GEOMETRIA - Prova Scritta del 22/9/2010

(Prof. M. Spera)

(1) Sia data la superficie parametrica Σ:
$$\underline{r}(u,v) = (u \cosh v,\ u \sinh v,\ u^2)$$

La si parametrizzi rispetto alle coordinate cartesiane x, y: cosa si ottiene?

Si calcolino, in un punto generico, la prima e la seconda forma fondamentale, e la curvatura gaussiana

[conviene utilizzare le coordinate cartesiane].

In seguito, si determinino in un pto generico le direzioni asintotiche, e si verifichi che le linee asintotiche sono rette. Cosa si può concludere?

[Fac. verificare che le linee asintotiche di una stessa famiglia individuano un'unica giacitura]

(2) Data la curva spaziale $\underline{r} = \underline{r}(t) = \left(\frac{1}{2}\cos t, \frac{1}{2}\sin t, \frac{\sqrt{3}}{2} t\right)$, $t \in \mathbb{R}$

(cos'è?), se ne determini la sfera osculatrice in un punto generico.

(3) Siano
$$X = \bigcup_{i=1}^{n} I_i \quad \mathbb{R} \supset I_i : \text{intervalli aperti disgiunti a due a due}$$
$$Y = \bigcup_{j=1}^{m} J_j \quad \mathbb{R} \supset J_j : \quad \text{idem} \ldots$$

Dimostrare che $X \approx Y \iff m = n$

[Sugg. Ricordare che la connessione è una proprietà topologica e la caratterizzazione dei connessi di $\mathbb{R}$]

Tempo a disposizione: 2h.

Le risposte vanno adeguatamente giustificate.

Geometria 22/9/10

(1) $\Sigma: \quad \underline{r} = (\overset{x}{u \cosh v}, \quad \overset{y}{u \sinh v}, \quad \overset{z}{u^2})$

eq. cartesiana

$$x^2 = u^2 \cosh^2 v$$
$$y^2 = u^2 \sinh^2 v$$
$$z = u^2$$

$$z = x^2 - y^2 \qquad \text{paraboloide iperbolico}$$

$$\underline{r}_u = (\cosh v, \ \sinh v, \ 2u)$$
$$\underline{r}_v = (u \sinh v, \ u \cosh v, \ 0)$$

$$z = x^2 - y^2$$

$\underline{r} = (x, y, z)$

$\underline{r}_x = (1, 0, 2x)$

$\underline{r}_y = (0, 1, -2y)$

$r_{xx} = (0, 0, 2)$

$r_{xy} = (0, 0, 0)$

$r_{yy} = (0, 0, -2)$

$\underline{r}_x \times \underline{r}_y$

$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} =$$

$$= \underline{i}\,(-2x) - \underline{j}\,(-2y) + \underline{k}$$
$$= -2x\,\underline{i} + 2y\,\underline{j} + \underline{k}$$

$$\underline{N} = \left(\frac{-2x}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}, \ \frac{+2y}{\sqrt{}}, \ \frac{1}{\sqrt{}} \right)$$

$E = 1 + 4x^2$

$F = -4xy$

$G = 1 + 4y^2$

$$e = \langle \underline{r}_{xx}, \underline{N} \rangle = \frac{2}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}$$

$$f = 0$$

$$g = \frac{-2}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}$$

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} =$$

$$\frac{-4}{4x^2+4y^2+1} \cdot \frac{1}{\left\{ \begin{array}{l} 1 + 4x^2 + 4y^2 \\ + \cancel{16x^2y^2} - \cancel{16x^2y^2} \end{array} \right.}$$

$$K = \frac{-4}{(4x^2+4y^2+1)^2}$$

linee asintotiche

$$e\, l^2 + 2f\, lm + g\, m^2 = 0$$

$$\frac{2}{V} l^2 - \frac{2}{V} m^2 = 0 \qquad m = \pm l$$

sia $l = 1 \quad m = \pm 1$

$$\underline{v} = \underline{r}_x \pm r_y$$
$$= (1, \pm 1, 2(x \mp y)) \equiv v_\pm$$

sia $P_0 : (x_0, y_0, z_0)$ rette individuate

$$r: P = P_0 + t\, v_\pm = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \\ 2(x_0 \mp y_0) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + t \\ y = y_0 \pm t \\ z = z_0 + 2t(x_0 \mp y_0) \end{cases}$$

Dimostriamo che app. a T.

$$(x_0 + t)^2 - (y_0 \pm t)^2 \overset{?}{=} z_0 + 2t(x_0 \mp y_0)$$

$$\underbrace{x_0^2 - y_0^2}_{z_0} + 2x_0 t \mp 2y_0 t + \cancel{t^2} - \cancel{t^2} = z_0 + 2t(x_0 \mp y_0)$$

$\checkmark$

Dunque: T è una superficie doppiamente rigata

Si può mostrare che i regoli di una stessa famiglia individuano una stessa giacitura: le giaciture sono individuate da $x \mp y = 0$, come è evidente.

② $\underline{r} = \left(\frac{1}{2}\cos t, \frac{1}{2}\sin t, \frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$ $t \in \mathbb{R}$

geometria 22/9/10

elica cilindrica.

calcoliamone la sfera osculatrice in un pto generico

a priori k = costante $\Rightarrow$ ρ = costante

$\Rightarrow \dot{\rho} \equiv 0$

$\left(\text{e } \frac{d\rho}{ds} = \frac{d\rho}{dt}\frac{dt}{ds} \equiv 0\right)$

$\Rightarrow$ il cerchio osculatore sarà un cerchio massimo

$R = r = \frac{1}{k}$. $\quad a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$

sappiamo già che $k = \frac{a}{a^2+b^2} = \frac{1}{2}$

$\tau = -\frac{b}{a^2+b^2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow R = 2$

il centro risulta determinato attraverso la formula di de Saint Venant:

$$\underline{r}_C = \underline{r} + \overset{\overset{2}{\shortparallel}}{\rho}\,\underline{n} - \underbrace{\frac{\rho'}{\tau}}_{\underline{0}}\underline{b}$$

ora $\|\dot{\underline{r}}\| = 1$

$\Rightarrow$ possiamo assumere $t = s$

$\underline{r}'' = \ddot{\underline{r}}$ $\quad \|\ddot{\underline{r}}\| = \frac{1}{2}$ $\quad \dot{\underline{r}} = \left(-\frac{1}{2}\sin t, \frac{1}{2}\cos t, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\underline{n} = 2 \cdot \ddot{\underline{r}}$ $\quad \ddot{\underline{r}} = \left(-\frac{1}{2}\cos t, -\frac{1}{2}\sin t, 0\right)$

$= (-\cos t, -\sin t, 0)$

$$\rho \cdot \underline{n} = 2 \cdot \underline{n} = (-2\cos t, -2\sin t, 0)$$

$$\frac{1}{2} - 2 = \frac{1-4}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$\underline{r}_C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos t \\ \frac{1}{2}\sin t \\ \frac{\sqrt{3}}{2} t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\cos t \\ -2\sin t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}\cos t \\ -\frac{3}{2}\sin t \\ \frac{\sqrt{3}}{2} t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{r}_C = \left(-\frac{3}{2}\cos t, -\frac{3}{2}\sin t, \frac{\sqrt{3}}{2} t \right)$$

$\underline{r}_C$ si muove su un'elica cilindrica.

(3) Siano $X = \bigcup_{i=1}^{n} I_i$ I_i intervalli aperti disgiunti a due a due

$Y = \bigcup_{j=1}^{m} J_j$ J_j int. aperti a due a due disgiunti

Dimostrare che $X \approx Y \iff m = n$

Sia $X \approx Y$ e $n < m$

Sol. "$\Rightarrow$" Se $\varphi : X \to Y$ è un omeomorfismo, esso manda in particolare connessi in connessi.

Dunque $\varphi(I_i)$ è un intervallo $\subset J_{\bar{\iota}(i)}$

senza perdere in generalità (rinominando i J)

$\underbrace{\varphi(I_i)}_{\text{intervallo}} \subset J_i$

se $n < m$, φ non è suriettiva, ma ciò contrasta con $\varphi(X) = Y$. $n < m$ è assurda

in modo analogo si fa vedere che $n > m$ è pure assurda

$\Rightarrow n = m$

"$\Leftarrow$" Se $n = m$, dato che ovviamente $I_i \approx J_i$, è subito costruito un omeomorfismo $\varphi : X \to Y$.