Esercizi di sintesi logica per SPA

Tiziano Villa

Anno Accademico 2007-8

Nome e Cognome:
Matricola:
Posta elettronica:

problema	punti massimi	i tuoi punti
problema 1	2	
problema 2	2	
problema 3	3	
problema 4	2	
problema 5	2	
problema 6	2	
problema 7	2	
problema 8	3	
totale	18	

1. Data la definizione di cofattore generalizzato come funzione incompletamente specificata

$$co(f, g) = (fg, \bar{g}, \bar{f}g),$$

si dimostri che che il cofattore di Shannon f_x e' una copertura di $co(f, x)$, cioe'

$$fx \subseteq f_x \subseteq fx + \bar{x};$$

inoltre si dimostri che e' l'unica copertura di $co(f, x)$ indipendente da x.

Si dimostrino le seguenti proprieta' del cofattore di Shannon:

(a) $xf_x + \overline{x}f_{\overline{x}} = f$

(b) $(f_x)_y = f_{xy}$

(c) $(fg)_x = f_x g_x$

(d) $(\overline{f})_x = \overline{(f_x)}$

Si dimostrino le seguenti proprieta' del cofattore generalizzato:

(a) $f = g\ co(f, g) + \overline{g}\ co(f, \overline{g})$

(b) $co(co(f, g), h) = co(f, gh)$

(c) $co(fg, h) = co(f, h)co(g, h)$

(d) $co(\overline{f}, g) = \overline{co(f, g)}$

2. (a) Si dimostri che $\overline{f} = x\overline{(f_x)} + \overline{x}\overline{(f_{\overline{x}})}$.

   (b) Si applichi il paradigma di ricorsione monotona per complementare la funzione:

$$f = xy'z' + wxy' + wy'z + wx'z + wyz + xyz + w'xy'z$$

   usando il processo di fusione indicato dal punto precedente.

   (c) Si complementi f usando la legge di De Morgan.

   (d) Si calcoli

$$U \sharp \mathcal{F},$$

   dove U e' il cubo universale e $\mathcal{F}$ e' la copertura data sopra

$$\mathcal{F} = \{xy'z', wxy', wy'z, wx'z, wyz, xyz, w'xy'z\}.$$

   L'operazione $\sharp$ tra due cubi α e β e' definita come segue:

$$\alpha \sharp \beta = \begin{cases} a_1.b_1' & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2.b_2' & \dots & a_n \\ \dots & & & \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n.b_n' \end{cases}$$

   Che cosa si ottiene ?

   (e) Si calcoli

$$U \sharp (U \sharp \mathcal{F}).$$

   Che cosa si ottiene ?

3. (a) Si dimostri che p e' un primo di f se e solo se e' un cubo massimale (un cubo massimale non e' contenuto in nessun altro cubo) dell'insieme che contiene i seguenti cubi:

   i. $p = qx$, q e' un primo di f_x, $q \not\subseteq f_{\bar{x}}$

   ii. $p = r\bar{x}$, r e' un primo di $f_{\bar{x}}$, $r \not\subseteq f_x$

   iii. $p = qr$, q e' un primo di f_x, r e' un primo di $f_{\bar{x}}$

   (b) Si dimostri il teorema precedente anche nel caso in cui la terza clausola iii. sia sostituita da

   iii. $p = \text{CONSENSO}(qx, r\bar{x})$, q e' un primo di f_x, r e' un primo di $f_{\bar{x}}$.

   L'operazione CONSENSO tra due cubi α e β e' definita come segue:

$$\text{CONSENSO}(\alpha, \beta) = \begin{cases} a_1 + b_1 & a_2.b_2 & \dots & a_n.b_n \\ a_1.b_1 & a_2 + b_2 & \dots & a_n.b_n \\ \dots & & & \\ a_1.b_1 & a_2.b_2 & \dots & a_n + b_n \end{cases}$$

   (c) Si consideri il risultato del calcolo $U \sharp (U \sharp \mathcal{F})$, eseguito per l'esercizio 2. (e). Data una qualsiasi copertura $\mathcal{F}$ di una funzione f, si puo' dimostrare un'affermazione generale sul risultato del calcolo $U \sharp (U \sharp \mathcal{F})$?

4. Date le funzioni

$$f_1 = \overline{a}\overline{b}c + \overline{a}b\overline{c} + \overline{a}\overline{b}\overline{c}$$
$$f_2 = \overline{a}bc + \overline{a}\overline{b}c + abc + \overline{a}b\overline{c}$$

(a) Si generino tutti i primi di f_1 usando la procedura monotona ricorsiva di generazione dei primi;

(b) Si generino tutti i primi di f_2 usando la procedura monotona ricorsiva di generazione dei primi;

(c) Si generi con l'algoritmo di tautologia la tavola di Quine-McCluskey ridotta di f_1;

(d) Si generi con l'algoritmo di tautologia la tavola di Quine-McCluskey ridotta di f_2;

Nota: in alternativa alla procedura monotona si possono calcolare i primi con l'algoritmo di espansione rispetto al complemento della funzione.

5. (a) Si generino tutti i primi della funzione multi-uscita (f_1, f_2) (dove f_1 e f_2 sono date nel problema precedente), usando l'algoritmo di espansione rispetto al complemento della funzione.

   (b) Si generi la tavola di Quine-McCluskey ridotta della funzione multi-uscita (f_1, f_2) del problema precedente:

$$f_1 = \overline{a}\overline{b}c + \overline{a}b\overline{c} + \overline{a}\overline{b}\overline{c}$$
$$f_2 = \overline{a}bc + \overline{a}\overline{b}c + abc + \overline{a}b\overline{c}$$

6. (a) Si considerino le seguenti due affermazioni:
Teorema Data una funzione $ff = (f, d, r)$, sia $\mathcal{F} = \mathcal{G} \cup \{\alpha\}$, dove $\mathcal{F}$ e' una copertura di ff ed α e' un implicante primo disgiunto da $\mathcal{G}$.
Allora α e' un primo essenziale se e solo se

$$\text{CONSENSO}(\mathcal{G}, \{\alpha\})$$

non copre α.

L'operazione CONSENSO tra due cubi α e β e' definita come segue:

$$\text{CONSENSO}(\alpha, \beta) = \begin{cases} a_1 + b_1 & a_2.b_2 & \dots & a_n.b_n \\ a_1.b_1 & a_2 + b_2 & \dots & a_n.b_n \\ \dots & & & \\ a_1.b_1 & a_2.b_2 & \dots & a_n + b_n \end{cases}$$

Nota:

- e' vuoto quando distanza ≥ 2;
- contiene un solo cubo quando distanza = 1;
- contiene n cubi quando distanza = 0.

Corollario Data una funzione $ff = (f, d, r)$, sia $\mathcal{F}$ una copertura di f, $\mathcal{D}$ una copertura di d e α un implicante primo di ff.
Allora α e' un primo essenziale se e solo se $\mathcal{H} \cup \mathcal{D}$ non copre α, dove

$$\mathcal{H} = \text{CONSENSO}((\mathcal{F} \cup \mathcal{D}) \sharp \alpha, \alpha),$$

e l'operazione $\sharp$ tra due cubi α e β e' definita come segue:

$$\alpha \sharp \beta = \begin{cases} a_1.b'_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2.b'_2 & \dots & a_n \\ \dots & & & \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n.b'_n \end{cases}$$

Si noti che invece di $\sharp$ si puo' usare l'operazione $\tilde{\sharp}$ definita come:

$$\alpha \tilde{\sharp} \beta = \begin{cases} a_1.b'_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1.b_1 & a_2.b'_2 & \dots & a_n \\ \dots & & & \\ a_1.b_1 & a_2.b_2 & \dots & a_n.b'_n \end{cases}$$

Sfruttando il precedente corollario e' possibile ridurre la prova di essenzialita' a una verifica di contenimento.

Applicando il metodo precedente, calcolare quali implicanti della seguente copertura sono essenziali:

```
.mv 3 0 5 5 5
11111 00001 11110
01100 00011 01010
01010 00100 11111
00110 01001 11010
00001 11111 10110
.e
```

7. Usando il paradigma di ricorsione monotona si calcoli il complemento $\overline{f}$ della seguente funzione f:

```
.mv 3 0 5 5 5
11111 00001 11110
01100 00011 01010
01010 00100 11111
00110 01001 11010
00001 11111 10110
.e
```

La copertura precedente di f e' debolmente monotona ?

La copertura ottenuta di $\overline{f}$ e' debolmente monotona ?

8. (a) Si dimostri che se una funzione f e' fortemente monotona, allora il suo complemento $\overline{f}$ e' una funzione fortemente monotona.