

Prof. M. Spora

★ superficie regolari : richiami
(parametriche)

Una (porzione di) superficie regolare Σ
(parametrica)

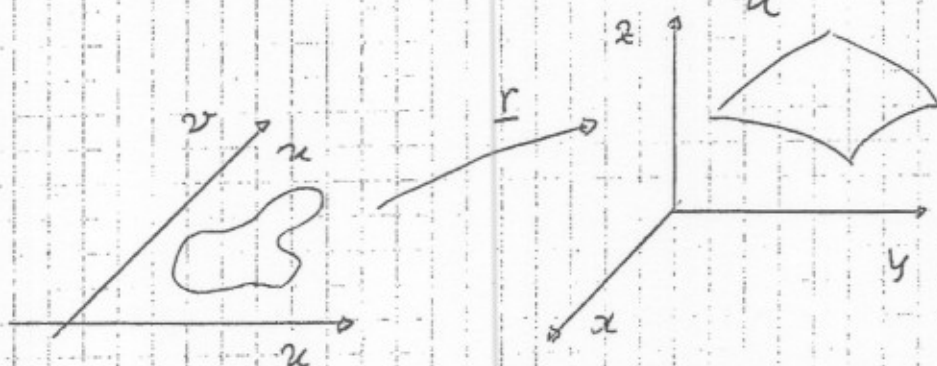
è una mappa

$$\underline{r} : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

aperto in \mathbb{R}^2

(esplicitamente:

$$\underline{r} = \underline{r}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$$



tale che

1. $\underline{r} \in \mathcal{C}^k(U)$

2. \underline{r} è iniettiva

3. $\underline{r}_u \times \underline{r}_v \neq \underline{0}$ in U

k suff. grande
in genere prendiamo
 $k = \infty \dots$

(\times : prod. vettoriale ; $\underline{r}_u := \frac{\partial \underline{r}}{\partial u}$ etc...)

3. significa : $\begin{pmatrix} \underline{r}_u & \underline{r}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}$

ha ranko massimo (= 2)

ovvero: \underline{r}_u e \underline{r}_v sono linearmente indipendenti

In genere si confonde Σ (che è una applicazione) col suo codominio. Questo è giustificato dal fatto che \star la condizione di regolarità è invariante rispetto ad una trasformazione regolare dei parametri.

brevemente: riparametrizzazione

Ovvero, se $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^2$

$$f(u, v) = (u', v')$$

$$\begin{cases} u' = u'(u, v) \\ v' = v'(u, v) \end{cases}$$

è continua e C^k insieme alla sua inversa e $\frac{\partial(u', v')}{\partial(u, v)} \neq 0$

la mappa $\underline{R}: U' \rightarrow \mathbb{R}^3$

definita da $\underline{R}(u', v') := (\underline{r} \circ f^{-1})(u', v') =$

$$= \underline{r}(u(u', v'), v(u', v')) \quad \text{è ancora regolare}$$

(con lo stesso codominio)

(la verifica è semplice... per il punto 3.)

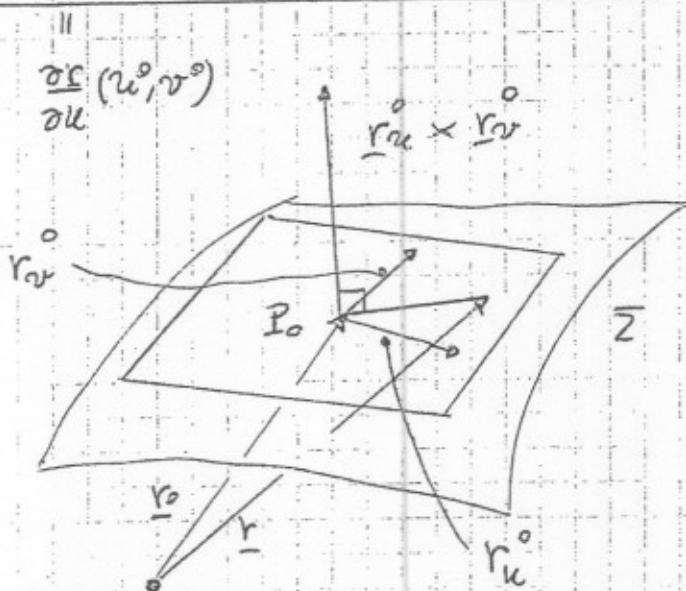
for vedere che $\underline{R}_{u'} \times \underline{R}_{v'} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(u', v')} \underline{r}_u \times \underline{r}_v$
 $0 \neq \frac{\partial(u, v)}{\partial(u', v')} \left(\frac{\partial(u', v')}{\partial(u, v)} \right)^{-1}$

la condizione di regolarità (e 3° in particolare) rende possibile la costruzione del

⇨ piano tangente in $P_0 \equiv \gamma(u_0, v_0) \in \Sigma$

$$\langle \underline{r}_u \times \underline{r}_v \mid \underline{r} - \underline{r}_0 \rangle = 0$$

notazione:



$T_{P_0} \Sigma$

⇨ Tale nozione è invariante per riparametrizzazione (... giacendo i vettori applicati in P_0 , il piano generato da \underline{r}_u e \underline{r}_v coincide con quello generato da \underline{r}'_u e \underline{r}'_v ...)

⇨ Sia $\underline{N} := \frac{\underline{r}_u \times \underline{r}_v}{\|\underline{r}_u \times \underline{r}_v\|} \quad (\equiv \text{versore normale})$
 $(\|\underline{N}\| = 1)$

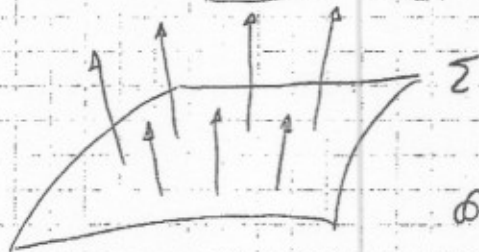
\underline{N} rimane invariato per una riparametrizzazione tale che $\frac{\partial(u', v')}{\partial(u, v)} > 0$ (ovvero, che non cambia l'orientamento di \mathbb{R}^2), altrimenti cambia segno.

\star una particolare scelta di N (e^0) viene detta
 orientamento di Σ . Si parla più
 di superficie orientata

Dunque, una superficie ^{regolare} può sempre dotarsi
 di un orientamento, localmente ... cioè
 non è più possibile globalmente



ex.
 nastro di
 Möbius



Si noti che lo scambio
 di u e v :

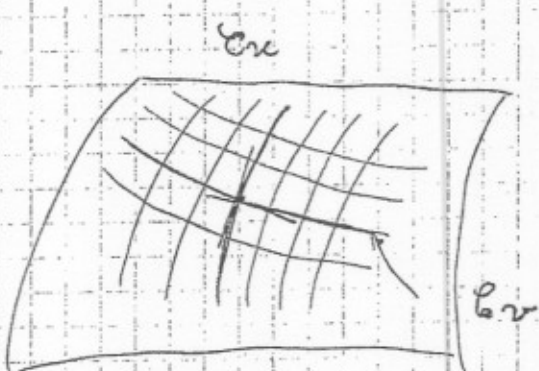
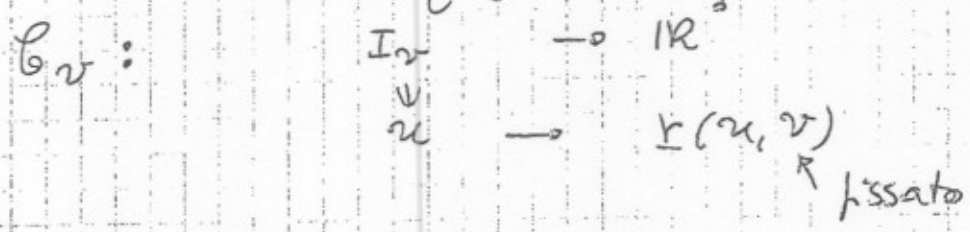
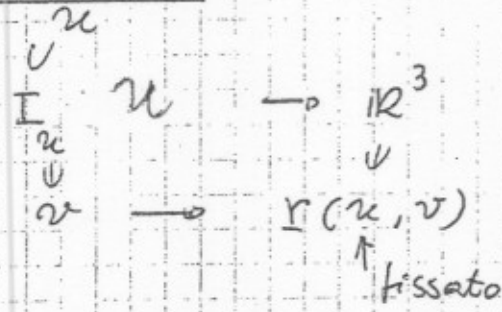
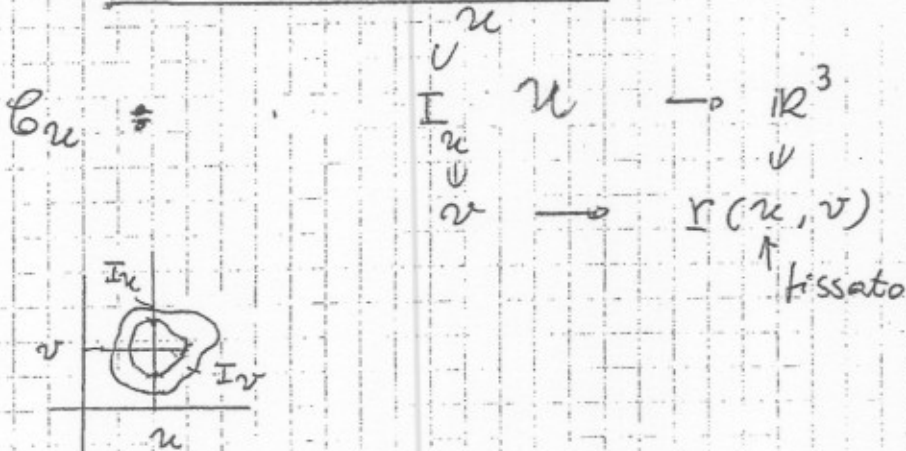
$$\begin{aligned} u' &= v \\ v' &= u \end{aligned}$$

Cambia l'orientamento di Σ :

$$\frac{\partial(x',v')}{\partial(u,v)} = \frac{\partial(v,u)}{\partial(u,v)} = -1$$

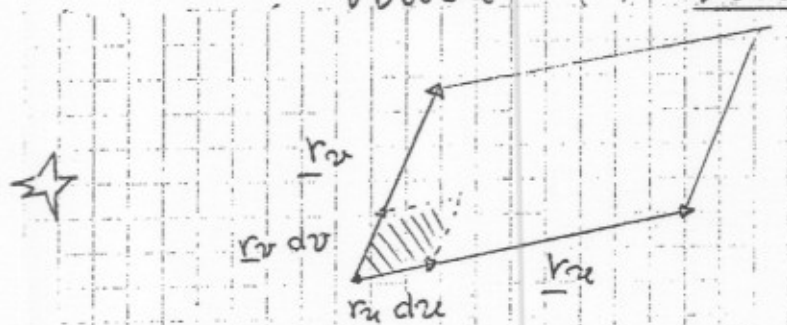


Coordinate curvilinee

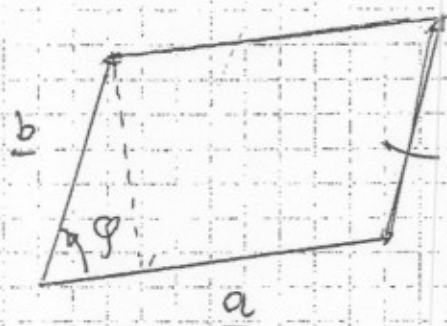


C_u, C_v sono curve su Σ , e vengono dette "coordinate curvilinee su Σ "

C_u e C_v si incontrano trasversalmente:
infatti $r_u(u, v)$ e $r_v(u, v)$ sono i loro vettori velocità ...



elemento d'area $do = \|r_u \times r_v\| du dv$



Q parallelogramma

$$\underline{a}, \underline{b} \neq 0$$

Ricordiamo che $A(Q) = \|\underline{a}\| \|\underline{b}\| \sin \varphi$
area

$$\text{e } 0 \leq \varphi \leq \pi$$

$$\sin \varphi = (1 - \cos^2 \varphi)^{1/2}$$

$$\text{e } \cos \varphi = \frac{\langle \underline{a} | \underline{b} \rangle}{\|\underline{a}\| \|\underline{b}\|}$$

$$\Rightarrow A(Q) = \left[\|\underline{a}\|^2 \|\underline{b}\|^2 - \langle \underline{a} | \underline{b} \rangle^2 \right]^{1/2}$$

Posto ora $\underline{a} = \underline{r}_u$, $\underline{b} = \underline{r}_v$, e

$$E := \langle \underline{r}_u | \underline{r}_u \rangle = \|\underline{r}_u\|^2$$

$$F := \langle \underline{r}_u | \underline{r}_v \rangle (= \langle \underline{r}_v | \underline{r}_u \rangle)$$

$$G := \langle \underline{r}_v | \underline{r}_v \rangle = \|\underline{r}_v\|^2$$

e $F = 0$

si parla di coordinate curvilinee ortogonali

Si ha subito

$$d\sigma = (EG - F^2)^{1/2} du dv$$

$$\left[\begin{array}{l} \underline{a} = (a_1, a_2, a_3) \\ \underline{b} = (b_1, b_2, b_3) \end{array} \right. \quad A(Q) = \left\{ \begin{array}{l} |a_1 a_2| \\ b_1 b_2 \end{array} \right\}^2 + \left\{ \begin{array}{l} |a_2 a_3| \\ b_1 b_3 \end{array} \right\}^2 + \left\{ \begin{array}{l} |a_1 a_3| \\ b_2 b_3 \end{array} \right\}^2 \right\}^{1/2}$$

$$d\sigma = \left\{ \left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right]^2 + \left[\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} \right]^2 + \left[\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} \right]^2 \right\}^{1/2} du dv$$



Luogherza di una curva \mathcal{C} su Σ

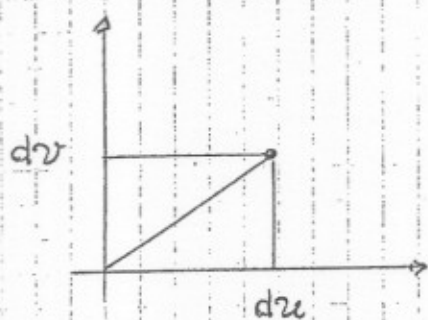
$$ds^2 = \langle dr | dr \rangle = \|dr\|^2 \text{ metrica}$$

(a curve: I^a forma quadratica
fondamentale)

ds: elemento di
luogherza d'arco

$$= \langle r_u dx + r_v dy | r_u dx + r_v dy \rangle =$$

$$= \boxed{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}$$



\mathbb{R}^2

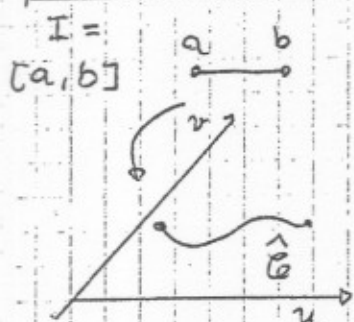
$$\text{se } \mathcal{C}: \begin{matrix} [a, b] \\ \text{"} \\ I \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ u \\ t \rightarrow r(t) \in \Sigma \end{matrix}$$

regolare

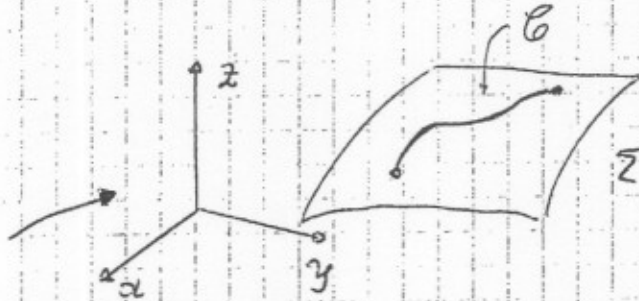


$$L(\mathcal{C}) = \int_a^b \|\dot{r}(t)\| dt = (r(t) \equiv r(u(t), v(t)))$$

$$= \int_a^b (E \dot{u}^2 + 2F \dot{u} \dot{v} + G \dot{v}^2)^{1/2} dt$$



$$\mathcal{C}: t \rightarrow (u(t), v(t))$$



★ La prima forma fondamentale (metrica) è definita positiva

Ciò è evidente dalla definizione, e in ogni caso segue da $E > 0$, $G > 0$, $EG - F^2 > 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} (du, dv) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = E du^2 + 2F du dv + G dv^2 \\ \equiv \underline{w} \in \mathbb{R}^2 \equiv I(\underline{w}) \equiv g(\underline{w}, \underline{w}) \end{array} \right.$$

[in $u \in \mathbb{R}^n$ una metrica si ottiene a partire da una matrice simmetrica definita positiva (ovvero, con autovalori positivi)

$$(g_{ij}) \quad ds^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} du_i du_j \equiv g(\underline{w}, \underline{w})$$

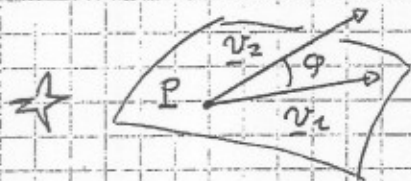
con $\underline{w} = (du_1, du_2, \dots, du_n)$, $g_{ij} = g_{ji}$,
e $g(\underline{w}, \underline{w}) \geq 0$, $= 0$ sse $\underline{w} = 0$]

★★

La metrica consente di effettuare misure su Σ operando sullo spazio dei parametri.

Ad esempio

$ds^2 \sim (g_{ij})$ è anche detta metrica Riemanniana



L'angolo (non orientato)

tra due vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in T_P \Sigma$

vale	$\cos \varphi = \frac{\langle \underline{v}_1 \underline{v}_2 \rangle}{\ \underline{v}_1\ \ \underline{v}_2\ } = \dots = \frac{g(\underline{w}_1, \underline{w}_2)}{g(\underline{w}_1, \underline{w}_1)^{\frac{1}{2}} g(\underline{w}_2, \underline{w}_2)^{\frac{1}{2}}}$
------	--

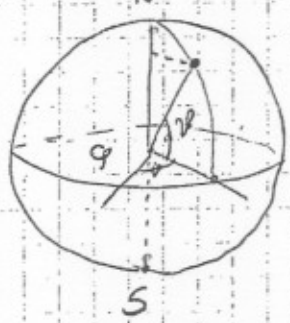
dove, se $\underline{v}_i = \underline{r}_u du_i + \underline{r}_v dv_i$, i

VII-8 $\underline{w}_i = (du_i, dv_i) \in \mathbb{R}^2 \quad i=1,2$

★ siano date, su $U \subset \mathbb{R}^2$, due metriche g_1, g_2 con $g_2 = \lambda g_1$, $\lambda: U \rightarrow \mathbb{R}$ funzione liscia (C^∞) e positiva; $\tilde{\epsilon}$ immediato costante che l'angolo tra due vettori in \mathbb{R}^2 (applicati in un punto di U)

★ Definito tramite la formula precedente $\tilde{\epsilon}$ lo stesso, sia per g_1 , che per g_2 .
(Non $\tilde{\epsilon}$ così per le lunghezze.)
Due metriche si dicono veramente equivalenti conformemente equivalenti.

★ Esempio importante: la CARTA DI MERCATOR

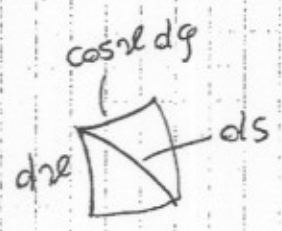
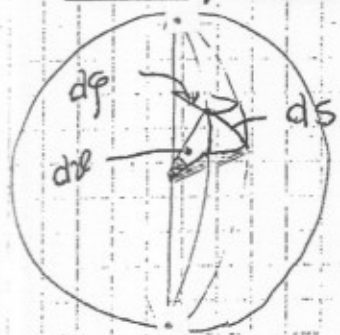


g : longitudine Coordinate Sferiche
 v : latitudine (ortogonali)

$$ds^2 = \cos^2 v \, dg^2 + dv^2$$

($R = \text{raggio} = 1$)

"teorema di Pitagora nell'infinitesimo"



$$\begin{cases} x = \cos v \cos g \\ y = \cos v \sin g \\ z = \sin v \end{cases}$$

$g \in [0, 2\pi)$
 $v \in [\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}]$

ora :

$$dS_{\text{sfera}}^2 = \cos^2 \vartheta \left(d\varphi^2 + \left(\frac{d\vartheta}{\cos \vartheta} \right)^2 \right)$$

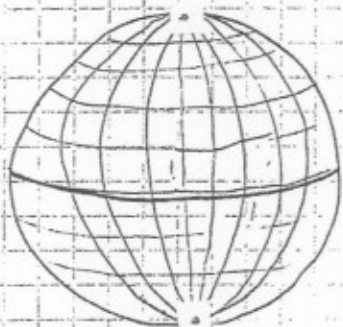
$$= \cos^2 \vartheta (d\varphi^2 + d\Phi^2)$$

$$= \cos^2 \vartheta dS_{\text{piano}}^2 \quad \text{piano: coord. } \varphi, \Phi$$

dove Φ è una primitiva di $\frac{1}{\cos \vartheta}$ ($\vartheta \neq \frac{\pi}{2}$)

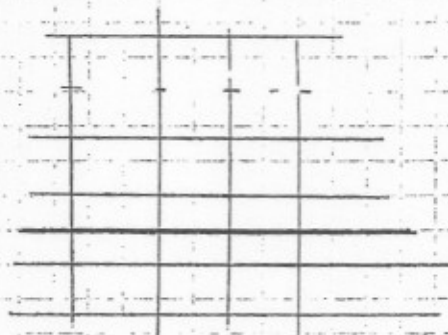
si prende: $\star \quad \boxed{\Phi = \log \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\vartheta}{2} \right) \right)}$

"funzione delle latitudini crescenti"



$$\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$\Phi \rightarrow +\infty$$



$\cos^2 \vartheta = \lambda$ = fattore di scala (o di distorsione)

\star La Carta di Mercator è conforme (importante per la navigazione !...) ; è quasi isometrica in prossimità dell'equatore ($\cos \vartheta \approx 1$) ; procedendo verso i poli, le distanze vengono monumentalmente alterate

Vedi anche oltre

osservazione:
 ☆ su una qualsiasi superficie ^{riemanniana} si possono introdurre, localmente, coordinate isoterme, ovvero, tali che la metrica abbia la seguente espressione

$$ds^2 = \lambda(u,v) (du^2 + dv^2) \quad \lambda > 0$$

⇒ ogni superficie è localmente "conformemente piatta" (Gauss, Beltrami)

(la piattezza si riferisce al fatto che a seconda membri oppure la metrica del piano...)

Per la sfera questo fatto è stato verificato esplicitamente...

Le coordinate isoterme sono in particolare, ortogonali ($F=0$, e in più $E=G=\lambda$).

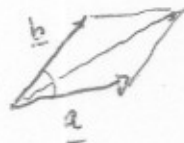
La dimostrazione si basa sulla teoria delle funzioni armoniche (v. oltre)

* Osservazione si noti come la

formula

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

altro non sia [sia a livello finito che infinitesimale] che il teorema di Carnot *



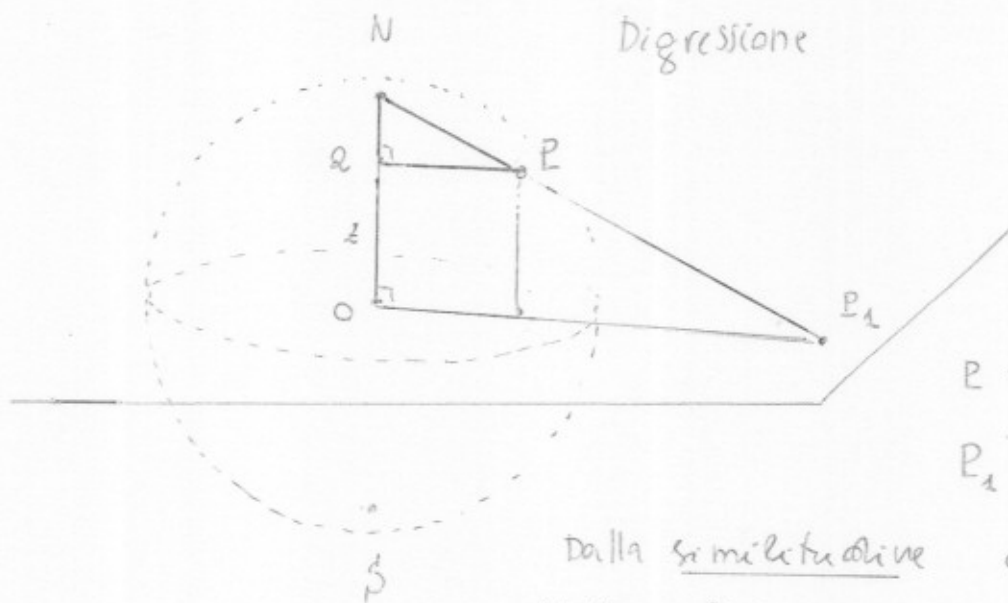
$$\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\langle a, b \rangle$$

$$(\|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\cos\gamma \|a\| \|b\|)$$

Se $\langle a, b \rangle = 0$ si ritrova

il teorema di Pitagora

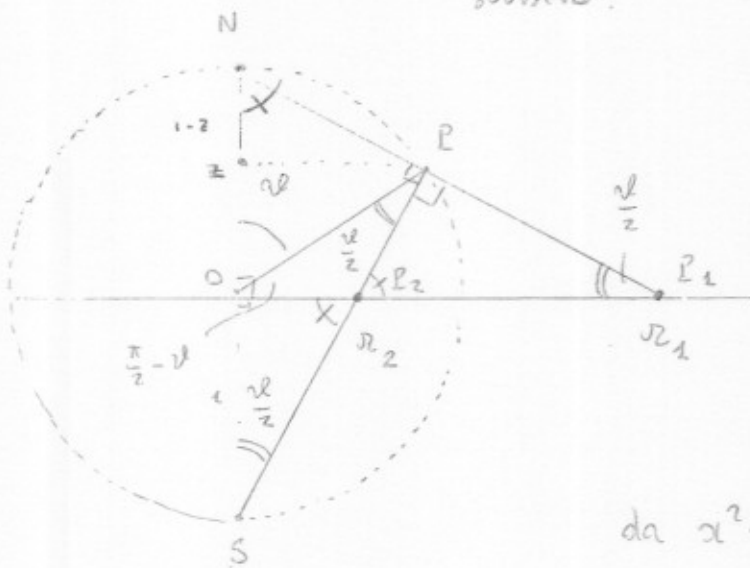
◇ La proiezione stereografica (Ipparco, II° sec a.c.)



$$P = (x, y, z)$$

$$P_1 = (u, v, 0)$$

Dalla similitudine di $\Delta(NPQ)$ e $\Delta(NP_1O)$ (triangoli in Q e O , rispettivamente), è subito:



$$\begin{cases} u = \frac{x}{1-z} \\ v = \frac{y}{1-z} \end{cases} \quad z \neq 1$$

$$\begin{aligned} x &= u(1-z) \\ y &= v(1-z) \end{aligned}$$

da $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ si ha, successivamente

$$(u^2 + v^2)(1-z)^2 + z^2 = 1$$

$$(u^2 + v^2)(1-z) = 1-z^2 = (1-z)(1+z)$$

$$\Rightarrow z = \frac{u^2 + v^2 - 1}{1 + u^2 + v^2}$$

dalla similitudine di $\Delta(ONP_1)$ e $\Delta(OP_2S)$

si prova

$$\frac{r_1}{1} = \frac{1}{r_2} \quad \text{ovvero} \quad r_1 r_2 = 1$$

(inversione circolare)

$$r_2 = \tan \frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow r_1 = \cotan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\tan \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\frac{u^2 + v^2}{1 + u^2 + v^2}} = \frac{1 + u^2 + v^2}{u^2 + v^2}$$

$$\begin{cases} u = \cotan \frac{\alpha}{2} \cos \varphi \\ v = \cotan \frac{\alpha}{2} \sin \varphi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2u}{1 + u^2 + v^2} \\ y = \frac{2v}{1 + u^2 + v^2} \\ z = \frac{u^2 + v^2 - 1}{1 + u^2 + v^2} \end{cases} \quad (*)$$

$$\begin{cases} x = \sin \vartheta \cos \varphi \\ y = \sin \vartheta \sin \varphi \\ z = \cos \vartheta \end{cases}$$

$$\vartheta \in [0, \pi] \quad \text{latitudine}$$

$$\varphi \in [0, 2\pi)$$

coordinate
sferiche

Si ha per $\underline{r} = \underline{r}(\vartheta, \varphi) = \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{x^2+y^2-1}{1+x^2+y^2} \right)$

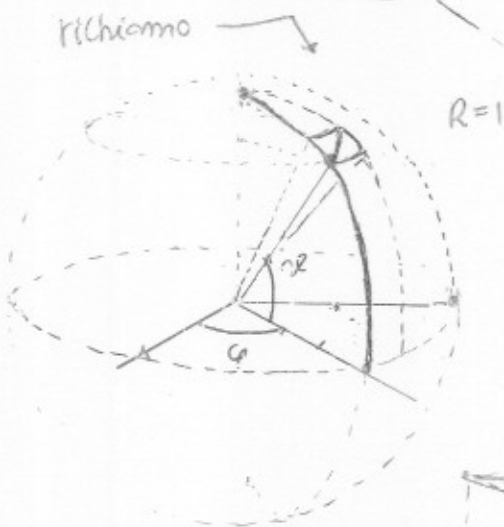
$$ds^2 = E d\vartheta^2 + 2F d\vartheta d\varphi + G d\varphi^2 \quad E = \|\underline{r}_\vartheta\|^2$$

$$F = \langle \underline{r}_\vartheta, \underline{r}_\varphi \rangle$$

metrica su S^2

$$G = \|\underline{r}_\varphi\|^2$$

richiamo



$$E = G = \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2}$$

vedi dettagli
nelle pagine
successive

calcolo... rapido

$$F = 0$$

"conformemente piatto"

$$ds^2 = \lambda(dx^2 + dy^2)$$

||

$$E = E(x, y)$$

$$\begin{cases} x = \cos \vartheta \cos \varphi \\ y = \cos \vartheta \sin \varphi \\ z = \sin \vartheta \end{cases}$$



$$ds^2 = d\vartheta^2 + \cos^2 \vartheta d\varphi^2$$

$$= \cos^2 \vartheta \left[\left[\frac{d\vartheta}{\cos \vartheta} \right]^2 + d\varphi^2 \right]$$

★ conserva gli
angoli

[si può dimostrare
anche per via
demonstrativa]

$$\vartheta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ latitudine}$$

$$\varphi \in [0, 2\pi) \text{ longitudine}$$

fattore di
distorsione

$$\cos^2 \vartheta (d\vartheta^2 + d\varphi^2)$$

↑
f. latitudini crescenti

carta di Mercatore
(Cosa sferica)

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2u}{1+u^2+v^2} \\ y = \frac{2v}{1+u^2+v^2} \\ z = \frac{u^2+v^2-1}{1+u^2+v^2} \end{cases}$$

$$\underline{r} = \left(\frac{2u}{1+u^2+v^2}, \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \frac{u^2+v^2-1}{1+u^2+v^2} \right)$$

$$\underline{r}_u = \left(\frac{2(1+u^2+v^2) - 4u^2}{(1+u^2+v^2)^2}, \frac{-4uv}{(1+u^2+v^2)^2}, \frac{2u(1+u^2+v^2) - (u^2+v^2-1) \cdot 2u}{(1+u^2+v^2)^2} \right)$$

$$= \left(\frac{2(1-u^2+v^2)}{(1+u^2+v^2)^2}, \frac{-4uv}{(1+u^2+v^2)^2}, \frac{2u[1+u^2+v^2 - u^2 - v^2 + 1]}{(1+u^2+v^2)^2} \right)$$

$$= \left(\frac{2(1-u^2+v^2)}{(1+u^2+v^2)^2}, \frac{-4uv}{(1+u^2+v^2)^2}, \frac{4u}{(1+u^2+v^2)^2} \right)$$

$$\underline{r}_v = \left(\frac{-4uv}{(1+u^2+v^2)^2}, \frac{2(1+u^2-v^2)}{(1+u^2+v^2)^2}, \frac{4v}{(1+u^2+v^2)^2} \right)$$

$$E_{\parallel} = \|\underline{r}_u\|^2 = \frac{1}{()^4} \left\{ [2(1-u^2+v^2)]^2 + 16u^2v^2 + 16u^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{()^4} \left[4 \left[\overset{x}{1+u^4+v^4} - \overset{x}{2u^2} + \overset{x}{2v^2} - \overset{x}{2u^2v^2} + \overset{x}{4u^2v^2} + \overset{x}{4u^2} \right] \right]$$

$$4 \left[1+u^4+v^4 + 2u^2 + 2v^2 + 2u^2v^2 \right] = 4(1+u^2+v^2)^2$$

$$= 4 \frac{1}{(1+u^2+v^2)^2}$$

$$E = \|\underline{r}_u\|^2 = \frac{4}{(1+u^2+v^2)^2} = G = \|\underline{r}_v\|^2$$

$$F = \langle \underline{r}_u, \underline{r}_v \rangle = \frac{8}{()^4} \left[\underbrace{-(1-u^2+v^2)uv}_{\text{wavy}} \quad \underbrace{-uv(1-v^2+u^2)}_{\text{wavy}} \right] + 2uv$$

$$\Rightarrow = -uv \left[\underbrace{1-u^2+v^2 + 1+u^2-v^2}_2 \right] + 2uv$$

$$= 0$$

$$ds^2 = \frac{4(du^2 + dv^2)}{(1+u^2+v^2)^2} = \frac{4 d\bar{z}d\bar{z}}{(1+|z|^2)^2}$$

not. conformal

★ Faciamo vedere che la proiezione stereografica

manda cerchi in cerchi
(sulla sfera) (sul piano)

[è l'unica tra le proiezioni
conformi con questa proprietà
(Lagrange)]

Sia \mathcal{C} $\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{array} \right.$

$(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$

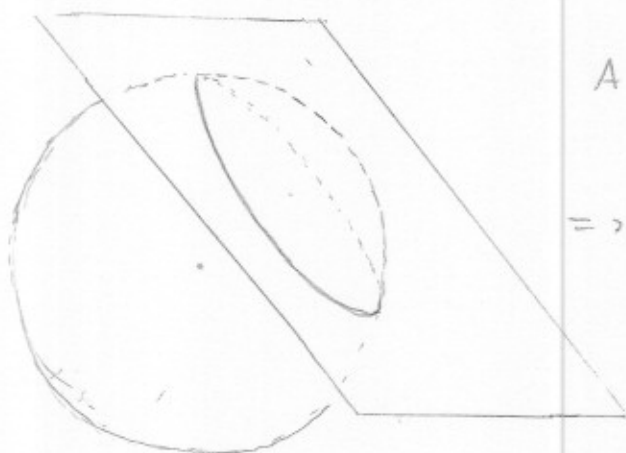
$r^2 = u^2 + v^2$

(◇)

assimilabile

una circonferenza su S^2

Sostituendo le (1) si ha



$$A \cdot \frac{2u}{1+r^2} + B \cdot \frac{2v}{1+r^2} + C \cdot \frac{r^2-1}{1+r^2} + D = 0$$

$$\Rightarrow 2A u + 2B v + C(r^2-1) + D(r^2+1) = 0$$

$$\Rightarrow (C+D)(u^2+v^2) + 2A u + 2B v + (D-C) = 0$$

che, genericamente, è l'eq. di una circonferenza
sul piano (u, v) , viceversa, da

e ponendo

$$C+D = 1$$

$$D-C = C'$$

$$\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 > 0 \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} B'v + \\ C' = 0 \end{array} \right\}$$

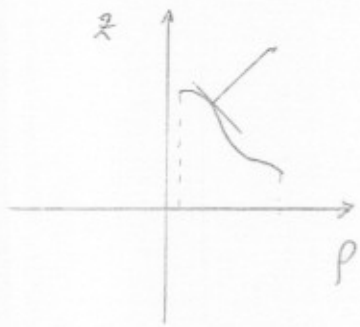
$2A = A'$, $2B = B'$, si arriva a (◇).

★ Anche tale proprietà può provarsi per via elementare.

È già nota ai Greci (costruzione di astrolabi,
perfezionati dagli Arabi...)

▷ Superficie di rivoluzione (o di rotazione)

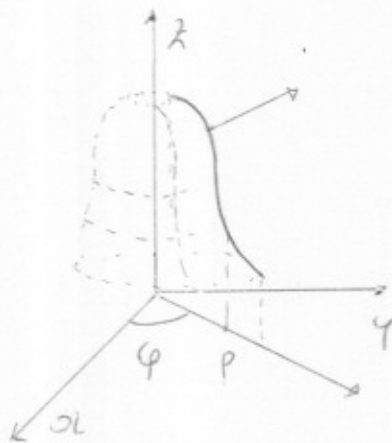
discussione generale



$$z = \Phi(\rho)$$

$$\rho \in I$$

Φ liscia...



coordinate cilindriche

$$\underline{r}(\rho, \varphi) =$$

$$\rho \cos \varphi \underline{i} + \rho \sin \varphi \underline{j} + \Phi(\rho) \underline{k}$$

$$= (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, \Phi(\rho))$$

$$\underline{r}_\rho = (\cos \varphi, \sin \varphi, \Phi'(\rho)) \quad \rho = \frac{d}{d\rho}$$

$$\underline{r}_\varphi = (-\rho \sin \varphi, \rho \cos \varphi, 0)$$

$$\underline{N} = \frac{\underline{r}_\rho \times \underline{r}_\varphi}{\|\underline{r}_\rho \times \underline{r}_\varphi\|} = \frac{\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \cos \varphi & \sin \varphi & \Phi' \\ -\rho \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \end{vmatrix}}{\|\cdot\|} =$$

$$= \frac{1}{\|\cdot\|} [-\rho \cos \varphi \Phi' \underline{i} - \rho \sin \varphi \Phi' \underline{j} + \rho \underline{k}]$$

$$\|\underline{r}_\rho \times \underline{r}_\varphi\|^2 = \rho^2 \Phi'^2 + \rho^2 = \rho^2 (1 + \Phi'^2)$$

$$\|\underline{r}_\rho \times \underline{r}_\varphi\| = \rho \sqrt{1 + \Phi'^2} \quad (\Rightarrow \text{sup. regolare...})$$

$$\underline{N} = -\cos \varphi \frac{\Phi'}{\sqrt{1 + \Phi'^2}} \underline{i} - \sin \varphi \frac{\Phi'}{\sqrt{1 + \Phi'^2}} \underline{j} + \frac{1}{\sqrt{1 + \Phi'^2}} \underline{k}$$

(Vedere selezionata il vettore normale in figura (si osserva che $\Phi' < 0 \dots$)

geometricamente \underline{i} (quasi) evidente

$\rho = \text{cost} \rightarrow$ "paralleli"

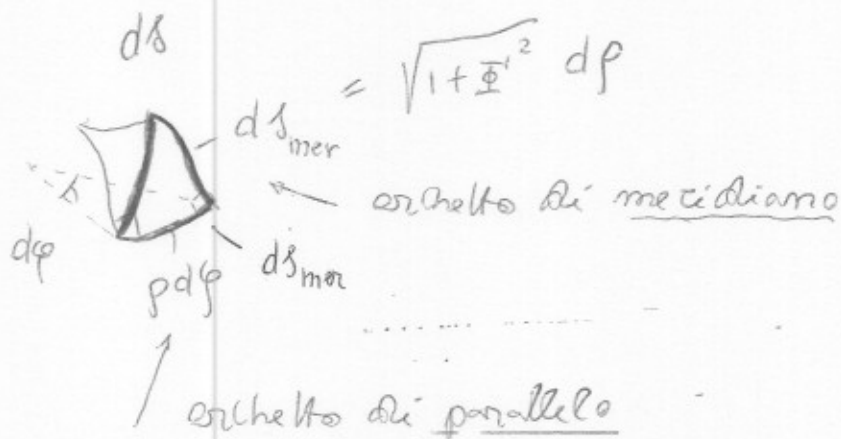
$\varphi = \text{cost} \rightarrow$ "meridiani"

Calcoliamo la prima forma fondamentale (metrica)

$$I^q \begin{cases} E = \langle \underline{r}_p, \underline{r}_p \rangle = 1 + \Phi'^2 \\ F = \langle \underline{r}_p, \underline{r}_q \rangle = \langle \underline{r}_q, \underline{r}_p \rangle = 0 \\ G = \rho^2 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \text{coord. cartesiane} \\ \underline{\text{ortogonali}} \end{array} \right]$$

$$ds^2 = (1 + \Phi'^2) dp^2 + \rho^2 dq^2$$

* interpretazione infinitesimale



* matrice sulla pseudosfera di Beltrami

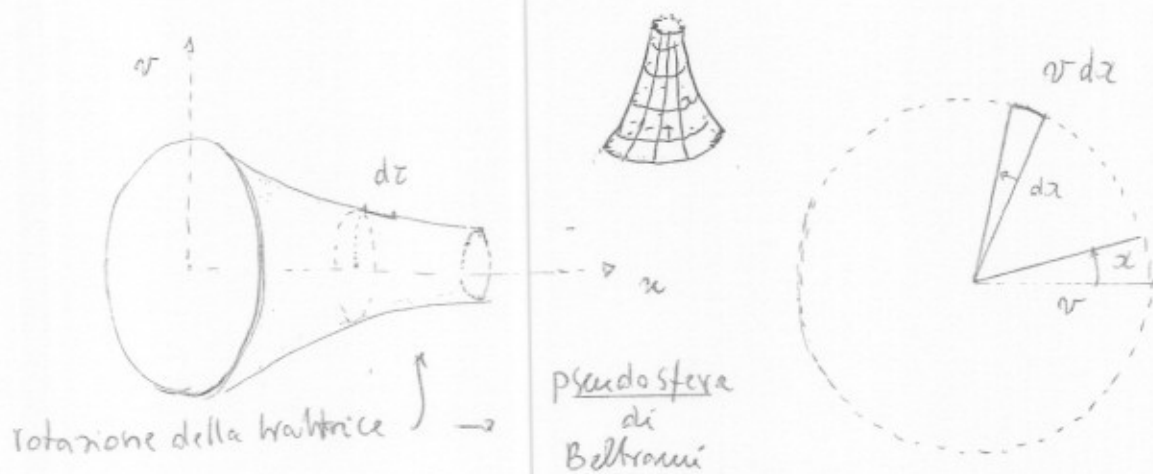
$$\begin{cases} u = \sigma - \tanh \sigma \\ v = \operatorname{sech} \sigma = \frac{1}{\cosh \sigma} \end{cases}$$

eq. parametrica della trattrice

$\tau :=$ lunghezza d'arco della trattrice

$$\tau = \int_0^\sigma \sqrt{du^2 + dv^2} = \dots = \log \cosh \sigma$$

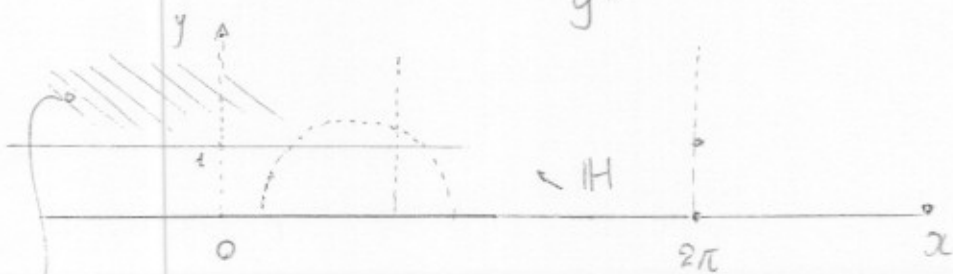
posto $\cosh \sigma = e^\tau$, \tilde{x} $v = e^{-\tau}$



pseudosfera di Beltrami

$$\begin{aligned} ds^2 &= v^2 dx^2 + d\tau^2 = e^{-2\tau} dx^2 + d\tau^2 \\ &= e^{-2\tau} (dx^2 + e^{2\tau} d\tau^2) = (e^\tau d\tau)^2 \\ &= \text{(posto } y = e^\tau > 0) \quad \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} = (de^\tau)^2 \end{aligned}$$

★ $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$
 metrica iperbolica su H



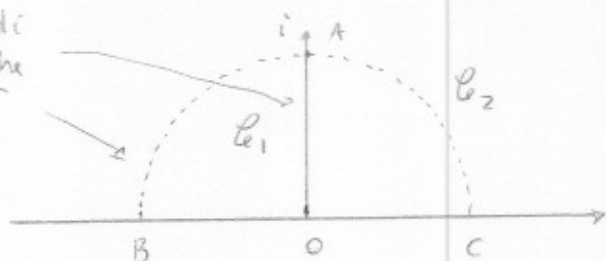
pseudosfera: modello locale di H

$\tau = 0 \Rightarrow y = 1$
 \tilde{x} "troncato" ed τ un quoziente



la x \tilde{x} periodica

† esempi di geodetiche v. oltre



$$y > 0 \quad ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

calcoliamo, a titolo di esercizio, la lunghezza (tramite la metrica iperbolica, di OA e \widehat{BAC} .

$$OA: \int_0^1 \frac{dy}{y} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 \frac{dy}{y} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \underbrace{\log 1}_{=0} - \underbrace{\log \epsilon}_{=+\infty} = +\infty$$

⚠ mt. improprio

$$\widehat{BAC}: \begin{cases} x = \cos \varphi \\ y = \sin \varphi \end{cases} \quad \varphi \in (0, \pi)$$

Si ha subito ... $\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\sin \varphi} = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sin \varphi}$ (integ. improprio) ⚠

ma $x \varphi \rightarrow 0^+ \Rightarrow \sin \varphi \sim \varphi \Rightarrow$ l'integrale diverge (è essenzialmente la "logaritmicamente crescente")

Si osserva poi che una traslazione lungo l'asse x ($x \mapsto x+a$) lascia la metrica inalterata, non così una traslazione lungo l'asse y !!

Inoltre un'omotetia $\begin{matrix} x \mapsto \lambda x \\ y \mapsto \lambda y \end{matrix} \quad \lambda > 0$

lascia pure inalterata la metrica iperbolica. Gli angoli calcolati con le due metriche (euclidea e iperbolica) sono ovviamente gli stessi (esse sono conformemente equivalenti)