transizione da s_3 a s_3 : 3/1,
transizione da s_3 a s_1 : 1/1.

Si chiuda la macchina ad anello, connettendo l'uscita all'ingresso. La composizione e' ben formata? Se si, si costruisca la macchina composta, e si elenchino le prime 10 uscite (cioe' le uscite in corrispondenza ai primi 10 ticchettii dell'orologio esterno della composizione).

Traccia di soluzione.

La composizione e' ben formata perche' in ogni stato si puo' determinare l'uscita indipendentemente dall'ingresso (macchina di Moore).

La macchina composta segue.

Macchina M_{comp} :

- stati: s_1, s_2, s_3 con s_1 stato iniziale;
- una variabile d'ingresso $I = \{react, \perp\}$ e una variabile d'uscita $U = \{1, 2, 3, \perp\}$;
- transizione da s_1 a s_2 : $react/2$,
transizione da s_2 a s_3 : $react/3$,
transizione da s_3 a s_1 : $react/1$.

Le prime 10 uscite sono: 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2.

2. Si consideri il seguente automa temporizzato:

- locazione: l_1 , dove l_1 e' la locazione iniziale con condizioni iniziali $s(0) := 0$;
- dinamica della locazione l_1 : $\dot{s}(t) = 1, s(t) \leq 3, y(t) = 2.s(t)$.
- transizione da l_1 a l_1 : $A/y(t), s(t) := 0$,
dove $A = \{s(t) \mid s(t) = 3\}$,
(la sintassi delle annotazioni di una transizione e' *guardia/uscita, azione*);
- ingresso assente perche' il sistema e' autonomo;
- uscita $y(t) \in \text{Real}$.

- (a) Si disegni il diagramma di transizione degli stati dell'automa, annotando con precisione locazioni e transizioni.

- (b) Si disegni sugli assi delle coordinate (con il tempo in ascissa) la variabile di stato $s(t)$ e quella d'uscita $y(t)$ nell'intervallo $t \in [0, 12]$.

Traccia di risposta.

I grafici dello stato $s(t)$ e dell'uscita $y(t)$ sono tracciati in Fig. 1.

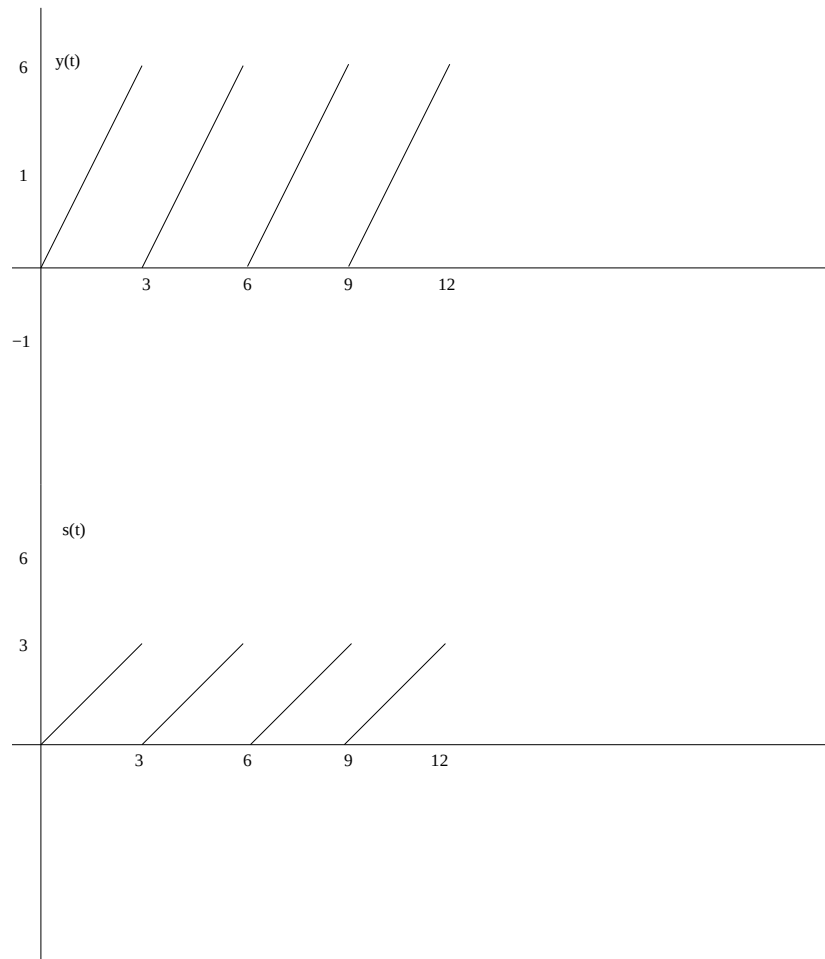


Figure 1: In basso il tracciato di $s(t)$ e in alto il tracciato di $y(t)$.

- (c) Esiste una bisimulazione finita di un automa temporizzato (le cui uniche dinamiche sono orologi del tipo $\dot{s}(t) = 1$) ? Se si, si spieghi nelle linee generali la costruzione che permetterebbe di ottenere tale risultato.

Traccia di risposta.

La risposta e' si'. Si vedano le dispense per la costruzione di un automa finito che corrisponde alla bisimulazione.

3. (a) i. Si enunci il teorema di schedulabilita' per l'algoritmo RM.

Traccia di soluzione.

Un insieme di n processi periodici e' schedulabile con l'algoritmo RM se

$$\sum_{i=1}^n C_i/T_i \leq n(2^{1/n} - 1).$$

- ii. Si enunci il teorema di schedulabilita' per l'algoritmo RM ottenuto mediante il limite iperbolico (Hyperbolic Bound).

Traccia di soluzione.

Un insieme di n processi periodici e' schedulabile con l'algoritmo RM se

$$\prod_{i=1}^n (C_i/T_i + 1) \leq 2.$$

- iii. Si enunci il teorema di schedulabilita' per l'algoritmo EDF.

Traccia di soluzione.

Un insieme di n processi periodici e' schedulabile con l'algoritmo EDF se e solo se

$$\sum_{i=1}^n (C_i/T_i) \leq 1.$$

- iv. Nel caso di due processi, si disegnino qualitativamente le regioni di schedulabilita' e si commenti il grafico risultante.

Traccia di soluzione.

Si rinvia alle dispense per i grafici. L'asse delle ascisse corrisponde a $U_1 = C_1/T_1$, quello delle ordinate a $U_2 = C_2/T_2$.

La regione di schedulabilita' secondo il primo teorema e' limitata dalla retta che interseca gli assi U_1 e U_2 in $2(2^{1/2} - 1) \approx 0,828$.

La regione di schedulabilita' secondo il secondo teorema (limite iperbolico) e' limitata dall'iperbole che interseca gli assi U_1 e U_2 in 1 ed e' tangente in un punto mediano alla retta del punto precedente.

La regione di schedulabilita' secondo il terzo teorema (algoritmo EDF) e' limitata dalla retta che interseca gli assi U_1 e U_2 in 1.

L'analisi dei contenimenti tra queste regioni illustra la validita' rispettiva dei due criteri sufficienti per RM e del criterio necessario/sufficiente per EDF.

(b) Si considerino i seguenti processi che eseguono su un processore singolo:

processo	tempo di esecuzione	periodo/scadenza
P1	1	10
P2	18	100
P3	2	20
P4	5	50
P5	x	25

Si trovi il tempo di esecuzione massimo per P5 per cui esiste un assegnamento secondo l'algoritmo RM e si costruisca tale assegnamento.

Traccia di soluzione.

Poiche' $m.c.m.(10, 100, 20, 50, 25) = 100$, in un intervallo di 100 unita' deve essere $10 * P1 + 1 * P2 + 5 * P3 + 2 * P4 + 4 * P5 \leq 100$, da cui $10 + 18 + 10 + 10 + 4 * x \leq 100$ e $x \leq 13$. In altri termini per la condizione necessaria di occupazione massima, si deve avere $x \leq 13$.

Per verificare se possa essere $x = 13$ bisogna provare a costruire un assegnamento RM (la condizione sufficiente per RM non e' soddisfatta). Esso esiste come mostrato di seguito.

P1	X	-	-	-	-	-	-	-		X	-	-	-	-	-	-	-		X	-	-	-	-	-	-	-	-		
P2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	X	
P3	-	X	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	X	X	-	-	-	-	-	-	-	
P4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	X	X	X	-	-	-	-	-	-	
P5	-	-	X	X	X	X	X	X	X	-	X	X	X	X	X	-	-	-	-	-	-	-	-		X	X	X	X	-
																									X	X	X	X	X

P1	X	-	-	-	-	-	-	-- X	-	-	-	-	-	-	X	-	-	-	-	-	-	X	-	-	-	-	-	-		
P2	-	-	-	X	X	X	X	X	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	X	X	-	-	-	
P3	-	X	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	- -	X	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-		
P4	-	-	-	-	-	-	-	-	- -	-	-	-	-	-	-	-	-	-	X	X	X	-	X	X	-	-	-	-		
P5	-	-	-	-	-	-	-	- -	X	X	X	X	X	X	X	-	-	X	X	X	X	-	-	-	-	-	X	X	X	X

P1	X	-	-	-	-	-	-	-	-	X	-	-	-	-	-	-	-
P2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	X	X	X	X	X	X	X
P3	-	X	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
P4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
P5	-	-	-	X	X	X	X	X	X	X	-	X	-	-	-	-	-