ESERCIZI di ELEMENTI DI GEOMETRIA
a.a. 2007/08 Prof. M. Spera

IV

Geometria

Ingegneria Gestionale

Prova scritta del 15 luglio 2002: V.O. e I^0 canale N.O.

Tema I.1

I.1.E1. Sia dato $(\mathbf{R}^2, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ (prodotto scalare standard) e sia $e = (e_1, e_2)$ la base canonica.
Sia $T \in End(\mathbf{R}^2)$ tale che

$$m_{ee}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

i) Si verifichi che T è simmetrico.
ii) Determinare una base ortonormale e' di autovettori di T.
iii) Determinare $m_{e'e}(I)$. Di che tipo di matrice si tratta?
iv) Determinare, possibilmente in due modi, la segnatura della forma quadratica q_T associata a T.
v) Determinare il cono isotropo di q_T (solo N.O)
vi) Abbozzare le curve di livello di q_T. Di che tipo di curve si tratta? (solo N.O.)

I.1.E2. i) Nel piano euclideo reale $\mathbf{E}^2$, in cui sia fissato un riferimento cartesiano (e ampliato proiettivamente) determinare la conica $\mathcal{C}$ passante per $P : [1, 2, 2]$ e tale che le tangenti uscenti dal punto $C : [1, 1, 2]$ tocchino la conica in $A : [0, 1, 2]$, $B : [0, -1, 2]$ rispettivamente. Di che tipo di conica si tratta, dal punto di vista affine?
ii) Determinare gli assi e la forma canonica metrica di $\mathcal{C}$, e abbozzarne il grafico.

I.1.T1. i) Data una conica generale nel piano affine ampliato proiettivamente, se ne definisca il centro.
ii) Cosa sono gli asintoti di una conica (generale)?
iii) Cosa si intende per *fuoco di* una conica? E per *direttrice*? *Enunciare (e dimostrare: solo V.O.)*la caratterizzazione elementare delle coniche coinvolgente un *fuoco* e la relativa *direttrice*.
iv) Quanti punti in posizione generale determinano una conica? Perche'? Perche' invece una circonferenza è determinata da tre punti (non allineati)?

I.1.T2. i) Cosa si intende per sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale dato (su un campo K)?
ii) Cos'è la dimensione di uno spazio vettoriale?
iii) Definire la somma di due sottospazi. Quand'è che la somma di due sottospazi è diretta?
iv) Enunciare il teorema della base incompleta (in due modi).
v) Enunciare il teorema di Grassmann (e dimostrarlo: solo V.O).

Tempo a disposizione 2h
Le risposte vanno adeguatamente giustificate

Geometria

Ingegneria Gestionale

Prova scritta del 15 luglio 2002: V.O. e I^0 canale N.O.

Tema I.2

I.2.E1. Sia dato $(\mathbf{R}^2, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ (prodotto scalare standard) e sia $e = (e_1, e_2)$ la base canonica.
Sia $T \in End(\mathbf{R}^2)$ tale che

$$m_{ee}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

i) Si verifichi che T è simmetrico.
ii) Determinare una base ortonormale e' di autovettori di T.
iii) Determinare $m_{e'e}(I)$. Di che tipo di matrice si tratta?
iv) Determinare, possibilmente in due modi, la segnatura della forma quadratica q_T associata a T.
v) Determinare il cono isotropo di q_T (solo N.O.)
vi) Abbozzare le curve di livello di q_T. Di che tipo di curve si tratta? (solo N.O.)

I.2.E2. i) Nel piano euclideo reale $\mathbf{E}^2$, in cui sia fissato un riferimento cartesiano (e ampliato proiettivamente) determinare la conica $\mathcal{C}$ passante per $P : [1, 2, 2]$ e tale che le tangenti uscenti dal punto $C : [1, 1, 2]$ tocchino la conica in $A : [0, 1, 2]$, $B : [0, -1, 2]$ rispettivamente. Di che tipo di conica si tratta, dal punto di vista affine?
ii) Determinare gli assi e la forma canonica metrica di $\mathcal{C}$, e abbozzarne il grafico.

I.2.T1. i) Cosa si intende per spazio vettoriale euclideo?
ii) Dare la definizione di base ortonormale.
iii) Enunciare e dimostrare il teorema di Pitagora.
iv) Enunciare (e dimostrare) il teorema della proiezione ortogonale.*
v) Definire il gruppo ortogonale e precisarne il ruolo nel teorema spettrale.

I.2.T2. i) Dare la definizione di forma bilineare simmetrica su uno spazio vettoriale (di dimensione finita) e definire la nozione di ortogonalità rispetto a tale forma.
ii) Dare la definizione di vettore isotropo. Nel caso $n = 3$, qual è la relazione di tale nozione con la teoria delle coniche?
iii) Enunciare (e dimostrare*) il teorema di Sylvester.
iv) Nel caso $n = 3$, si interpreti quest'ultimo teorema in termini di geometria proiettiva.

* solo V.O.

Tempo a disposizione 2h
Le risposte vanno adeguatamente giustificate

Geometria

Ingegneria Gestionale

Prova scritta del 15 luglio 2002: V.O. e I^0 canale N.O.

Tema I.3

I.3.E1. Sia dato $(\mathbf{R}^2, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ (prodotto scalare standard) e sia $e = (e_1, e_2)$ la base canonica.
Sia $T \in End(\mathbf{R}^2)$ tale che

$$m_{ee}(T) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

i) Si verifichi che T è simmetrico.
ii) Determinare una base ortonormale e' di autovettori di T.
iii) Determinare $m_{e'e}(I)$. Di che tipo di matrice si tratta?
iv) Determinare, possibilmente in due modi, la segnatura della forma quadratica q_T associata a T.
v) Determinare il cono isotropo di q_T (solo N.O)
vi) Abbozzare le curve di livello di q_T. Di che tipo di curve si tratta? (solo N.O.)

I.3.E2. i) Nel piano euclideo reale $\mathbf{E}^2$, in cui sia fissato un riferimento cartesiano (e ampliato proiettivamente) determinare la conica $\mathcal{C}$ passante per $P : [1, 1, 1]$ e tale che le tangenti uscenti dal punto $C : [1, 1, 2]$ tocchino la conica in $A : [0, 1, 2]$, $B : [0, -1, 2]$ rispettivamente. Di che tipo di conica si tratta, dal punto di vista affine?
ii) Determinare gli assi e la forma canonica metrica di $\mathcal{C}$, e abbozzarne il grafico.

I.3.T1. i) Dare la definizione generale di spazio affine e fornire possibilmente almeno due esempi.
ii) Dare la definizione di sottospazio affine, e dire che cosa si intende con l'affermare che due sottospazi affini sono 1) incidenti, 2) paralleli.
iii) Enunciare e dimostrare, sia in forma geometrica (vettoriale) che in forma matriciale, il *teorema di Rouchè-Capelli.*

I.3.T2.V.O. i) Enunciare e dimostrare il teorema di Grassmann.
ii) Enunciare e dimostrare il Teorema XI.3 di Euclide.

I.3.T2.N.O. i) Definire, nel piano, la nozione di forma differenziale chiusa, esatta, e la relazione intercorrente tra le due.
ii) Enunciare e dimostrare il teorema fondamentale del calcolo generalizzato.
ii) Enunciare il teorema di Stokes.
iii) Mostrare che la circuitazione di un campo irrotazionale lungo una curva chiusa è nulla.

Tempo a disposizione 2h
Le risposte vanno adeguatamente giustificate

Geometria

Ingegneria Gestionale

Prova scritta del 15 luglio 2002: V.O. e I^0 canale N.O.

Tema I.4

I.4.E1. Sia dato $(\mathbf{R}^2, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ (prodotto scalare standard) e sia $e = (e_1, e_2)$ la base canonica.
Sia $T \in End(\mathbf{R}^2)$ tale che

$$m_{ee}(T) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

i) Si verifichi che T è simmetrico.
ii) Determinare una base ortonormale e' di autovettori di T.
iii) Determinare $m_{e'e}(I)$. Di che tipo di matrice si tratta?
iv) Determinare, possibilmente in due modi, la segnatura della forma quadratica q_T associata a T.
v) Determinare il cono isotropo di q_T (solo N.O)
vi) Abbozzare le curve di livello di q_T. Di che tipo di curve si tratta? (solo N.O.)

I.4.E2. i) Nel piano euclideo reale $\mathbf{E}^2$, in cui sia fissato un riferimento cartesiano (e ampliato proiettivamente) determinare la conica $\mathcal{C}$ passante per $P : [1, 1, 1]$ e tale che le tangenti uscenti dal punto $C : [1, 1, 2]$ tocchino la conica in $A : [0, 1, 2]$, $B : [0, -1, 2]$ rispettivamente. Di che tipo di conica si tratta, dal punto di vista affine?
ii) Determinare gli assi e la forma canonica metrica di $\mathcal{C}$, e abbozzarne il grafico.

I.4.T1. i) Cosa si intende col dire che due matrici quadrate $A, B \in M_n(K)$ sono simili?
ii) Quale relazione intercorre tra le matrici rappresentative di un endomorfismo T rispetto a due basi differenti?
iii) Cosa si intende col dire che due matrici quadrate $A, B \in M_n(K)$ sono congruenti? Come si interpreta ciò in termini di forme quadratiche?
iv) Cosa afferma il teorema di Sylvester rispetto alla congruenza di matrici simmetriche reali? Dimostrarlo (solo V.O.)
v) Nel caso $n = 3$ accennare a vari metodi di calcolo della segnatura.

I.4.T2.V.O. i) Enunciare e dimostrare il teorema di Grassmann.
ii) Enunciare e dimostrare il Teorema XI.3 di Euclide.

I.4.T2.N.O. i) Enunciare e dimostrare il teorema di Green.
ii) Enunciare il teorema della divergenza.
iii) Mostrare che il flusso di un campo solenoidale attraverso una superficie chiusa è nullo.

Tempo a disposizione 2h
Le risposte vanno adeguatamente giustificate

Geometria 15/7/2002 I° canale N.O. e V.O.

$(\mathbb{R}^2, \langle\,|\,\rangle)$

$T: \mathbb{R}^2 \circlearrowleft$

I.1.E1
I.2.E1

$$m_{ce}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \equiv A$$

T è simmetrico perché è simmetrica, e e è ortonormale

$$P_C^A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 =$$

$$= (1-\lambda+2)(1-\lambda-2) = (3-\lambda)(-1-\lambda)$$

$\Rightarrow$ autovalori: $\begin{cases} +3 \\ -1 \end{cases}$

Segnatura di q_T:

$$x^t A x = (x\ y)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + 4xy + y^2$$

dal calcolo precedente è emerso $(1,1)$ verificando anche col completamento dei quadrati

$$x^2 + 4xy + y^2 = x^2 + 4xy + 4y^2 - 3y^2 =$$

$$= (x+2y)^2 - 3y^2 = x'^2 - y'^2$$

ove $x' = x + 2y$, $y' = \sqrt{3}\, y$ $\quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

è pure $y = \frac{1}{\sqrt{3}} y'$

$$x = x' - 2y = x' - \frac{2}{\sqrt{3}} y'$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

non richiesto

$\Rightarrow$ (ponendo successivamente $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$)

$b = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \right)$ è una base di Sylvester

Determiniamo gli autospazi (saranno mutuamente ortogonali)

Determiniamo V_3^T

$$\begin{pmatrix} 1-3 & 2 \\ 2 & 1-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad -2x + 2y = 0 \qquad x - y = 0 \qquad \boxed{y = x}$

$\Rightarrow V_{-1}^T : \quad y = -x$

vettori

$$e' = (e_1', e_2')$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad e_2' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^{t}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$ (è una matrice ortogonale.)

$$\left[\begin{array}{l} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ok..} \end{array} \right]$$

sa: $3\xi^2 - \eta^2$ (v. figura...)

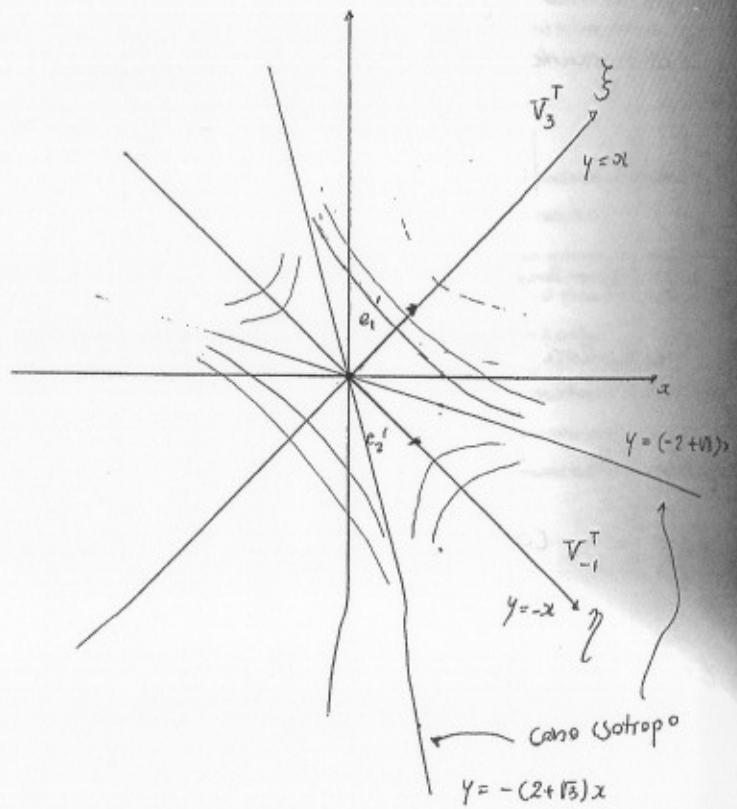
$$\begin{pmatrix} 1 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} m^2 = 0 \\ 2 \pm \sqrt{4-1} = -2 \pm \sqrt{3} \end{cases}$$

$$) x \} \cup \{ y = -(2+\sqrt{3})x \}$$

31

Le curve di livello di q_T sono iperboli aventi come assi $y = \pm x$ e asintoti $y = (-2 \pm \sqrt{3})x$



32

I.3.E1
I.4.E1

simile ...

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4$$

$\Rightarrow$ aut. $\begin{cases} +3 \\ -1 \end{cases}$ $\Rightarrow (1,1)$

segnatura (compl. quadr.)

$$x^2 - 4xy + y^2 = x^2 - 4xy + 4y^2 - 3y^2$$

$$= (x-2y)^2 - 3y^2 = x'^2 - y'^2 \quad \square$$

$$x' = x - 2y \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$y' = \sqrt{3}\, y$$

non richiesto

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}} y' \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$
$$x = x' + 2y = x' + \frac{2}{\sqrt{3}} y'$$

$\mathcal{B}' : \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \right)$ base di Sylvester

autospazi (ortog.)

$$V_3^T : \begin{pmatrix} \overbrace{1-3}^{-2} & -2 \\ -2 & \underbrace{1-3}_{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-2x - 2y = 0$$
$$x + y = 0 \qquad y = -x$$

$$V_{-1}^T : \quad y = x$$

base orto di autovettori, per es. $e_1' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$e_2' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

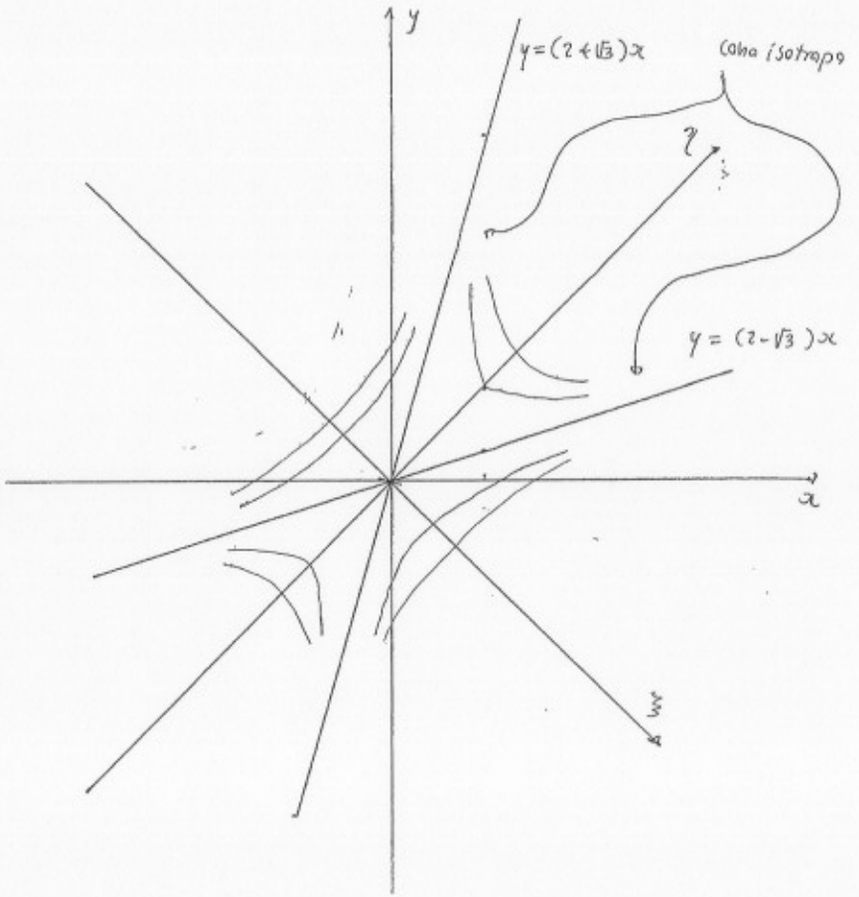
$$m_{e'e}(I) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^t$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

<u>Cono isotropo</u>. $\quad 1 - 4m + m^2 = 0$

$$m = 2 \pm \sqrt{4-1} = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$\{ y = (2+\sqrt{3})x \} \cup \{ y = (2-\sqrt{3})x \}$$

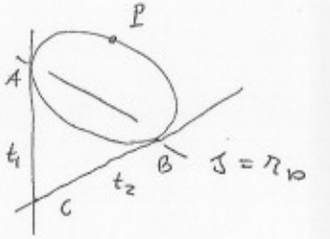


I·1·E2
I·2·E2

Trovare le t. che:

Le tangenti condotte da $C_1 : [1, 1, 2]$ tocchino $f: x_0 = 0$ in $A: [0, 1, 2]$ e $B: [0, -1, 2]$, e $\mathcal{C} \ni P: [1, 2, 2]$

Da quanto supposto segue subito che: $\mathcal{C}$ è un'iperbole, C_1 ne è il centro e AC e BC sono gli asintoti di $\mathcal{C}$.



Si ha: $t_1 = AC$

$$y - 2 = 2(x-1)$$
$$y - 2 - 2x + 2 = 0$$
$$\boxed{2x - y = 0}$$

$t_2 = BC$:

$$y - 2 = -2(x-1)$$
$$y - 2 + 2(x-1) = 0$$
$$y - 2 + 2x - 2 = 0$$
$$\boxed{2x + y - 4 = 0}$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{C}$ appartiene al fascio di coniche bitangenti

$$t_1 t_2 + \lambda r_0^2 = 0$$
$$(2x - y)(2x + y - 4) + \lambda = 0$$

$$P \in \mathcal{C} \Rightarrow \overbrace{(4-2)}^{2}\overbrace{(4+2-4)}^{2} + \lambda = 0$$

$2 \cdot 2 + \lambda = 0 \qquad 4 + \lambda = 0 \qquad \Rightarrow \lambda = -4$

$(2x - y)(2x + y - 4) + \lambda = 0$

$4x^2 - y^2 - 4(2x - y) - 4 = 0$

$4x^2 - y^2 - 8x + 4y - 4 = 0$

$$A: \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ -4 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

assi: $x = 1 \qquad y = 2$

forma can. metrica $\qquad a = 16 - 16 + 16 = 16$

$a_{00} = -4$

$\gamma = 3$

$$t^2 + \frac{a_{00}\gamma}{a} t + \frac{a_{00}^3}{a^2} = 0$$

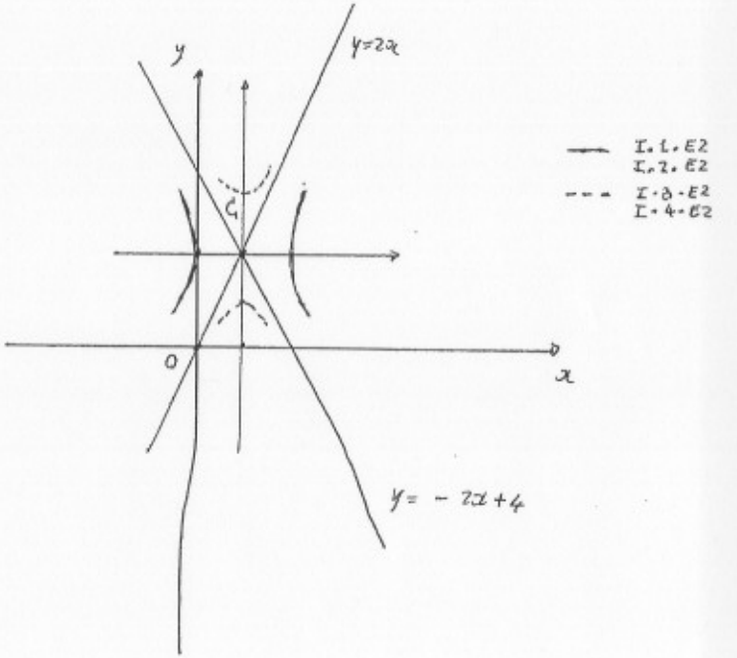
$$t^2 + \left(\frac{-4 \cdot 3}{16}\right) t + \frac{-4^3}{4^4} = 0$$

$$t^2 - \frac{3}{4} t - \frac{1}{4} = 0 \qquad 4t^2 - 3t - 1 = 0$$

$$t = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{8} = \frac{3 \pm 5}{8} \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$\alpha = 1 \quad \Rightarrow a = 1$

$\beta = -4 \qquad b = 2$



$\boxed{\begin{matrix} \text{I.3.E2} \\ \text{I.4 E2} \end{matrix}}$ coincidenza solo $P: [1,1,1] \in \mathcal{C}$

da $(2x - y)(2x + y - 4) + \lambda = 0$

è $\quad \underbrace{(2-1)}_{1}\underbrace{(2+1-4)}_{-1} + \lambda = 0$

$\lambda - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = 1}$

$$1(2x+y-4)+1=0$$

$$^2-y^2-8x+4y+1=0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -4 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$4-16+16=-4$$

$$4$$

$$3$$

$$\left(\frac{-4\cdot 3}{-4}\right)t+\left(\frac{-4^3}{4^2}\right)=0$$

$$+3t-4=0$$

$$t=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{-3\pm 5}{2}\ \begin{matrix}/\ -4\\ \backslash\ 1\end{matrix}$$

$$=1 \qquad b=\frac{1}{2}$$

p. tratteggiata nella pag. precedente

Geometria

Ingegneria Gestionale

Prova scritta del 15 luglio 2002: II^0 canale N.O.

Tema II.1

II.1.E1. Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}^4$ (coordinate x, y, z, w) si considerino i sottospazi

$$U:\begin{cases} x-y &= 0 \\ z-w &= 0 \end{cases}$$

e

$$W:\begin{cases} x-y &= 0 \\ y-w &= 0 \end{cases}$$

Si determinino basi di U, W, $U\cap W$, $U+W$.

II.1.E2. i) Nel piano euclideo reale $\mathbf{E}^2$, in cui sia fissato un riferimento cartesiano (e ampliato proiettivamente) determinare il fascio di coniche $\mathcal{F}$ tangenti a $r: x_2+2x_1=0$ in $O:[1,0,0]$ e ad $s: x_2=0$ in $P:[0,2,1]$. Di che tipo di coniche si tratta, dal punto di vista affine?

ii) Dimostrare che esse hanno lo stesso asse e determinarlo.

iii) Determinare la conica del fascio con fuoco in $F:[1,2,1]$ (si può procedere anche per via elementare, determinando la direttrice e...) e abbozzarne il grafico.

II.1.T1. Data una conica irriducibile $\mathcal{C}$ in $\mathbf{P}^2$ (in cui è fissato un riferimento proiettivo),

i) si definisca analiticamente la polare di un punto rispetto a $\mathcal{C}$.

ii) Si enunci e si dimostri il *teorema di reciprocità*.

iii) Si dia l'interpretazione geometrica della polare, giustificandola tramite ii).

iv) Dare la definizione di triangolo autopolare, fornendone poi un'interpretazione algebrica.

v) Sia dia la definizione conica a centro, di diametro di una tale conica e di diametro ad esso coniugato. Nel piano affine, si accenni a una costruzione geometrica di quest'ultimo.

II.1.T2. Sia dato $T\in End(V)$ ((V,K) di dimensione finita). i) Che cosa si intende per spettro di T?

ii) Cos'è un autospazio di T? E un autovettore?

iii) Definire il polinomio caratteristico di T.

iv) Definire la molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore; quale relazione intercorre tra le due?

v) Cosa si intende col dire che un endomorfismo è diagonalizzabile? Enunciare il relativo teorema e dare esempi di endomorfismi diagonalizzabili e non.

vi) Cosa si intende per endomorfismo simmetrico (in uno spazio euclideo)?

vii) Enunciare il teorema spettrale e, attraverso questo, definire la forma canonica metrica di una forma quadratica reale.

Tempo a disposizione 2h

Le risposte vanno adeguatamente giustificate

Geometria

Ingegneria Gestionale

Prova scritta del 15 luglio 2002: II^0 canale N.O.

Tema II.2

II.2.E1. Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}^4$ (coordinate x, y, z, w) si considerino i sottospazi

$$U : \begin{cases} x - y &= 0 \\ z - w &= 0 \end{cases}$$

e

$$W : \begin{cases} x - y &= 0 \\ y - w &= 0 \end{cases}$$

Si determinino basi di U, W, $U \cap W$, $U + W$.

II.2.E2. i) Nel piano euclideo reale $\mathbf{E}^2$, in cui sia fissato un riferimento cartesiano (e ampliato proiettivamente) determinare il fascio di coniche $\mathcal{F}$ tangenti a $r : x_2 + 2x_1 = 0$ in $O : [1, 0, 0]$ e ad $s : x_0 = 0$ in $P : [0, 2, 1]$. Di che tipo di coniche si tratta, dal punto di vista affine?

ii) Dimostrare che esse hanno lo stesso asse e determinarlo.

iii) Determinare la conica del fascio con fuoco in $F : [1, 2, 1]$ (si può procedere anche per via elementare, determinando la direttrice e...) e abbozzarne il grafico.

II.2.T1. i) Si specifichino le *proprietà caratterizzanti del determinante di una matrice quadrata* $A \in M_n(K)$, dandone (in dimensione 2 e 3) un'*intepretazione geometrica*.

ii) Si dimostri che $A \in M_n(K)$ *è invertibile se e solo se* $detA \neq 0$.

iii) Definire il concetto di minore di una matrice qualsiasi ed enunciare il teorema dei minori orlati.

II.2.T2. i) Dare la definizione generale di spazio affine e fornire possibilmente almeno due esempi.

ii) Dare la definizione di sottospazio affine, e dire che cosa si intende con l'affermare che due sottospazi affini sono 1) incidenti, 2) paralleli.

iii) Enunciare e dimostrare, sia in forma geometrica (vettoriale) che in forma matriciale, il *teorema di Rouchè-Capelli*.

Tempo a disposizione 2h

Le risposte vanno adeguatamente giustificate

Geometria

Ingegneria Gestionale

Prova scritta del 15 luglio 2002: II^0 canale N.O.

Tema II.3

II.3.E1. Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}^4$ (coordinate x, y, z, w) si considerino i sottospazi

$$U : \begin{cases} x + y &= 0 \\ z + w &= 0 \end{cases}$$

e

$$W : \begin{cases} x + y &= 0 \\ y + w &= 0 \end{cases}$$

Si determinino basi di U, W, $U \cap W$, $U + W$.

II.3.E2. i) Nel piano euclideo reale $\mathbf{E}^2$, in cui sia fissato un riferimento cartesiano (e ampliato proiettivamente) determinare il fascio di coniche $\mathcal{F}$ tangenti a $r : x_2 + 4x_1 = 0$ in $O : [1, 0, 0]$ e ad $s : x_0 = 0$ in $P : [0, 4, 1]$. Di che tipo di coniche si tratta, dal punto di vista affine?

ii) Dimostrare che esse hanno lo stesso asse e determinarlo.

iii) Determinare la conica del fascio con fuoco in $F : [1, 4, 1]$ (si può procedere anche per via elementare, determinando la direttrice e...) e abbozzarne il grafico.

II.3.T1. *i) Cosa si intende per spazio vettoriale euclideo?*

ii) Dare la definizione di base ortonormale.

iii) Enunciare e dimostrare il teorema di Pitagora.

iv) Enunciare il teorema della proiezione ortogonale.

v) Definire il gruppo ortogonale e precisarne il ruolo nel teorema spettrale.

II.3.T2. Sia dato uno spazio vettoriale (V, K).

i) Che cosa si intende col dire: "i vettori $v_1, v_2, \ldots v_k$ sono linearmente indipendenti"?

ii) Che cosa si intende per base di uno spazio vettoriale (finitamente generato)?

iii) Enunciare il teorema dello scambio.

iv) Dimostrare che tutte le basi hanno lo stesso numero di vettori.

v) Definire il concetto di dimensione di uno spazio vettoriale.

vi) Se $V =< v_1, \ldots, v_k >$, cosa si può affermare su $dimV$?

Tempo a disposizione 2h

Le risposte vanno adeguatamente giustificate

Geometria

Ingegneria Gestionale

Prova scritta del 15 luglio 2002: II^0 canale N.O.

Tema II.4

II.4.E1. Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}^4$ (coordinate x, y, z, w) si considerino i sottospazi

$$U : \begin{cases} x+y &= 0 \\ x+w &= 0 \end{cases}$$

e

$$W : \begin{cases} x+y &= 0 \\ y+w &= 0 \end{cases}$$

Si determinino basi di U, W, $U \cap W$, $U+W$.

II.4.E2. i) Nel piano euclideo reale E^2, in cui sia fissato un riferimento cartesiano (e ampliato proiettivamente) determinare il fascio di coniche $\mathcal{F}$ tangenti a $r : x_2 + 4x_1 = 0$ in $O : [1,0,0]$ e ad $s : x_0 = 0$ in $P : [0,4,1]$. Di che tipo di coniche si tratta, dal punto di vista affine?

ii) Dimostrare che esse hanno lo stesso asse e determinarlo.

iii) Determinare la conica del fascio con fuoco in $F : [1,4,1]$ (si può procedere anche per via elementare, determinando la direttrice e...) e abbozzarne il grafico.

II.4.T1. i) Dare la definizione di forma bilineare simmetrica su uno spazio vettoriale (di dimensione finita) e definire la nozione di ortogonalità rispetto a tale forma.

ii) Dare la definizione di vettore isotropo. Nel caso $n = 3$, qual è la relazione di tale nozione con la teoria delle coniche?

iii) Enunciare il teorema di Sylvester.

iv) Nel caso $n = 3$, si interpreti quest'ultimo teorema in termini di geometria proiettiva.

II.4.T2. i) Cosa si intende per spazio proiettivo $P(V)$ associato ad uno spazio vettoriale V. Come vengono descritti i suoi punti?

ii) Nel caso del piano proiettivo reale, come viene rappresentata l'equazione di una retta.?

iii) Cosa la differenzia rispetto ad una retta ordinaria?

iv) Dimostrare che due rette distinte del piano proiettivo sono sempre incidenti (in un unico punto).

Tempo a disposizione 2h

Le risposte vanno adeguatamente giustificate

geometria 15/7/2002 II^v Canale N.O.

II.1.E1
II.2.E1

in $\mathbb{R}^4$

$$U : \begin{cases} x-y=0 \\ z-w=0 \end{cases}$$

$$W : \begin{cases} x-y=0 \\ y-w=0 \end{cases}$$

$$U : \begin{matrix} x=x \\ y=x \\ z=z \\ w=z \end{matrix} \Rightarrow U = \langle \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}}_{\text{base di } U} \rangle$$

$$W : \begin{matrix} x=x \\ y=x \\ z=z \\ w=y=x \end{matrix} \qquad W = \langle \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}}_{\text{base di } W} \rangle$$

$$U \cap W : \begin{cases} x-y=0 \\ z-w=0 \\ y-w=0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x=x \\ y=x \\ z=w=y=x \\ w=x \end{matrix}$$

$$U \cap W = \langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \rangle$$

base di $U \cap W$

si ha: $\dim(U+W) = 2+2-1 = 3$

$$U+W = \langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \rangle$$

I vettori dati devono essere l. dipendenti

ciò si può accertare così:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \\ \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

tra i vettori dati, è immediato constatare che per es.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{sono l. indip}$$

$\Rightarrow$ costituiscono una base di $U+W$ (che ha dim = 3)

$$U+W = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{base}} \right\rangle$$

II · 3 E1
II · 4 · E1

in $\mathbb{R}^4$

$$U: \begin{cases} x+y=0 \\ z+w=0 \end{cases}$$

$$W: \begin{cases} x+y=0 \\ y+w=0 \end{cases}$$

U:
$x = \alpha$
$y = -\alpha$
$z = \beta$
$w = -\beta$

$$\Rightarrow U: \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\text{base di } U} \right\rangle$$

W:
$x = \alpha$
$y = -\alpha$
$z = \beta$
$w = -y = \alpha$

$$W: \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{base di } W} \right\rangle$$

$$U \cap W: \begin{cases} x+y=0 \\ z+w=0 \\ y+w=0 \end{cases}$$

$x = \alpha$
$y = -\alpha$
$z = -w = +y = -\alpha$
$w = -y = \alpha$

$$U \cap W = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{base di } U \cap W} \right\rangle$$

dim $U+W = \ldots 3$

$$U+W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

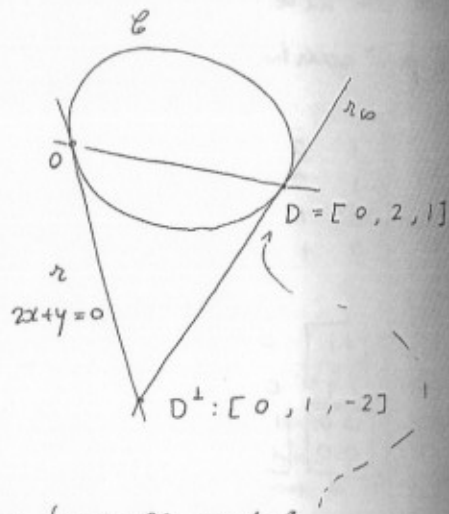
anche così:

$$\begin{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{matrix} \end{vmatrix} = \overbrace{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}^{0} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Sostituto che..

$$\left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{base}} \right\rangle$$

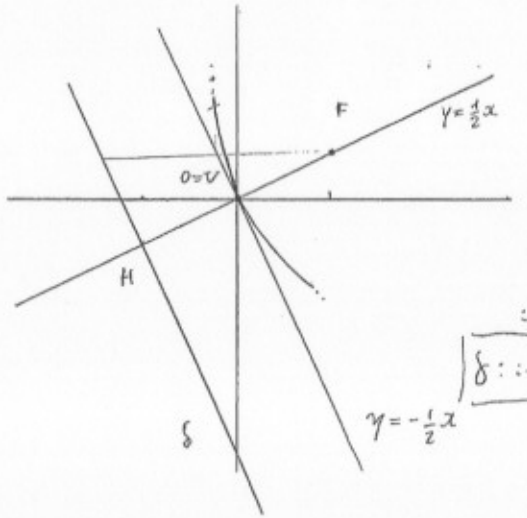
II · 1 · E2
II · 2 · E2



$\mathcal{C}$ appartiene ad un fascio di parabole

le direzioni di r e di diametri sono ⊥

=> OD è l'asse di $\mathcal{C}$ e O è il vertice



F: (2, 1)

=> H: (-2, -1)

δ: $y+1 = -2(x+2)$

$y+1+2x+4=0$

$2x+y+5=0$

$\boxed{\delta: 2x+y+5=0}$

Deduciamo l'eq. in due modi

(I) $$d(P, F)^2 = d(P, \delta)^2$$

P: pto della parabola; F: fuoco; δ: direttrice

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = \frac{(2x + y + 5)^2}{5}$$

$$5(x^2 - 4x + 4) + 5(y^2 - 2y + 1) = (2x + y + 5)^2$$

$$5x^2 + 5y^2 - 4x^2 - y^2 - 4xy$$

$$-20x + 20 - 10y + 5 - 20x - 10y - 25 = 0$$

$$\underbrace{x^2 + 4y^2 - 4xy}_{(x-2y)^2} - 40x - 20y = 0$$

ok !!

(II) (fuoco di conica bitangente ..)

$$(2x+y)\cdot 1 + \lambda(2y-x)^2 = 0$$

$$\lambda(2y-x)^2 + 2x + y = 0$$

$$\lambda(x^2 - 4xy + 4y^2) + 2x + y = 0$$

$$A_\lambda : \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \lambda & -2\lambda \\ \frac{1}{2} & -2\lambda & 4\lambda \end{pmatrix} \qquad a_{00} = 0$$

$$a = -2\lambda \cdot \frac{y}{2} \cdot 2 - \frac{\lambda}{4} - 4\lambda$$

$$= -6\lambda - \frac{\lambda}{4} = -\frac{25}{4}\lambda$$

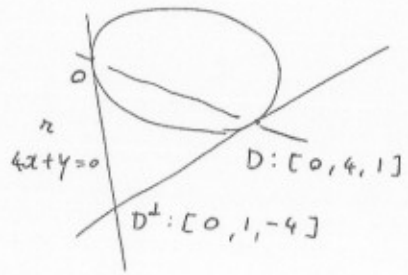
$$y = 5\lambda$$

$$p = \sqrt{-\frac{a}{y^3}} = \sqrt{\frac{\frac{25}{4}\lambda}{5^3\lambda^3}} = \sqrt{\frac{1}{20\lambda^2}}$$

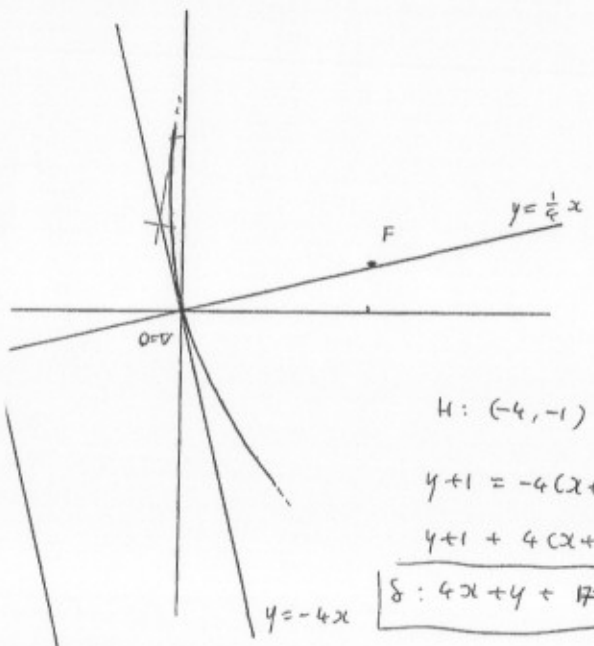
$$= \frac{1}{\sqrt{20}\,|\lambda|} = \frac{1}{2\sqrt{5}\,|\lambda|}$$

$$p = 2\,\overline{VF} = 2 \cdot \sqrt{5} = \frac{1}{2\sqrt{5}\,|\lambda|}$$

$$|\lambda| = \frac{1}{20} \qquad \Rightarrow \ldots \quad \lambda = -\frac{1}{20}$$



2a ...



$H: (-4, -1)$

$y+1 = -4(x+4)$

$y+1 + 4(x+4) = 0$

$\boxed{\delta: 4x+y+17=0}$

δ

$(x-4)^2 + (y-1)^2 = \dfrac{(4x+y+17)^2}{17}$

ecc...

Geometria

Ingegneria Gestionale

Prova scritta del 2 settembre 2002: V.O. e I° canale N.O.

Tema I.1

I.1.E1. Nello spazio vettoriale euclideo $(\mathbb{R}^4, < \cdot | \cdot >)$ (prodotto scalare standard) si consideri il sottospazio U generato dai vettori u_i, $i = 1, \ldots, 4$ seguenti:

$$u_1 = (1,0,1,0)^t \quad u_2 = (0,1,0,1)^t \quad u_3 = (1,0,0,0)^t \quad u_4 = (1,1,1,1)^t$$

i) Se ne determini la dimensione e una base ortonormale.
ii) Si stabilisca un sistema di equazioni cartesiane per $U^\perp$ e se ne determini una base ortonormale.

I.1.E2. i) Nel piano euclideo reale $\mathbb{E}^2$, in cui sia fissato un riferimento cartesiano (e ampliato proiettivamente) determinare la conica $\mathcal{C}$ tangente a $r_1 : 2x + y - 4 = 0$ in $A : (1,2)$ e ad $r_2 : -2x + y - 4 = 0$ in $B : (-1,2)$ e alla retta $s : y = 0$.
ii) Determinarne il tipo affine, il tipo metrico (solo N.O.), il centro e gli assi, abbozzandone il grafico.

I.1.T1. Data una conica irriducibile $\mathcal{C}$ in $\mathbb{P}^2$ (in cui è fissato un riferimento proiettivo),
i) si definisca analiticamente la polare di un punto rispetto a $\mathcal{C}$.
ii) Si enunci e si dimostri il *teorema di reciprocità*.
iii) Si dia l'interpretazione geometrica della polare, giustificandola tramite ii).
iv) Dare la definizione di triangolo autopolare, fornendone poi un'interpretazione algebrica.
v) Sia dia la definizione conica a centro, di diametro di una tale conica e di diametro ad esso coniugato. Nel piano affine, si accenni a una costruzione geometrica di quest'ultimo.

I.1.T2. Sia dato $T \in End(V)$ ((V, K) di dimensione finita).
i) Che cosa si intende per spettro di T?
ii) Cos'è un autospazio di T? E un autovettore?
iii) Definire il polinomio caratteristico di T.
iv) Definire la molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore; quale relazione intercorre tra le due?
v) Cosa si intende col dire che un endomorfismo è diagonalizzabile? Enunciare il relativo teorema (e dimostrarlo: solo V.O.) e dare esempi di endomorfismi diagonalizzabili e non.
vi) Cosa si intende per endomorfismo simmetrico (in uno spazio euclideo)?
vii) Enunciare il teorema spettrale e, attraverso questo, definire la forma canonica metrica di una forma quadratica reale.
Attenzione: si risponda alle domande nell'ordine indicato.

Tempo a disposizione 2h
Le risposte vanno adeguatamente giustificate

Geometria

Ingegneria Gestionale

Prova scritta del 2 settembre 2002: V.O. e I^0 canale N.O.

Tema I.2

I.2.E1. *Nello spazio vettoriale euclideo $(R^4, < | >)$ (prodotto scalare standard) si consideri il sottospazio* U *generato dai vettori u_i, $i = 1, \ldots, 4$ seguenti:*

$$u_1 = (1,0,1,0)^t \quad u_2 = (0,1,0,1)^t \quad u_3 = (1,0,0,0)^t \quad u_4 = (1,1,1,1)^t$$

i) Se ne determini la dimensione e una base ortonormale.
ii) Si stabilisca un sistema di equazioni cartesiane per $U^\perp$ e se ne determini una base ortonormale.

I.2.E2. i) Nel piano euclideo reale $\mathbf{E}^2$, in cui sia fissato un riferimento cartesiano (e ampliato proiettivamente) determinare la conica C tangente a $r_1 : 2x + y - 4 = 0$ in $A : (1,2)$ e ad $r_2 : -2x + y - 4 = 0$ in $B : (-1,2)$ e alla retta $s : y = 0$.
ii) Determinarne il tipo affine, il tipo metrico (solo N.O.), il centro e gli assi, abbozzandone il grafico.

I.2.T1. i) Data una conica generale nel piano affine ampliato proiettivamente, se ne definisca il centro.
ii) Cosa sono gli asintoti di una conica (generale)?
iii) Cosa si intende per fuoco di una conica? E per direttrice? Enunciare (e dimostrare: solo V.O.) la caratterizzazione elementare delle coniche coinvolgente un fuoco e la relativa direttrice.
iv) Quanti punti in posizione generale determinano una conica? Perche'? Perche' invece una circonferenza è determinata da tre punti (non allineati)?

I.2.T2. i) Cosa si intende col dire che due matrici quadrate A, $B \in M_n(K)$ sono simili?
ii) Quale relazione intercorre tra le matrici rappresentative di un endomorfismo T rispetto a due basi differenti?
iii) Cosa si intende col dire che due matrici quadrate A, $B \in M_n(K)$ sono congruenti? Come si interpreta ciò in termini di forme quadratiche?
iv) Cosa afferma il teorema di Sylvester rispetto alla congruenza di matrici simmetriche reali?
v) Nel caso $n = 3$ accennare a vari metodi di calcolo della segnatura.

Tempo a disposizione 2h
Le risposte vanno adeguatamente giustificate

Geometria

Ingegneria Gestionale

Prova scritta del 2 settembre 2002: V.O. e I^0 canale N.O.

Tema I.3

I.3.E1. *Nello spazio vettoriale euclideo $(R^4, < | >)$ (prodotto scalare standard), si consideri il sottospazio U generato dai vettori u_i, $i = 1, \ldots, 4$ seguenti:*

$$u_1 = (1,0,1,0)^t \quad u_2 = (0,1,0,-1)^t \quad u_3 = (1,0,0,0)^t \quad u_4 = (1,1,1,-1)^t$$

i) Se ne determini la dimensione e una base ortonormale.
ii) Si stabilisca un sistema di equazioni cartesiane per $U^\perp$ e se ne determini una base ortonormale.

I.3.E2. i) Nel piano euclideo reale $\mathbf{E}^2$, in cui sia fissato un riferimento cartesiano (e ampliato proiettivamente) determinare la conica C tangente a $r_1 : 2x - y - 4 = 0$ in $A : (1,-2)$ e ad $r_2 : 2x + y + 4 = 0$ in $B : (-1,-2)$ e alla retta $s : y = 0$.
ii) Determinarne il tipo affine, il tipo metrico (solo N.O.), il centro e gli assi, abbozzandone il grafico.

I.3.T1. Enunciare e dimostrare il teorema di Rouché-Capelli, sia in forma geometrica che matriciale, evidenziando il legame con il teorema della nullità + rango.
(solo V.O.) Si dimostri anche quest'ultimo teorema.

I.3.T2. i) Dare la definizione di conica sia in forma sintetica che analitica.
ii) Discutere la classificazione proiettiva delle coniche reali, sia in forma algebrica che geometrica.
iii) Discutere la classificazione affine e metrica delle coniche reali, derivandole da quella proiettiva.

Tempo a disposizione 2h
Le risposte vanno adeguatamente giustificate