☆ Determinazione delle geodetiche

★ Sfera : cerchi massimi (chiaro dalla def. tramite $k_g = 0$).

(ϑ, φ) $\qquad ds^2 = d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2$

colatitudine, longitudine

$\parallel \quad \parallel$

$x^1 \quad x^2$

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\vartheta \end{pmatrix}$$

$$(g^{ij}) = \frac{1}{\sin^2\vartheta}\begin{pmatrix} \sin^2\vartheta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin^2\vartheta} \end{pmatrix}$$

$ds^2 = g_{ij}\, dx^i dx^j$ metrica

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{ih} \left(g_{kh,j} + g_{jh,k} - g_{jk,h} \right)$$

simboli di Christoffel

$g_{kh,j} \equiv \dfrac{\partial g_{kh}}{\partial x^j}$ etc...

matrice inversa di (g_{ij})

☆ geodetiche

$$\boxed{\ddot{x}^i + \Gamma^i_{kh}\, \dot{x}^k \dot{x}^h = 0 \qquad i = 1, \dots n}$$

tali formule hanno validità generale; si usa la convenzione di Einstein: somma su indici ripetuti

$$\Gamma^1_{22} = -\frac{1}{2} \sin 2\vartheta$$

$$\Gamma^2_{12} = \cotan \vartheta$$

(gli altri sono nulli...). Si ha, per le geodetiche

$$\begin{cases} \vartheta'' - \frac{1}{2} (\varphi')^2 \sin 2\vartheta = 0 \\ \varphi'' + 2\varphi' \vartheta' \cotan \vartheta = 0 \end{cases}$$

Si calcoli $K = \dots +1$

$\varphi = \text{cost} \quad \vartheta = s$ (meridiano) è certamente soluzione, prendendo come parametro la lungh. d'arco). Per simmetria, tutti i cerchi massimi sono geodetiche, e una geodetica qualsiasi, avendo la sua direzione iniziale tangente ad un cerchio massimo, è necessariamente un cerchio massimo.

☆ Teorema di Minding

Due superficie con la stessa curvatura costante sono localmente isometriche

Dim. Partiamo da

$$(\sqrt{G})_{\rho\rho} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{costante}}}{K} \sqrt{G} = 0 \qquad (\text{coord. polari})$$

e ricordiamo che (*) $\lim_{\rho \to 0} \sqrt{G} = 0$, $\lim_{\rho \to 0} (\sqrt{G})_\rho = 1$

Abbiamo tre casi:

1. $K = 0$ $\quad \sqrt{G} = \rho + f(\vartheta)$, ma da (*) si ha $f(\vartheta) \equiv 0$

$\Rightarrow E = 1,\ F = 0,\ G(\rho, \vartheta) = \rho^2$ $\quad ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\vartheta^2$

piano

2. $K > 0$

$$\sqrt{G} = A(\vartheta)\cos(\sqrt{K}\rho) + B(\vartheta)\sin(\sqrt{K}\rho)$$

ma (*) implica $A(\vartheta) \equiv 0$ e (**) dà $B(\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{K}}$

$\Rightarrow E = 1,\ F = 0,\ G = \frac{1}{K}\sin^2(\sqrt{K}\rho)$ $\Rightarrow$ loc sfera di raggio $\frac{1}{\sqrt{K}}$

3. $K < 0$ $\quad \sqrt{G} = A(\vartheta)\cosh(\sqrt{-K}\rho) + B(\vartheta)\sinh(\sqrt{-K}\rho)$

$\Rightarrow E = 1,\ F = 0,\ G = -\frac{1}{K}\sinh^2(\sqrt{-K}\rho)$

$\rightsquigarrow$ loc. pseudosfera