

Esercizi per il Corso di ALGEBRA

Foglio 6

10 Novembre 2015

1. Sia $(G, +)$ un gruppo di ordine $n > 1$ tale che per ogni elemento di $G \setminus \{0\}$ si ha $\text{ord}(g) = 2$.
 - (a) **(3 punti)** Si dimostri che G è abeliano.
 - (b) **(3 punti)** Si dimostri che G ha una struttura di spazio vettoriale sul campo $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
 - (c) **(2 punti)** Si concluda che esiste $k > 0$ tale che $n = 2^k$.
2. Si consideri l'anello di polinomi $\mathbb{Z}[X]$.
 - (a) **(3 punti)** Si dimostri che ogni numero primo p in \mathbb{Z} è un polinomio irriducibile in $\mathbb{Z}[X]$.
 - (b) **(4 punti)** Si dimostri che l'ideale generato da p (cioè, $(p) = p\mathbb{Z}[X]$) non è massimale.
 - (c) **(2 punto)** Si concluda che l'anello $\mathbb{Z}[X]$ non è un dominio a ideali principali.
3. Si decida e si giustifichi se i seguenti polinomi in $\mathbb{Z}[X]$ sono irriducibili.
 - (a) **(3 punti)** $3X^2 - 21X + 45$;
 - (b) **(3 punti)** $6X^3 + 21X^2 + 97$;
 - (c) **(3 punti)** $12X^5 + 21X^3 - 49X + 28$.
4. **(4 punti)** Si dimostri che $p(x) = 16x^4 - 24X^3 + 16x^2 - 4x + 1$ è un polinomio irriducibile su $\mathbb{Z}[X]$. (**Suggerimento:** Si consideri $p(x)$ come polinomio in $\mathbb{Q}[X]$ e si sostituisca x con $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.)

Consegna: martedì 17 novembre, 15:30, all'inizio delle esercitazioni.