ESERCIZI DI ALGEBRA LINEARE
E
COMPLEMENTI DI GEOMETRIA

Foglio 5*

Esempio 1. Dire se l'applicazione

$$f: \begin{array}{ccc} M_2(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} & \longmapsto & (a_{11}+a_{21}, a_{12}+a_{22})^t \end{array}$$

è lineare.

Sol. Dobbiamo mostrare che per ogni $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ e ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $f(\alpha A + \beta B) = \alpha f(A) + \beta(A)$. Siano $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$.

$$\begin{aligned} f(\alpha A + \beta B) &= (\alpha a_{11} + \alpha a_{21} + \beta b_{11} + \beta b_{21}), \alpha a_{12} + \alpha a_{22} + \beta b_{12} + \beta b_{22})^t \\ &= \alpha(a_{11}+a_{21}, a_{12}+a_{22})^t + \beta(b_{11}+b_{21}, b_{12}+b_{22})^t \\ &= \alpha f(A) + \beta f(B) \end{aligned}$$

Quindi l'applicazione f è lineare.

Esempio 2. Sia $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definito da $T(x,y,z) = (2y+z, x-4y, 3x)^t$ un'applicazione lineare di $\mathbb{R}^3$ in sè scritta rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ e sia $\mathcal{F} = \{f_1 := (1,1,1)^t,\ f_2 := (1,1,0)^t,\ f_3 := (1,0,0)^t\}$ un insieme di vettori di $\mathbb{R}^3$.

1. Dimostrare che $\mathcal{F}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
2. Scrivere la matrice $T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}}$ associata a T rispetto alla base canonica.
3. Scrivere la matrice del cambiamento di coordinate $M_{\mathcal{F}\leftarrow\mathcal{E}}$ dalla base canonica alla base $\mathcal{F}$.
4. Scrivere la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{F}$.

Sol.

1. L'insieme $\mathcal{F}$ definisce una base di $\mathbb{R}^3$ in quanto la matrice delle colonne $C(f_1, f_2, f_3)$ ha rango 3.
2. $$T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
3. La matrice $M_{\mathcal{F}\leftarrow\mathcal{E}}$ è l'inversa della matrice $M_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{F}}$, che ha per colonne i vettori f_1, f_2 e f_3, in quanto essi sono scritti rispetto alla base canonica. Quindi
$$M_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
e
$$M_{\mathcal{F}\leftarrow\mathcal{E}} = (M_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{F}})^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -10 & \end{bmatrix}$$

*Sono a grato a quanti mi indicheranno i molti errori presenti in questi fogli, al fine di fornire uno strumento migliore a quanti lo riterranno utile, e-mail: sansonetto@sci.univr.it

4.
$$T_{\mathcal{F}\leftarrow\mathcal{F}} = M_{\mathcal{F}\leftarrow\mathcal{E}}\, T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}}\, M_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -6 & -6 & -2 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Esempio 3. Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, l'applicazione lineare $f_\alpha : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $f_\alpha(x, y, z) = (-x + (2-\alpha)y + z,\, x - y + z,\, x - y + (4-\alpha)z)^t$.

1. Scrivere la matrice associata a f_α rispetto alla base canonica su dominio e codominio.
2. Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ f_α è iniettiva.
3. Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ f_α è suriettiva.
4. Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ il vettore $(1, 1, 1)^t \in Im(f_\alpha)$.
5. Determinare $N(f_1)$.
6. Costruire, se possibile, un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $Im(g) = Im(f_0)$.
7. Costruire, se possibile, un'applicazione lineare $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $N(h) = N(f_1)$.

Sol.

1. Dall'espressione di $f_\alpha(x, y, z)$ si ricava che $f_\alpha(e_1) = (-1, 1, 1)^t$, $f_\alpha(e_2) = (2-\alpha, -1, -1)^t$ e $f_\alpha(e_3) = (1, 1, 4-\alpha)^t$ e quindi la matrice associata a f_α rispetto alla base canonica su dominio e codominio è
$$(f_\alpha)_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}} \begin{bmatrix} -1 & 2-\alpha & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 4-\alpha \end{bmatrix}$$

2. Basta determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ il vettore nullo **0** è l'unica soluzione del sistema lineare omogeneo
$$\begin{cases} -x + (2-\alpha)y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x - y + (4-\alpha)z = 0 \end{cases}$$
Dobbiamo cioè determinare per quali α la matrice $(f_\alpha)_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}}$ ha rango 3. Applicando l'eliminazione di Gauss alla matrice $(f_\alpha)_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}}$ si ottiene la matrice
$$\begin{bmatrix} -1 & 2-\alpha & 1 \\ 0 & 1-\alpha & 2 \\ 0 & 0 & 2-\alpha \end{bmatrix}$$
che ha rango 3 se e solo se $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq 3$. Quindi f_α è iniettiva se e solo se $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq 3$.

3. Essendo f_α un'applicazione lineare di $\mathbb{R}^3$ in sè dal Teorema nullità + rango si ricava che f_α è iniettiva se e solo se è suriettiva, quindi f_α è suriettiva se e solo se $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq 3$.

4. È sufficiente determinare per quali α il sistema
$$\begin{cases} -x + (2-\alpha)y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ x - y + (4-\alpha)z = 1 \end{cases} \tag{1}$$
ammette soluzione. Dal punto precedente sappiamo che per ogni $\alpha \neq 1, 3$ f_α è suriettiva e quindi per tali α il vettore $(1, 1, 1)^t$ sta sicuramente in $Im(f_\alpha)$. Controlliamo cosa accade per $\alpha = 1$ e $\alpha = 1$.
• Sia $\alpha = 1$ e applichiamo al sistema (1) l'eliminazione di Gauss, ottenendo la matrice
$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La colonna dei termini noti di tale matrice è dominante, quindi il sistema lineare (1) non ammette soluzione e cioè il vettore $(1,1,1)^t$ non appartiene all'immagine di f_1.
• Se $\alpha = 3$ il sistema (1) è equivalente al sistema di matrice

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La colonna dei termini noti non è dominante, quindi il sitema ammette soluzione, in particolare ammette infinite soluzioni dipendenti da un paramentro. Di conseguenza il vettore $(1,1,1)^t$ sta nell'immagine di f_3.

5. $N(f_1) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 | \ (f_1)_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}}\mathbf{v} = \mathbf{0}\}$. Dobbiamo cioè determinare una base per lo spazio delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases}$$

Abbiamo già determinato in precedenza la forma ridotta della matrice associata a tale sistema, da cui si ricava che $N(f_1) =< (1,1,0)^t >$.

6. I punti rimanenti sono lasciati per esercizio.

7.

Esercizio 4. Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale e sia $\mathcal{B}_V = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ una sua base.

1. Esiste un'applicazione lineare ϕ di V in sè tale che $\phi(\mathbf{v_1}) = 4\mathbf{v_1} - b\mathbf{v_2}$, $\phi(\mathbf{v_2}) = \mathbf{v_1} + v_2$ e $\phi(\mathbf{v_1} - 3\mathbf{v_2}) = \mathbf{v_1} - 10\mathbf{v_2}$? In caso affermativo determinarle tutte.

2. Determinare un'applicazione lineare φ di V in sè (esibirne una matrice associata) tale che $\varphi(\mathbf{v_1}) = \mathbf{v_1} - \mathbf{v_2}$, $\varphi(\mathbf{v_1} + 2\mathbf{v_2}) = \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}$ e $\mathbf{v_3} - \mathbf{v_1} \in N(\varphi)$. φ è unica?

3. Esiste un'applicazione lineare f di V in sè tale che $f(\mathbf{v_1}) = \mathbf{v_1} - \mathbf{v_2}$, $f(\mathbf{v_2}) = 3\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}$ e $f(\mathbf{v_1} - \mathbf{v_2}) = -2\mathbf{v_1} - 2\mathbf{v_2}$? In caso affermativo determinarle tutte.

Esercizio 5. Sia $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $f(x,y,z) = (x+y, x+y, z)^t$.

1. Scrivere la matrice associata a f rispetto alla base canonica.

2. Determinare $N(f)$ e $Im(f)$.

3. Mostrare che l'insieme $\mathcal{B} = \{b_1 := (1,1,-1)^t,\ b_2 := (1,1,0)^t,\ b_3 := (1,-1,0)^t\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

4. Scrivere la matrice associata a f rispetto alla base canonica nel dominio e alla base $\mathcal{B}$ nel codominio.

Esercizio 6. Sia T l'applicazione lineare di $\mathbb{R}^3$ in sè definita da $T(e_1) = (3,2,1)^t$, $T(-e_2) = (1,-2,3)^t$ e $T(e_1 - e_3) = (1,-2,3)^t$. Si consideri inoltre l'applicazione lineare $S_\alpha : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $S_\alpha(1,2) = (6,4,2)^t$ e $S_\alpha(2,-1) = (\alpha,0,4)^t$.

1. Scrivere la matrice associata a T rispetto alla base canonica.

2. Determinare $N(T)$ e $Im(T)$. Calcolarne la dimensione ed esibirne una base. T è iniettiva? È Suriettiva?

3. Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ $Im()T = Im(S_\alpha)$, inoltre, calcolare la dimensione dello spazio $Im(T) \cap Im(S_\alpha)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 7. Si consideri al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la famiglia di applicazioni lineari $T_\alpha \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ definite da $T_\alpha(x,y,z) = \begin{bmatrix} x+\alpha y & 0 \\ z & x - \alpha y \end{bmatrix}$.

1. Scrivere la matrice associata a T_α rispetto alle basi canoniche degli spazi in questione.

2. Determinare, al variere di $\alpha \in \mathbb{R}$, $N(T_\alpha)$ e $Im(T_\alpha)$.

3. Data la matrice $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, determinare la preimmagine di B relativa a T_α.

4. Posto $\alpha = 1$ e definita la matrice $B_\mu = \begin{bmatrix} 1 & \mu \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, determinare la preimmagine di B_μ rispetto a T_1, al variare di $\mu \in \mathbb{R}$.

Esercizio 8. Considerare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la famiglia di applicazioni lineari $T_\alpha : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^{\leq 2}[x]$[1] definite da

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longmapsto a + x(b + \alpha c) + x^2(b - \alpha c)$$

1. Scrivere lamatrice associata a T_α rispetto alle basi canoniche degli spazi in questione.
2. Dire per quali valori di α il polinomio $2x^2 + x + 1$ appartiene a ImT_α, quindi determinarne la preimmagine.
3. Posto $A := \cup_{\alpha \in \mathbb{R}} N(T_\alpha)$, determinare lo spazio generato da A.
4. Determinare uno sottospazio vettoriale $W \leq M_2(\mathbb{R})$ tale che $A \oplus W = M_2(\mathbb{R})$.

Esercizio 9. Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale di dimensione 3 e sia $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ una sua base.

1. Verificare che esiste ed è unica, per ogni $\beta \in \mathbb{R}$, l'applcazione lineare $T = T_\beta$ definita da $T_\beta(b_1 + b_2) = b_1 - b_2$, $T_\beta(b_1 - b_2) = b_1 - b_2$ e $T(b_3) = \beta b_3 + b_1 - b_2$.
2. Scrivere la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ su dominio e codominio.
3. Determinare, al variare di $\beta \in \mathbb{R}$, una base di $N(T_\beta)$ e una base di $Im(T_\beta)$.
4. Determinare, al variare di $\beta \in \mathbb{R}$, la preimmagine di $\mathbf{v} = b_1 - b_2 + b_3$.

[1] $\mathbb{R}^{\leq 2}[x]$ denota lo spazio dei polinomi di grado minore o uguale a 2.