Università degli Studi di Verona
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Appello di Analisi Matematica II (Mod. base) - a.a. 08/09, M. Squassina

[Corsi di Laurea in Mat. Applicata, Spec. Informatica, Info. Multimediale, Bioinfo]

Appello d'esame N.2, 2 Aprile 2009 - Sessione Primaverile

Nome, Cognome, Matricola e CdL:

Matematica Applicata? crocia il box: **si** **no** *Quanti errori nel qualifying? crocia il box:* **0** **1** **2**

Indicazioni: Per sostenere l'esame è necessario essere iscritti on-line ed aver passato la fase qualifying. Scrivere *nome*, *cognome*, *matricola* e *corso di laurea* in stampatello. I compiti anonimi *non* saranno corretti. Libri, appunti e calcolatrici grafiche *non* sono consentiti. Punteggio massimo: *+35 punti*.

GIUSTIFICARE ACCURATAMENTE TUTTE LE RISPOSTE FORNITE

Problema 1 [≤ 10pt]. Sia $\alpha > 0$ e si consideri la funzione $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f_\alpha(x,y) = \frac{e^\alpha}{4}x^4 - \frac{1}{2\alpha^2}y^2.$$

Mostrare che esiste $\alpha_0 > 0$ tale che

$$|\nabla f_{\alpha_0}(1,1)| = \min_{\alpha>0} |\nabla f_\alpha(1,1)|.$$

Suggerimento: una $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ continua e tale che $\varphi(\alpha) \to +\infty$ per $\alpha \to 0^+$ e $\alpha \to +\infty$ ha minimo.

Problema 2 [≤ 8pt]. Si studino i punti di massimo e minimo assoluto della funzione

$$f(x,y) = (x+y)^2 e^{xy}, \qquad (x,y) \in \mathbb{T},$$

dove $\mathbb{T}$ è il triangolo isoscele in $\mathbb{R}^2$ avente vertici nei punti $(0,0)$, $(1,1)$ e $(-1,1)$.

Problema 3 [≤ 8pt]. Per $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$ si consideri l'integrale

$$I(\alpha) = \iint_C \frac{x}{x^2+y^2}\,dxdy, \qquad C_\alpha = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 \le 4,\ 0 \le y \le (\tan\alpha)x\right\}.$$

1. Si calcoli il valore di $I(\alpha)$ per ogni $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$.
2. Si determini $\sup\left\{I(\alpha) : \alpha \in [0, \frac{\pi}{2})\right\}$.

Problema 4 [≤ 9pt]. Si consideri la successione di funzioni $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definita ponendo

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{\arctan^2 x}{n^2}}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

1. Si mostri che f_n converge uniformemente ad una funzione $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$.
2. È possibile che la successione delle derivate (f_n') converga uniformemente a f'?

TEMPO: 2h:30m. Verona, 2 Aprile 2009