Esercizi di Geometria Affine ed Euclidea del Piano e dello Spazio

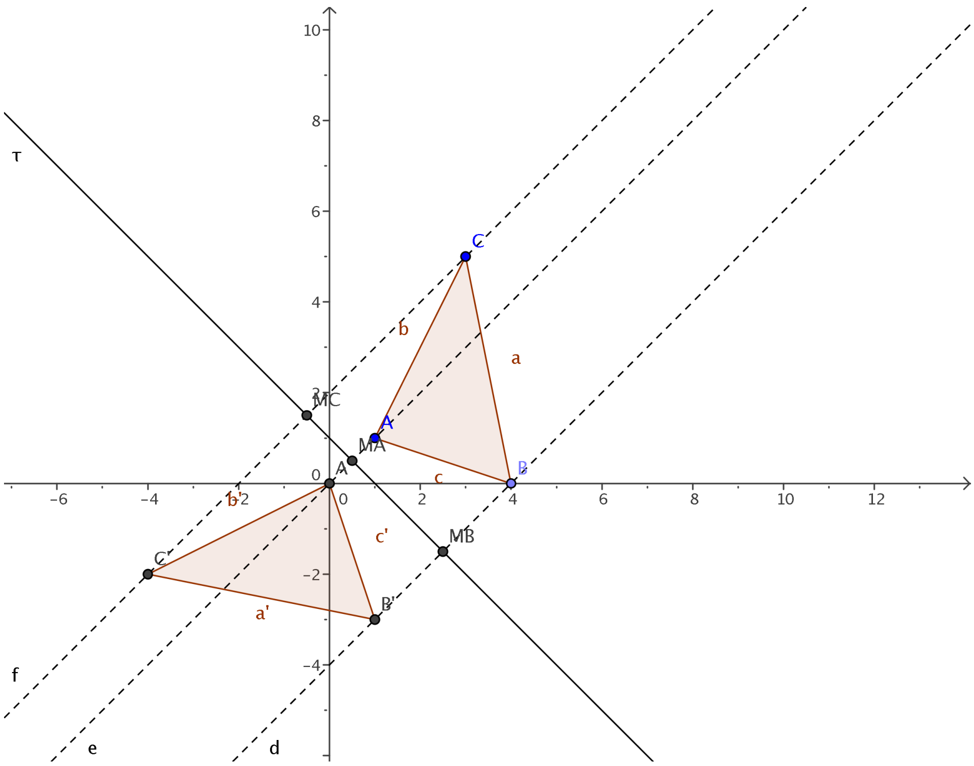
Sansonetto Nicola*

15 aprile 2016

Geometria Affine nel Piano

Esercizio 1. Nel piano affine standard $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ dotato del riferimento canonico, si consideri la retta τ di equazione affine $y + x = 1$ e il triangolo T di vertici $A : (1, 1)$, $B : (4, 0)$ e $C : (3, 5)$. Determinare il simmetrico di T rispetto alla retta τ nella direzione ortogonale a τ. L'applicazione così ottenuta è un'affinità? In caso affermativo determinare la forma della trasformazione.

Sol. La direzione ortogonale a τ è data dal sottospazio direttore $n = \langle \vec{\eta} = [1 \quad 1]^T \rangle$.



Consideriamo il punto A e determiniamone il simmetrico rispetto a τ nella direzione di n. La retta r_A per il punto A e ortogonale a τ ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \end{cases}$$

*Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Padova via Trieste 65, 35121 Padova, email: `sanson@math.unipd.it`

Il punto $M_A = r_A \cap \tau$ di intersezione tra la retta r_A e la retta τ è ottenuto per il valore $\bar{t} = \frac{1}{2}$ del parametro t. Quindi il simmetrico A' di A è

$$A' = A + 2\bar{t}\,\vec{\eta} = A + \vec{\eta} = (0, 0)$$

Procedendo in maniera analoga si ottengono i simmetrici dei punti B e C: $B' : (1, -3)$ e $C' : (-4, -2)$.

Per vedere se la trasformazione in questione è una trasformazione affine vediamo direttamente se essa può essere posta nella forma $P' = \vec{b} + MP$, in cui P e P' sono punti di $\mathbb{A}^2$, $\vec{b}$ è un vettore dello spazio direttore $\mathbb{R}^2$ e M è una matrice 2×2 a coefficienti reali. Sia $P = (x_P, y_P)$ il generico punto di $\mathbb{A}^2$. La retta r_P per P nella direzione di n ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x_P + t \\ y = y_P + t \end{cases}$$

mentre il punto di intersezione tra la retta r_P e la retta τ è individuato per il valore $\bar{t} = \frac{1-x_P-y_P}{2}$ del paramentro t. Quindi il simmetrico P' del punto P rispetto alla retta t nella direzione di n è

$$P' = P + \bar{t}\,\vec{\eta}$$

Esplicitando le coordinate

$$\begin{cases} x_{P'} = 1 - y_P \\ y_{P'} = 1 - x_P \end{cases}$$

e quindi

$$P' = \vec{b} + M\,P$$

in cui $\vec{b} = [1 \quad 1]^T$ e $M = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. E quindi la trasfrmazione in considerazione è affine ed è un'affinità, poiché il rango di M è massimo.[1]

Esercizio 2. Dire se la matrice

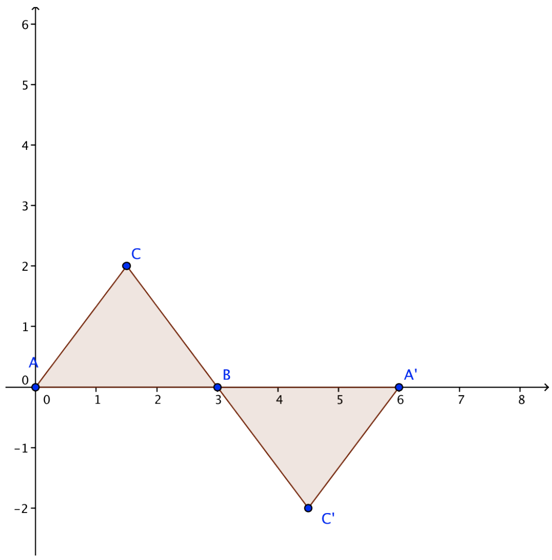
$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

è la matrice unificata di un'affinità del piano affine standard in cui è scelto un sistema di riferimento $\mathcal{R}$, e in tal caso determinare l'immagine del triangolo di vertici $A(1, 1)$, $B(0, 1)$ $C(1, 0)$.

Esercizio 3. Determinare due matrici A e B diagonalizzabili tali che il loro prodotto AB non sia diagonalizzabile.

Esercizio 4. Descrivere, in relazione alla figura, due possibili trasformazioni affini che mandano il triangolo ABC nel triangolo $A'B'C'$.

[1] Nel linguaggio dei gruppi, $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$



Esercizio 5. Nel piano euclideo reale, in cui sia fissato un sistema di riferimento cartesiano,

1. si scriva l'equazione della circonferenza $\mathcal{C}$ passante per $B(-2,0)$ e $A(0,0)$ e $D(0,1)$;
2. si determini l'immagine $\mathcal{C}'$ di $\mathcal{C}$ tramite l'affinità

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Di che curva si tratta?

3. Calcolare l'area sottesa da $\mathcal{C}'$.
4. Determinare le coordinate baricentriche del centro C rispetto ad A, B, D, nonché quelle di C' rispetto a quelledi A', B', D'.

Esercizio 6. 1. Nel piano euclideo reale, in cui sia fissato un riferimento cartesiano, scrivere la matrice della simmetria obliqua attorno alla retta

$$r: \ 2x + y - 2 = 0$$

   lungo la direzione $\langle [1 \quad 0]^T \rangle$. (Usare il formalismo unificato).

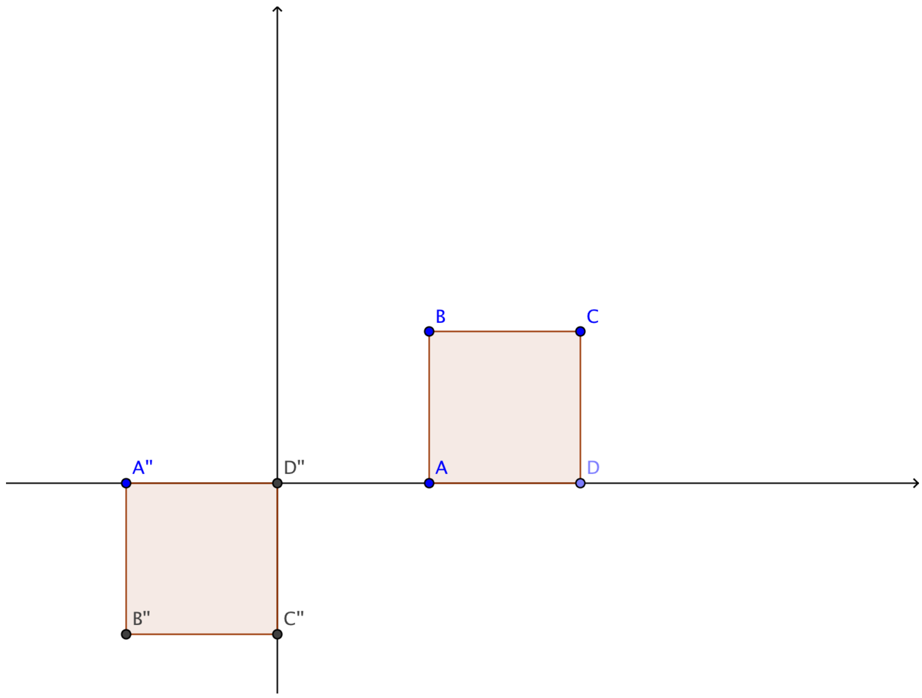
2. Scritta l'equazione della circonferenza $\mathcal{C}$ passante per $O : (0,0)$, $A : (1,0)$ e $B : (0,2)$, determinare l'equazione di $\mathcal{C}'$, immagine di $\mathcal{C}$ mediante la simmetria obliqua in questione. Di che tipo di curva si tratta? Qual'è l'immagine del centro di $\mathcal{C}$? Giustificare la risposta.

Esercizio 7. Nel piano affine standard $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ dotato del riferimento canonico si consideri la mappa

$$\begin{aligned} A(0,0) &\longmapsto A'(-1,0) \\ B(1,1) &\longmapsto B'(-2,-1) \\ C(2,1) &\longmapsto C'(-3,-1) \end{aligned}$$

Determinare in due modi differenti la matrice dell'affinità definita dalla mappa precedente.

Esercizio 8. Descrivere, in relazione alla figura, due possibili affinità che mandano il quadrato $ABCD$ nel quadrato $A''B''C''D''$.



Di che tipo di affinità si tratta?

Esercizio 9. Si consideri il piano euclideo reale, in cui sia fissato un sistema di riferimento cartesiano.

1. Si determini l'affinità $\mathcal{A}$ che manda $A = (0,0) \longmapsto A' = (0,0)$, $B = (2,0) \longmapsto B' = (2,0)$ e $C = (1,1) \longmapsto C' = (2,1)$.
2. L'affinità $\mathcal{A}$ lascia invariata l'area?
3. Una volta determinata l'equazione della circonferenza $\mathcal{C}$ di centro A e passante per B, si determini l'area dell'immagine $\mathcal{C}'$ di $\mathcal{C}$ mediante $\mathcal{A}$.
4. Si determini il simmetrico D' di $D = (-1,-1)$ rispetto all'origine e il simmetrico D'' di D rispetto all'asse delle ascisse.
5. Il punto D appartiene $\mathcal{C}'$? D' e D'' vi appartengono?

Esercizio 10. Nel piano affine standard $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ dotato del riferimento canonico , determinare il simmetrico del triangolo T di vertici $A(0,1)$, $B(3,0)$ e $C(2,2)$ rispetto alla retta t di equazione $2x + y + 1 = 0$, nella direzione individuata dalla retta r di equazione $x - 3y - 3 = 0$ e scrivere la matrice della corrispondente affinità. Calcolare, inoltre, l'area del triangolo T e del trasformato T'.

Esercizio 11. Nello spazio affine standard $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ dotato del riferimento canonico

(i) Determinare i simmetrici A' e B' dei punti $A(2,3,1)$ e $B(-1,2,1)$, rispetto al punto $C(1,-1,1)$.

(ii) Determinare l'area del poligono (non convesso) $ABCA'B'$.

Esercizio 12. Esiste un'affinità che mappa un'ellisse in una circonferenza? Giustificare la risposta e trovare un controesempio in caso di risposta negativa, la (eventuale) soluzione generale in caso di risposta affermativa.

Esercizio 13. Si consideri il piano euclideo reale, in cui sia fissato un riferimento cartesiano.

1. Si determini l'equazione della circonferenza $\mathcal{C}$ passante per $A = (-2, 0)$, $B = (0, 0)$ e $D = (0, 1)$.
2. Si determini l'immagine $\mathcal{C}'$ della circonferenza $\mathcal{C}$ mediante l'affinità

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Che tipo di curva è $\mathcal{C}'$?
4. Si determini l'area sottesa da $\mathcal{C}'$.

Geometria affine ed euclidea dello spazio

Esercizio 14. Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}^3$ si considerino le rette

$$r : \begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + z = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

A. Verificare che le rette r e s sono sgembe e calcolarne la mutua distanza. Determinare, inoltre, i punti R e S, rispettivamente su r e s, di minima distanza.

B. Dato il punto $A = (1, 0, 0)$, scrivere l'equazione della retta h per A e incidente sia r che s.

C. Scrivere l'equazione del cilindro $\mathcal{C}$ avente la retta s come asse e tangente alla retta r. Determinare i punti P e Q di intersezione tra il cilindro e la retta h.

D. Determinare il volume del tetraedro $SPQR$.

Sol. A. In primo luogo scriviamo le equqzioni parametriche di r e s:

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = -2 \\ z = -t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad s : \begin{cases} x = u \\ y = 1 \\ z = u \end{cases} \quad u \in \mathbb{R}$$

Dalle equazioni paramentriche emerge semplicemente che r e s non sono nè parallele nè incidenti. Non sono parallele perché i loro spazi direttori, $\vec{v}_r = [1 \quad 0 \quad -1]^T$ e $\vec{v}_s = [1 \quad 0 \quad 1]^T$ non sono proporzionali, e non sono incidenti perchṕer alcun valore dei parametri t e u $P_r = (t, -2, -t)$ coincide con $P_s = (u, 1, u)$.

Un altro modo di vedere ciò lo si fa considerando i due vettori direttori $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$ di r e s rispettivamente e un qualsiasi vettore con un estremo in r e uno in s e poi vedere se questi tre vettori sono linearmente indipendenti. Prendiamo $\overrightarrow{AB}$ il vettore di estremi $A = (0, -2, 0)$ e $B = (0, 1, 0)$, in r e s rispettivamente. È allora semplice verificare che la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

che ha per colonne i vettori $\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$ ha rango massimo.

I punti di minima distanza tra le rette r e s sono quei punti R e S tali per cui il vettore $\overrightarrow{RS}$ è ortogonale sia alla retta r che alla retta s:

$$\langle \overrightarrow{RS} | \vec{v}_r \rangle = 0$$
$$\langle \overrightarrow{RS} | \vec{v}_s \rangle = 0$$

e ciò si ottiene per $t = 0$ e $u = 0$. Per cui $R = (0, -2, 0)$ e $S = (0, 1, 0)$. Infine $d(r, s) = d(R, S) = \|\overrightarrow{RS}\| = 3$

B. La retta h si ottiene come intersezione di un piano per r e di un piano per s entrambi passanti per il punto A. Consideriamo quindi i fasci di piani $\mathcal{F}_r$ e $\mathcal{F}_s$ di asse r e s, rispettivamente:

$$\lambda(x - y + z - 2) + \mu(x + z) = 0, \qquad (\lambda, \mu) \neq (0, 0)$$
$$\alpha(x + 2y - z - 2) + \beta(x - z) = 0, \qquad (\alpha, \beta) \neq (0, 0)$$

Imponiamo il passaggio per A ottenendo $\mu = \lambda$ e $\alpha = \beta$. Per cui

$$h : \begin{cases} 2x - y + 2z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

C. Il cilindro $\mathcal{C}$ è il luogo geometrico dei punti $X = (x, y, z)$ dello spazio aventi distanza pari a 3[2] dalla retta s:

$$d(X, s) = \frac{\|\overrightarrow{P_s X} \times \vec{v}_s\|}{\|\vec{v}_s\|} = 3$$

in cui $P_s = (u, 1, u)$. Sviluppando si ricava che l'equazione del cilindro $\mathcal{C}$ è

$$(x - z)^2 + 2\,(y - 1)^2 = 18$$

I punti P e Q di intersezione tra il cilindro $\mathcal{C}$ e la retta h sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} (x - z)^2 + 2\,(y - 1)^2 = 18 \\ x = -1 - t \\ y = 4t \\ z = 3t \end{cases}$$

da cui $P = \left(\frac{3-\sqrt{6}}{4}, 1 + \sqrt{6}, \frac{3+3\sqrt{6}}{4}\right)$ e $Q = \left(\frac{3+\sqrt{6}}{4}, 1 - \sqrt{6}, \frac{3-3\sqrt{6}}{4}\right)$

D. Il volume del tetrardro è

$$\mathrm{vol}(SPQR) = \frac{1}{6}\,\|\langle \overrightarrow{SR}, \overrightarrow{SP} \times \overrightarrow{SQ} \rangle\| = \frac{3\sqrt{6}}{8}$$

Esercizio 15. Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}^3$ in cui sia fissato un sistema di riferimento cartesiano si considerino il punto $P : (0, 0, 1)$ e il piano $\pi : \quad 2z - x = 0$.

1. Determinare la proiezione ortogonale P' a P su π.
2. Determinare la proiezione M di P su π lungo la direzione $V = \langle \vec{v} = [1 \quad 1 \quad -1]^T \rangle$.
3. Calcolare l'area del triangolo $OP'M$, in cui O è l'origine del sistema di riferimento.
4. Detto R il simmentrico di P rispetto a π lungo V, determinare il volume del tetraedro $OPRP'$.

[2]Grazie alla condizione di tangenza.

Sol. 1. Determiniamo la retta r per P e ortogonale a π; P' sarà quindi dato dall'intersezione tra tale retta e il piano π. Tale retta ha direzione parallela al vettore $\vec{n}_\pi = [1 \quad 0 \quad -2]^T$, e quindi

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

Ora $P' = r \cap \pi$ e cioè $t = \frac{2}{5}$ e quindi $P' = \left(\frac{2}{5}, 0, \frac{1}{5}\right)$.

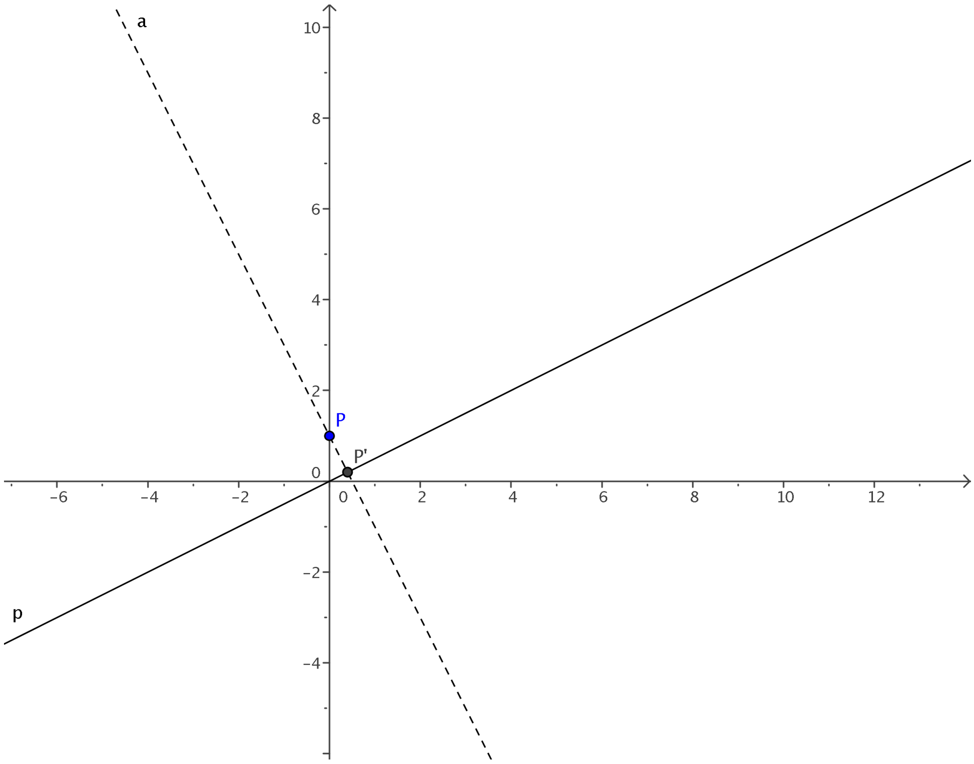


Figura 1: Sezione sul piano (x, z)

2. Consideriamo ora la retta r' per P e nella direzione di $\vec{v}$:

$$r' : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

Ora $M = \pi \cap r'$ e cioè $t = \frac{2}{3}$ e quindi $M = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

3. A questo punto calcolare l'area del triangolo $OP'M$:

$$S_{OP'M} = \frac{1}{3} \|\overrightarrow{OP'} \times \overrightarrow{OM}\| = \frac{\sqrt{5}}{15}$$

4. Per determinare il volume di $OP'RP$ non è necessario determinare R (vedi figura), infatti

$$\mathrm{vol}(OP'RP) = \mathrm{vol}(OPMP') + \mathrm{vol}(OP'MP) = 2\,\mathrm{vol}(OPMP') = 2S_{OP'M}\,PP' = \frac{4}{45}$$

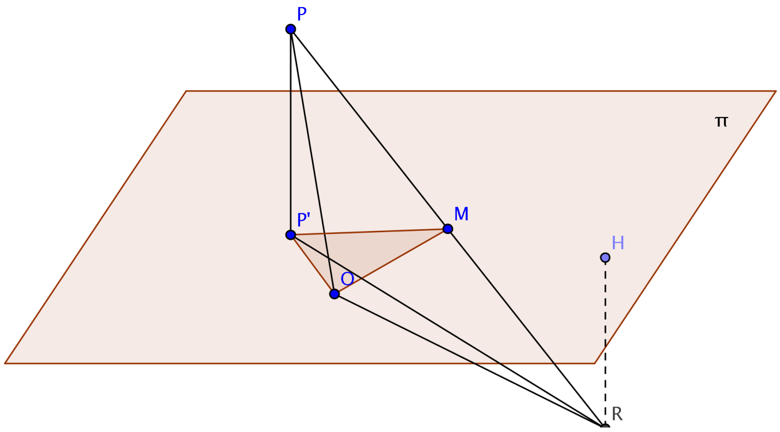


Figura 2: Tetraedro $OP'RP$

Esercizio 16. Nel piano euclideo reale, in cui sia fissato un riferimento cartesiano, si considerino le rette

$$r: \begin{cases} x - y = 0 \\ y - z + 3 = 0 \end{cases}, \qquad s: \begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

1. Scrivere le equazioni parametriche di r e s.
2. Determinare i vettori direttori $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$ di r e s, rispettivamente, quindi determinare la mutua posizione di r e s.
3. Determinare la distanza di r da s.
4. Sia $P = (0, 0, 3)$ un punto appartenente a r. Determinare le distanza di s da P.
5. Determinare la retta t passante per P e contenente il segmento di minima distanza di r da s.

Esercizio 17. Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}^3$ in cui sia fissato un sistema di riferimento cartesiano si considerino la retta di equazioni parametriche

$$r: \quad \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3t \\ z = 2t \end{cases}$$

e il piano $\pi:\ x + y = 0$.

1. Determinare la retta p proiezione di r su π lungo la direzione $W = \langle \vec{w} = [0 \quad 1 \quad 1]^T \rangle$.
2. Sia π' il piano individuato da r e da p. Si considerino i due piani del fascio di asse p che formano con π' angoli di $\frac{\pi}{3}$.
3. Detti λ e μ i piani di cui al punto 2., determinare i loro piani bisettori.

Sol. 1. In primo luogo osserviamo che la retta r e il piano π non sono paralleli, infatti $\vec{v}_r = [1 \quad 3 \quad 2]^T$ e $\vec{n}_\pi = [1 \quad 1 \quad 0]^T$, che non sono ortogonali. Scriviamo l'equazione del fascio di piani $\mathcal{F}_r$ di asse r. Scriviamo le equazioni affini per r

$$r: \begin{cases} 3 - y - 3 = 0 \\ 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

da cui il fascio $\mathcal{F}_r$ è dato da
$$\xi\,(2y-3z)+\eta\,(3x-y-3)=0$$
Consideriamo ora il piano π' del fascio che sia parallelo ala direzione $\vec{w}=[0\quad 1\quad 1]^T$. Tale piano è individuato dalla condizione
$$\langle\vec{w}|\vec{n}_{\mathcal{F}}\rangle=0$$
che porge $\eta=-\xi$. Prendendo $\eta=-1$ e quindi $\xi=1$ si ottiene l'equazione di π'
$$\pi':\ x-y+z-1=0$$
Per cui la retta $p=\pi'\cap\pi$ proiezione di r su π è definita da
$$p:\begin{cases}x-y+z-1=0\\ x+y=0\end{cases}$$

2. Consideriamo ora il fascio $\mathcal{F}_p$ di asse p, $\lambda(x-y+z-1)+\mu(x+y)=0$, $(\lambda,\mu)\neq(0,0)$. I piani cercati sono quelli per cui
$$\cos(\mathcal{F}_p,\pi')=\frac{\langle\vec{n}_{\mathcal{F}_p}|\vec{n}_{\pi'}\rangle}{\|\vec{n}_{\mathcal{F}_p}\|\,\|\vec{n}_{\pi'}\|}=\frac{1}{2}$$
Sostituendo si ricava l'equazione
$$\frac{3\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+2\mu^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
Sicuramente deve essere $\lambda\neq0$, allora dividiamo tutto per λ e poniamo $\kappa^2=\frac{\mu^2}{\lambda^2}$, da cui si ricava $\kappa=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ oppure $\kappa=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$. I due piani cercati sono quindi
$$\lambda:x-y+z-1+\frac{3\sqrt{2}}{2}(x+y)=0$$
$$\mu:x-y+z-1-\frac{3\sqrt{2}}{2}(x+y)=0$$

3. Ovviamente π' biseca λ e μ. L'altro piano è il piano del fascio $\mathcal{F}_p$ ortogonale a π' che π.

Esercizio 18. 1. Scrivere l'equazione affine del piano π ortogonale al piano π' di equazione affine $x-y+2z=0$ e contenente la retta
$$r:\begin{cases}x+2y=3\\ x-z=1\end{cases}$$

2. Scrivere le equazioni parametriche di r.
3. Determinare i punti di che hanno distanza $\sqrt{6}$ dalla retta $s=\pi\cap\pi'$.
4. Scrivere le equazioni di π nel sistema di riferimento determinato dai punti $Q_0=(1,1,0)$, $Q_1=(2,0,2)$, $Q_2=(1,3,1)$ e $Q_3=(6,2,-2)$.

Sol. 1. Il piano π è parallelo alla direzione $\vec{n}_{\pi'}=[1\quad -1\quad 2]^T$ ortogonale a π'. Inoltre π è un piano del fascio di piani $\mathcal{F}_r$ di asse r di equazione $x(\lambda+\mu)+2\lambda y-\mu z-(3\lambda+\mu)=0$. Quindi π è li piano del fascio la cui direzione ortogonale $\vec{n}_\pi$ é ortogonale a $\vec{n}_{\pi'}$
$$\langle(\lambda+\mu,2\lambda,-\mu)|\vec{n}_{\pi'}\rangle=0$$
Da cui si ricava $\lambda=-\mu$. Prendendo $\lambda=1$ si ottiene $\pi:2y+z-2=0$.

2. Le equazioni parametriche di r sono

$$r : \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = t & \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = 2 - 2t \end{cases}$$

3. Ricordiamo che $\pi \perp \pi'$, quindi, dal momento che $s = \pi \cap \pi'$, per ogni punto P di π, $d(P, s) = d(P, \pi')$. In particolare ciò vale per i punti di r. Usando la distanza punto/piano si ottiene $\sqrt{6} = d(P, s) = d(P, \pi') = \frac{\langle P|\vec{n}_{pi'}\rangle}{\|\vec{n}_{\pi'}\|} = \frac{|7-7t|}{\sqrt{6}}$. Da cui $t = \frac{1}{7}$ oppure $t = \frac{13}{7}$.

4. Il nuovo sistema di riferimento centrato in Q_0 ha come direzioni coordinate i vettori $Q_1 - Q_0$, $Q_2 - Q_0$ e $Q_3 - Q_0$. Quindi il cambiamento di sistema di coordinate è dato dalla trasformazione affine

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

Sostituendo nell'equazione di π le espressioni di x, y e z in funzione di X, Y e Z si ricava che l'equazione di π rispetto al nuovo sistema di rifermento

$$\pi : Y = 0$$

Osserviamo, d'altra parte, che ciò era immediato, dal momento che π passa per il punto Q_0 ed è ortogonale al vettore $Q_2 - Q_0 = [0 \quad 2 \quad 1]^T$.

Esercizio 19. Nello spazio euclideo siano date le rette

$$r : \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z + 3 = 0 \end{cases}, \qquad s : \begin{cases} x - 4y + 4 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

(i) Determinare la retta ℓ passante per $P(1, 0, 1)$, incidente ad r e ortogonale ad s.

(ii) Le rette ℓ e s sono complanari? Giustificare la risposta.

(iii) Calcolare la distanza tra ℓ ed s.

(iv) Sia s' la retta per P e parallela ad s. Determinare le equazioni di s nel sistema di riferimento in cui l'asse X è la retta ℓ e l'asse Y è la retta s'. (Chi è l'asse Z?)

Esercizio 20. Nello spazio euclideo si considerino i vettori $\vec{v} = [1 \quad 1 \quad 1]^T$ e $\vec{w} = [2 \quad 2 \quad 1]^T$.

(i) Si decomponga il vettore $\vec{v}$ come somma di $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ in cui $\vec{v}_1$ è ortogonale a $\vec{w}$ e v_2 è parallelo a $\vec{w}$.

(ii) Si determinino le superfici dei due parallelogrammi aventi come lati i vettori $\vec{v}\,\vec{v}_1$ (primo parallelogramma) e $\vec{v}\,\vec{v}_2$ (secondo parallelogramma).

(iii) Le due superfici del punto precedente risultano uguali: dire se si tratta di un risultato generale (indipendente dai vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ dati), ed eventualmente giustificarlo e darne un'interpretazione in termini di geometria (piana) euclidea.

Esercizio 21. Nello spazio euclideo siano date le rette

$$r : \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z + 3 = 0 \end{cases}, \qquad s : \begin{cases} x - 4y + 4 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

(i) Determinare la retta ℓ passante per $P(1, 0, 1)$, incidente ad r e ortogonale ad s.

(ii) Le rette ℓ e s sono complanari? Giustificare la risposta.

(iii) Calcolare la distanza tra ℓ ed s.

(iv) Sia s' la retta per P e parallela ad s. Determinare le equazioni di s nel sistema di riferimento in cui l'asse X è la retta ℓ e l'asse Y è la retta s'. (Chi è l'asse Z?)

Esercizio 22. Nello spazio euclideo si consideri il piano $\pi' : \ x + y = 0$, e la retta

$$r : \begin{cases} x - y - z = 1 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$$

(i) Determinare la retta r' ottenuta proiettando r nella direzione $W = \langle [1 \quad 0 \quad 1]^T \rangle$.

(ii) Data la retta s di equazione

$$s : \begin{cases} x = -\mu + 1 \\ y = \mu \\ z = 1 \end{cases} \qquad \mu \in \mathbb{R}$$

determinare la sua posizione rispetto a r e determinare il piano π che le due rette individuano.

(iii) Determinare la retta s', ottenuta proiettando s su π' nella direzione di W.

(iv) Dato il piano $\sigma : \ x - y + z = 0$, determinare le coordinate dei punti $R = \sigma \cap r$, $S = \sigma \cap s$, $R' = \sigma \cap r'$, $S' = \sigma \cap s'$.

(v) Effettuare un disegno approssimativo della situazione.

(vi) Detti T e T' i punti che si ottengono intersecando r con s e r' con s', rispettivamente, calcolare il volume del solido $RSTR'S'T'$.

Esercizio 23. Nello spazio euclideo reale, in cui sia fissato un riferimento cartesiano,

1. si determinino le equazioni cartesiane e parametriche della retta r passante per $R_0 = (1, 0, 0)$ e di direzione $W = \langle [1 \quad 0 \quad 2]^T \rangle$.
2. Si determinino le equazioni parametriche e cartesiane del piano π passante per l'origine e di giacitura $\Pi = \langle \vec{w}_1 = [0 \quad 1 \quad 1]^T, \ \vec{w}_2 = [1 \quad 0 \quad 1]^T \rangle$.
3. Si determinino le equazioni parametriche e cartesiane del piano σ passante per l'origine e di vettore normale $\vec{n} = [1 \quad -1 \quad 1]^T$.
4. Si determinino le equazioni cartesiane e parametriche della retta s che si ottiene intersecando i piani π e σ.
5. Le rette r e s sono sghembe?

Esercizio 24. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ si considerino le rette

$$r : \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ \\ z = 1 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + 2z + 1 = 0 \\ \\ y = 0 \end{cases}$$

1. Si determinino le equazioni parametriche delle rette r e s.
2. Si verifichi che r e s sono sghembe.
3. Si determinino i punti R e S di minima distanza tra le due rette.
4. Si determinino le rette passanti per il punto R e incidenti la retta s in un punto a distanza $\sqrt{3}$ da S. Si denotino con A e B tali punti.

5. Si determini l'area del triangolo ARB. Di che triangolo si tratta?

Esercizio 25. 1. Determinare le equazioni parametriche della retta s di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x-2y+z=2 \\ \\ z-y=-1 \end{cases}$$

2. Determinare l'equazione della retta r passante per $R:\ (-1,-2,1)$ e parallela alla retta di s.
3. Determinare una retta q passante per $Q:\ (-1,0,-1)$ e parallela alla retta r.
4. Determinare una retta q passante per $Q:\ (-1,0,-1)$ e secante la retta r.

Esercizio 26. Si considerino i piani π di equazione cartesiana $2x-y+3z-1=0$ e σ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x=2+\xi-\eta \\ y=2\xi+\eta \qquad \xi,\eta\in\mathbb{R}. \\ z=-1+\eta \end{cases}$$

1. Determinare le equazioni parametriche di π e l'equazione cartesiana di σ.
2. Determinare la mutua posizione dei due piani.
3. Sia $R:\ (1,-1,0)$, si determini la rette r passante per R e di direzione $\vec{w}=[1,2,-1]^T$.
4. Determinare l'intersezione tra r e σ.

Esercizio 27. Nello spazio euclideo reale, in cui sia fissato un sistema di riferimento cartesiano,

1. determinare i piani π_1 e π_2 del fascio $\mathcal{F}_r$ generato dala retta
$$r:\begin{cases} x=1+\xi \\ y=2\xi \qquad , \quad \xi\in\mathbb{R} \\ z=2\xi \end{cases}$$
e passanti, rispettivamente, per $P_1(1,1,2)$ e $P_2(0,0,0)$;
2. determinare il punti H_1 e H_2 di r aventi minima distanza da P_1 e P_2 rispettivamente.
3. Quale dei triangoli $P_1P_2H_1$ e $P_1P_2H_2$ ha area maggiore? (Giustificare la risposta.)
4. Determinare l'area del quadrilatero $P_1P_2H_1H_2$.

Esercizio 28. 1. Determinare la retta r di equazioni parametriche.

$$r:\begin{cases} x-y=-1 \\ y-z=2 \end{cases}$$

2. Il punto $P:\ (-1,0,1)$ appartiene alla retta r? Determinare una retta t per P parallela a r.
3. La retta s per $S:\ (-1,1,0)$ e di direzione $\vec{w}=[-,1,1,-1]^T$ è sghemba rispetto a t? E rispetto a r?
4. Scrivere l'equazione di un piano passante per l'origine e parallelo a r.

Esercizio 29. ☻Nello spazio euclideo si considerino i vettori $\vec{v} = [1\ 1\ 1]^T$ e $\vec{w} = [2\ 2\ 1]^T$.

(i) Si decomponga il vettore $\vec{v}$ come somma di $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ in cui $\vec{v}_1$ è ortogonale a $\vec{w}$ e v_2 è parallelo a $\vec{w}$.

(ii) Si determinino le superfici dei due parallelogrammi aventi come lati i vettori $\vec{v}\,\vec{v}_1$ (primo parallelogramma) e $\vec{v}\,\vec{v}_2$ (secondo parallelogramma).

(iii) Le due superfici del punto precedente risultano uguali: dire se si tratta di un risultato generale (indipendente dai vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ dati), ed eventualmente giustificarlo e darne un'interpretazione in termini di geometria (piana) euclidea.

Esercizio 30. ☻ Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$, in cui sia fissato un riferimento cartesiano,

1. si determini il fascio di piani $\mathcal{F}$ di asse la retta r per $R_0 = (0, 0, 1)$ e di direzione $W = \langle \vec{w} = [1 \quad 2 \quad 1]^T \rangle$.
2. Si determini il piano π del fascio $\mathcal{F}$ passante per $A = (1, 1, 0)$;
3. dati i punti $B = (1, 0, 2)$ e $C = (0, 0, 1)$ di $\mathbb{E}^3$, si determinino le proiezioni A', B' e C' dei punti A, B e C sul piano $\pi' : x - z + 1 = 0$. a partire dall'origine $O = (0, 0, 0)$. (L'origine O è centro di simmetria).
4. Si determini il volume del solido $OABCAB'C'$ e si abbozzi una figura della situazione.
5. Dimostrare che le rette per AB e per $A'B'$ sono complanari e analogamente le rette per BC e $B'C'$ e che i relativi punti di intersezione sono allineati.

N.B.
Il simbolo ☻ denota esercizi giudicati **difficile**.