

PROBLEMA: Due corpi puntiformi aventi massa $M = 2.4 \text{ kg}$ e $m = 1.2 \text{ kg}$, rispettivamente, sono fissati alle estremità opposte di un'asta rigida di massa trascurabile e di lunghezza $L = 0.9 \text{ m}$, formando un manubrio rigido asimmetrico. Inizialmente il manubrio si trova in quiete sul piano orizzontale xy , supposto perfettamente liscio, con la massa M posta nel punto O , origine del sistema di riferimento cartesiano $Oxyz$, mentre l'asta rigida forma con l'asse x un angolo $\theta_0 = \pi/3 \text{ rad}$. All'istante $t = 0$ viene applicato al corpo di massa m un impulso istantaneo di intensità $J_0 = 5.4 \text{ kg m s}^{-1}$ in direzione parallela all'asse y e verso concorde ad esso, e il manubrio rigido asimmetrico si mette istantaneamente in moto roto-traslatorio nel piano xy . Calcolare:

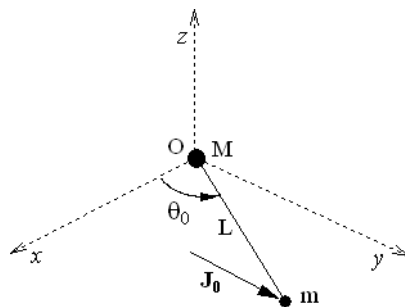
- le componenti cartesiane dell'impulso istantaneo \mathbf{J}_0 ;
- le componenti cartesiane del vettore posizione iniziale \mathbf{r}_{CM} del centro di massa del sistema.
Con riferimento al moto roto-traslazionale del manubrio rigido asimmetrico dopo l'applicazione dell'impulso determinare:
- la velocità $\mathbf{v}_{CM}(t)$ del centro di massa del sistema;
- la legge oraria $\mathbf{r}_{CM}(t)$ del moto del centro di massa del sistema;
- il momento della quantità di moto del centro di massa del sistema $\mathbf{L}_{CM,S}(t)$ rispetto al polo O ;
- il momento della quantità di moto totale del sistema $\mathbf{L}_{O,S}(t)$ rispetto al polo O ;
- il momento della quantità di moto intrinseco \mathbf{L}_{CM}^{INT} del manubrio;
- la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}(t)$ di rotazione del manubrio;
- l'energia cinetica interna E_k^{INT} del manubrio;
- il modulo della tensione \mathbf{T} dell'asta.

SOLUZIONE

Dati del problema:

$$M = 2.4 \text{ kg}, m = 1.2 \text{ kg}, L = 0.9 \text{ m}, J_0 = 5.4 \text{ kg m s}^{-1}, \theta_0 = \pi/3 \text{ rad (i.e.: } \theta_0 = 60^\circ)$$

Si sceglie il sistema di riferimento fisso indicato in figura, in cui l'asse y è parallelo all'impulso \mathbf{J}_0 .



Prima dell'impulso il sistema è in quiete e quindi sia la risultante delle forze esterne che il momento risultante dei momenti delle forze esterne rispetto all'origine O del sistema sono nulli.

- le componenti cartesiane dell'impulso istantaneo \mathbf{J}_0 sono:

$$J_{0x} = 0, J_{0y} = 5.4 \text{ kg m s}^{-1}, J_{0z} = 0$$

- le componenti cartesiane del vettore posizione iniziale $\mathbf{r}_{CM,0}$ del centro di massa del sistema sono:

$$x_{CM,0} = mL / (M+m) \cos\theta_0 = 0.15 \text{ m}$$

$$y_{CM,0} = mL / (M+m) \sin\theta_0 = 0.26 \text{ m}$$

N.B.: L'applicazione dell'impulso \mathbf{J}_0 al corpo di massa m comporta una variazione istantanea di:

1 - quantità di moto del manubrio: $\mathbf{J}_0 = \Delta \mathbf{P}_S$;

2 - momento angolare del manubrio sia rispetto al suo CM, assunto come polo di riferimento:

$\Delta \mathbf{L}_{CM,S} = \mathbf{r}'_m \wedge \mathbf{J}_0$, sia rispetto al punto fisso O, origine del sistema Oxyz: $\Delta \mathbf{L}_{O,S} = \mathbf{r}_m \wedge \mathbf{J}_0$

c) la velocità \mathbf{v}_{CM} del centro di massa del sistema:

In base al teorema dell'impulso (vedi punto 1) $\mathbf{J}_0 = \Delta \mathbf{P}_S$ e quindi si avrà che

$(M+m) (\mathbf{v}_{CM} - \mathbf{v}_{CM,0}) = \mathbf{J}_0$, dove $\mathbf{v}_{CM,0} = \mathbf{0}$ dato che *la velocità iniziale del sistema è nulla*

$$\mathbf{v}_{CM} = \mathbf{J}_0 / (m+M)$$

Poichè l'impulso nel sistema di riferimento scelto ha solo componente orizzontale y anche la velocità del CM avrà solo componente orizzontale y che indichiamo con $v_{CM,y}$:

$$v_{CM} = 1.5 \text{ ms}^{-1} \mathbf{j}$$

d) la legge oraria $\mathbf{r}_{CM}(t)$ del moto del centro di massa del sistema;

Integrando la velocità in funzione del tempo si ottiene la legge oraria (per la posizione del CM a $t = 0$ vedi $\mathbf{r}_{CM,0}$ sopra):

$$\mathbf{r}_{CM} = \mathbf{r}_{CM,0} + [\mathbf{J}_0 / (M + m)] t$$

che corrisponde a un moto rettilineo uniforme parallelo all'asse y ad una distanza $x_{CM} = 0.15$ m dall'asse stesso. Le equazioni parametriche del moto del CM sono:

$$\begin{aligned} x_{CM} &= 0.15 && \text{(m)} \\ y_{CM} &= 0.26 + 1.5 t && \text{(m)} \end{aligned}$$

e) il momento della quantità di moto del centro di massa $\mathbf{L}_{CM}(t)$ rispetto al polo O;

Il centro di massa del sistema si muove come un punto materiale libero per cui:

$$\mathbf{L}_{O,CM}(t) = \mathbf{r}_{CM} \wedge (M+m) \mathbf{v}_{CM} = 0.81 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1} \mathbf{k}$$

f) il momento della quantità di moto totale del sistema $\mathbf{L}_{O,S}(t)$ rispetto al polo O:

In base al teorema del momento dell'impulso rispetto al punto fisso O (vedi punto 2 più sopra):

$\mathbf{r}_m \wedge \mathbf{J}_0 = \Delta \mathbf{L}_{O,S}$ dove \mathbf{r}_m è il vettore posizione iniziale della massa m rispetto al punto O

Ora $\Delta \mathbf{L}_{O,S} = \mathbf{L}_{O,S}(t) - \mathbf{L}_{O,S,0}$, dove $\mathbf{L}_{O,S,0} = \mathbf{0}$ dato che *il sistema è inizialmente in quiete*.

Dopo l'applicazione dell'impulso, dato che il momento risultante del momento delle forze esterne al manubrio è nullo, si avrà la conservazione del suo momento angolare, per cui $\mathbf{L}_{O,S}(t) = \mathbf{L}_{O,S}(0)$:

$$\mathbf{L}_{O,S}(t) = \mathbf{r}_m \wedge \mathbf{J}_0 = L J_0 \cos \theta_0 \mathbf{k} = 2.43 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1} \mathbf{k}$$

g) il momento della quantità di moto intrinseco \mathbf{L}_{CM}^{INT}

Dal teorema di König per il momento angolare si ottiene immediatamente:

$$\mathbf{L}_{CM}^{INT}(t) = \mathbf{L}_{O,S}(t) - \mathbf{L}_{O,CM}(t) = 1.62 \text{ kgm}^2 \text{ s}^{-1} \mathbf{k}$$

In alternativa, osservando che il momento angolare rispetto al CM, prima dell'impulso era nullo, dal punto 2 si potrà scrivere che l'impulso comunica al sistema un momento angolare rispetto al CM:

$$\mathbf{L}_{CM,S}(0_+) = \mathbf{r}'_m \wedge \mathbf{J}_0$$

dove \mathbf{r}'_m è il vettore posizione iniziale della massa m rispetto al centro di massa del sistema e $\mathbf{L}_{CM}(0_+)$ è momento angolare rispetto al CM subito dopo l'applicazione dell'impulso.

Dopo alcuni calcoli si ha: $\mathbf{L}_{CM,S}(0_+) = ML/(M+m) J_0 \cos \theta_0 \mathbf{k} = 1.62 \text{ kgm}^2\text{s}^{-1} \mathbf{k}$

h) la velocità angolare $\omega(t)$ di rotazione del sistema:

Il momento angolare totale rispetto al CM subito dopo l'impulso ($t = 0$) vale:

$$\mathbf{L}_{CM,S}(t) = I_{CM,z} \omega(t) \mathbf{k}$$

dove $I_{CM,z}$ è il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse di rotazione z passante per il centro di massa e vale:

$$I_{CM,z} = M[mL/(M+m)]^2 + m[ML/(M+m)]^2$$

$$I_{CM,z} = [mM/(M+m)]L^2 = 0.648 \text{ kg m}^2$$

Sostituendo, si ottiene la velocità angolare del sistema $\omega(t) \mathbf{k}$:

$$\omega(t) = J_0 \cos \theta_0 / Lm = 2.5 \text{ rad s}^{-1} \mathbf{k}$$

i) l'energia cinetica interna E_k^{INT} :

L'energia cinetica interna è la somma delle energie cinetiche dei due corpi calcolate nel sistema del centro di massa:

$$E_k^{\text{INT}} = \frac{1}{2} m [(ML\omega/(M+m)]^2 + \frac{1}{2} M [(mL\omega/(M+m)]^2 = \frac{1}{2} \mu L^2 \omega^2 = 2.025 \text{ J}$$

dove $\mu = mM/(m+M)$

Alternativamente, ricordando che il moto del sistema rispetto al CM è puramente rotazionale, l'energia cinetica di rotazione del manubrio rigido si può scrivere come:

$$E_k^{\text{INT}} = \frac{1}{2} I_{CM,z} \omega^2 = 2.025 \text{ J}$$

dove $I_{CM,z} = [mM/(M+m)]L^2$.

j) il modulo della tensione \mathbf{T} dell'asta.

Il sistema, dopo l'applicazione dell'impulso, trasla lungo y e ruotando attorno al suo centro di massa con velocità angolare $\omega = 2.5 \text{ rad s}^{-1}$, per cui la tensione dell'asta è data dalla forza centripeta F_N a cui sono soggette le due masse M e m , considerate singolarmente:

$$T = F_{N,M} = F_{N,m} = [mML/(M+m)] \omega^2 = 4.5 \text{ N}$$