UN PO' DI RIPASSO

11 settembre 2007

1 Valore assoluto o modulo di un numero reale

Per ogni numero reale $x \in \mathbb{R}$ poniamo:

$$|x| := \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$|x|$ si dice valore assoluto o modulo di x.

N.B. 1.
- $|x| \geq 0$ per ogni numero reale x e $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$. Quindi, $|x| = \max\{x, -x\}$.
- per ogni $x, \lambda \in \mathbb{R}$ si ha $|x\lambda| = |x||\lambda|$.

Caveat La medesima regola non vale per la somma, cioè, per ogni $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|x + y| \neq |x| + |y|$$

Esempio 1.

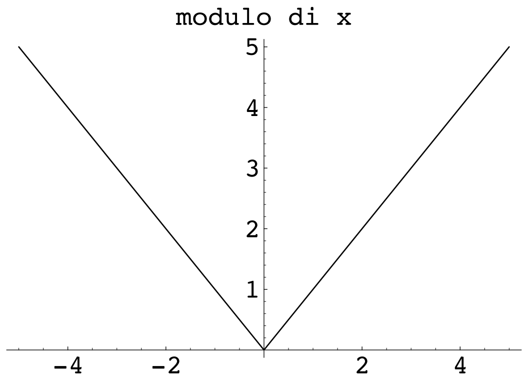
$$|\pi - \sqrt{2}| = \pi - \sqrt{2} \neq \pi + \sqrt{2} = |\pi| + |-\sqrt{2}|$$

- Disuguaglianza tringolare:

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

e l'uguaglianza vale se e solo se x e y hanno lo stesso segno.

- Grafico



2 Potenze ad esponente reale

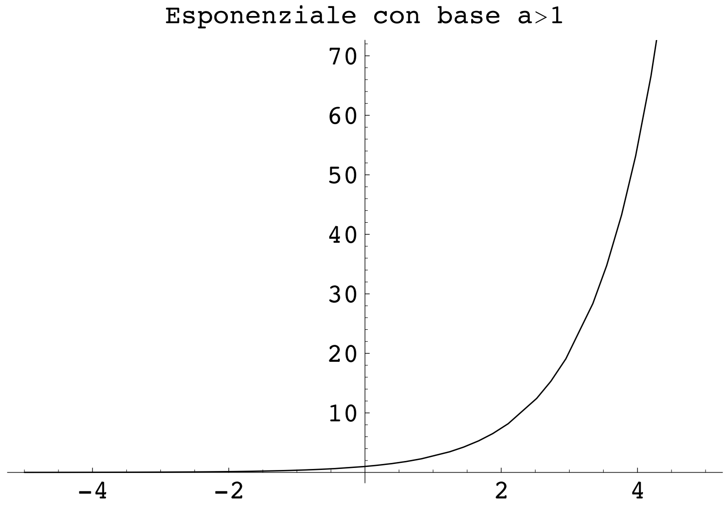
Sia a un numero reale positivo non nullo (i.e. $a \in \mathbb{R}^*_+$), definiamo la funzione esponenziale di base a:

$$\exp_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \tag{1}$$

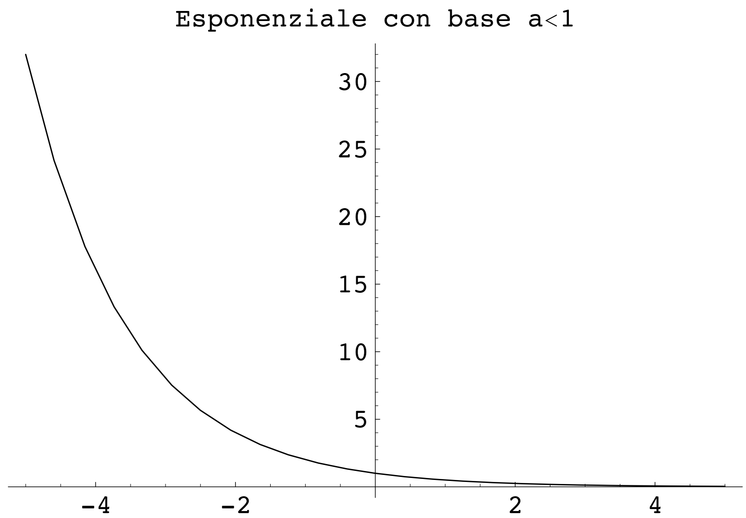
come la funzione tale che:

- è strettamente monotona,
- $\exp_a(x + y) = \exp_a(x)\,\exp_a(y)$,
- $\exp_a 1 = a$.

Proprietà 1.
- Se $a = 1$, $\exp_a(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- Grafico
  - $a > 1$



  - $0 < a < 1$

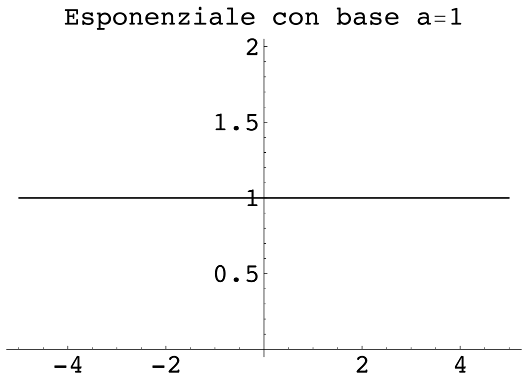


  - $a = 1$
- Sia $\alpha \in \mathbb{Q}$, con $\alpha = \frac{m}{n}$, con $m, n \in \mathbb{N}^*$, allora:

$$a^\alpha = a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}}$$

Osservazione 1. Tutte queste caratterizzazioni si possono dimostrare, sia l'esistenza della funzione $\exp_a$, sia le sue proprietà (si veda [1], ad esempio).

Proprietà 2. Siano $a, b > 0$ e $r, s \in \mathbb{R}$.

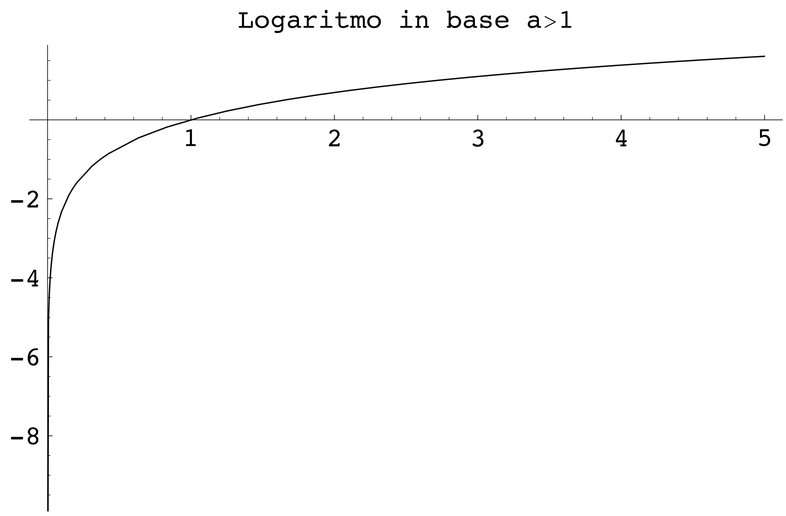


- $a^{r+s} = a^r \cdot a^s$
- $a^{-r} = \frac{1}{a^r} = \left(\frac{1}{a}\right)^r$
- $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$
- $(ab)^r = a^r \cdot b^r$

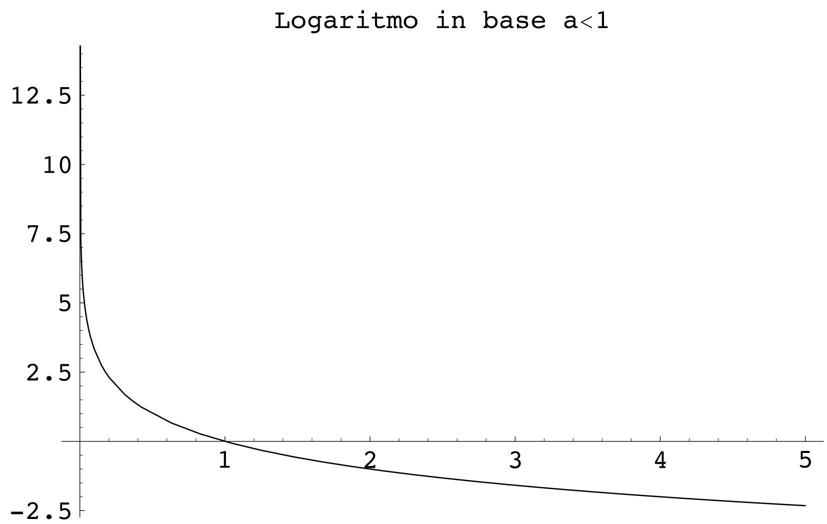
3 Logaritmi

Se $a > 0$, $a \neq 1$, la funzione $\exp_a$ è biettiva (strettamente monotona e suriettiva) su $(0, +\infty)$ e quindi invertibile. Chiamiamo logaritmo di base a, $\log_a$, la sua inversa.
Più precisamente, sia $a \in \mathbb{R}^*_+$ $a \neq 1$, allora definiamo logaritmo di base a di $x \in \mathbb{R}^*_+$ il numero reale $\log_a x$ tale che $a^{\log_a x} = x$, cioè, il logaritmo di base a di x è quel numero a cui elevare la base per ottenere x.
Grafico del logaritmo:

- se $a > 1$:



- se $a < 1$:



Proprietà 3.
- $\log_a(x\,y) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a\left(\frac{1}{a}\right) = -\log_a x$
- per ogni numero reale α, $\log_a(x)^\alpha = \alpha \log_a x$

Tali proprietà si ricavano da quelle dell'esponenziale.

3.1 Cambiamento di base nei logaritmi

Siano a, b due numeri reali strettamente positivi e diversi da 1, allora $\log_a$ e $\log_b$ sono sempre proporzionali. Ricordiamo, infatti che $x = a^{\log_a x}$. Prendendo il logaritmo in base b di entrambi i membri di tale relazione si ha:

$$\log_b x = \log_b \left(a^{\log_a x}\right) = \log_a x \cdot \log_b a \tag{2}$$

Riferimenti bibliografici

[1] G. de Marco, *Analisi zero.* Decibel-Zanichelli, Padova 1981.