

★ Richiamo [cf. corso di Analisi II]  
una funzione

$$\underline{r} : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^3 \text{ (o } \mathbb{R}^2)$$

$$t \longmapsto \underline{r}(t)$$

è detta

curva (parametrica) regolare

spaziale (in  $\mathbb{R}^3$ )  
piana (in  $\mathbb{R}^2$ )

se valgono le seguenti condizioni:

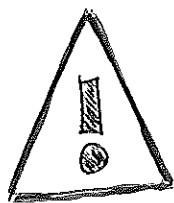
1.  $\underline{r}$  è di classe  $\mathcal{C}^1$

i.e. continua assieme alla sua  
derivata, ottenuta componente  
per componente)

2.  $\underline{r}$  è iniettiva [se punti di curva  
semplici]

$$(t_1 \neq t_2 \implies \underline{r}(t_1) \neq \underline{r}(t_2))$$

3.  $\dot{\underline{r}}(t) \neq \underline{0} \quad \forall t \in (a, b) \quad \left[ \frac{d}{dt} \right]$   
velocità



in molti  
testi  
questa è  
la condizione di  
regolarità  
propriamente  
detta.

★ In altre parole  $\underline{r}$  è regolare se  $\underline{r}$  è  
iniettiva e se la retta tangente esiste  
e varia con continuità nell'intervallo  
di definizione.

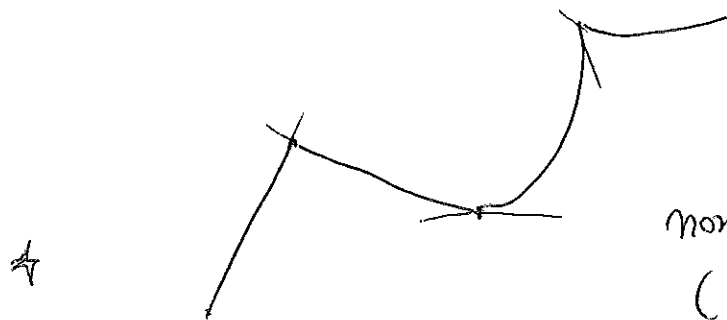
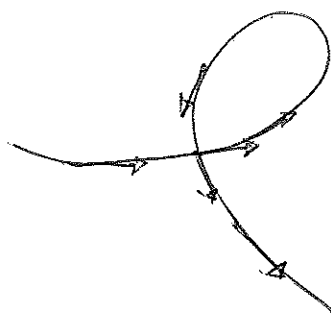
[talvolta, con abuso di linguaggio, si  
identifica una curva col suo sostegno  
ossia con l'immagine della funzione che  
la individua]

Osservazioni:

\* 3. implica la locale invertibilità

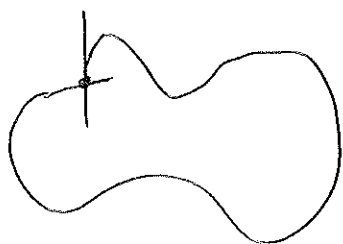
[...  $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$  (teorema di Lagrange)]  
 si lavora componente per componente

ma  $3 \not\Rightarrow 2$  ! :



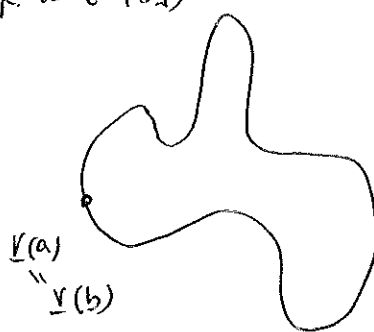
non è regolare  
 (lo è a tratti...)

\* per una curva chiusa (def. in  $[a,b]$ )  
 $\gamma(a) = \gamma(b)$



non è regolare

$$\underline{\gamma}'(b) \neq \underline{\gamma}'_+(a)$$



è regolare

$$\underline{\gamma}'_-(b) = \underline{\gamma}'_+(a)$$

... (\*) ...  
 $\gamma(t_0) = \gamma(t_1)$  (\*)  
 $\gamma'(t_0) = \gamma'(t_1)$  (\*)  
 IV-0'

★ retta tangente a  $\mathcal{C}$  in  $P_0 (= r(t_0))$

$$\underline{P}(t) = \underbrace{P_0}_{r(t_0)} + (t-t_0) \underbrace{\dot{P}_0}_{\dot{r}(t_0)}$$

★ Notazione classica [molto espressiva]  
la useremo spesso

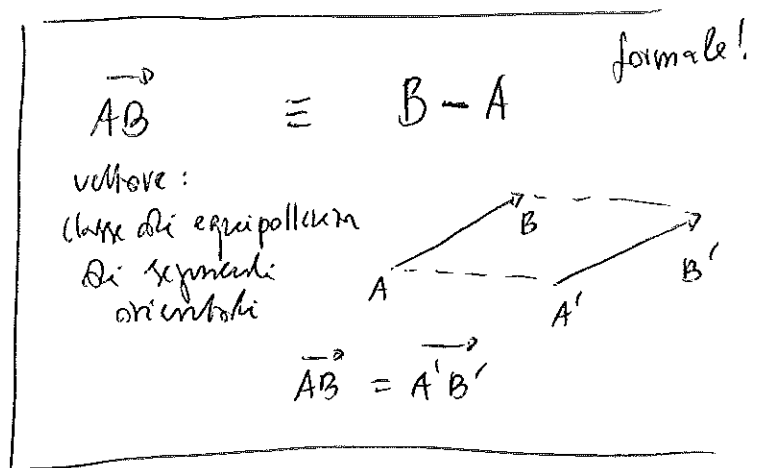
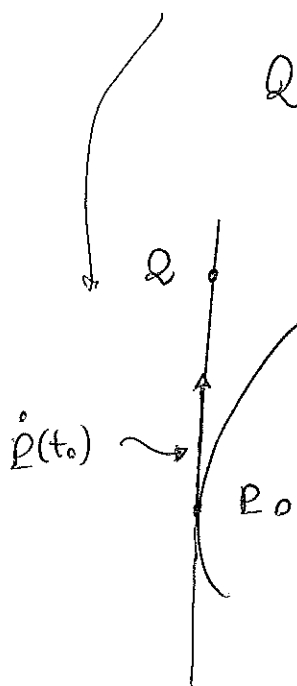
$$P = P(t) \quad (\equiv r(t))$$

$$\dot{P} = \dot{P}(t) \quad (\equiv \dot{r}(t))$$

retta tangente a  $\mathcal{C}$  in  $P_0$   $Q = Q(t)$

$$\triangle Q - P_0 = (t-t_0) \dot{P}(t_0)$$

$$Q = P_0 + (t-t_0) \dot{P}(t_0)$$



★ Definiamo la funzione  
 "salsa curvilinea" o "lunghezza d'arco"

$$s = s(t) = \lambda(a, t) \quad t \in [a, b]$$

$$(s(a) = 0 ; s(b) = \lambda(a, b))$$

★ Teorema i)  $s$  è continua, derivabile e

$$\dot{s}(t) = \|\dot{r}(t)\|$$

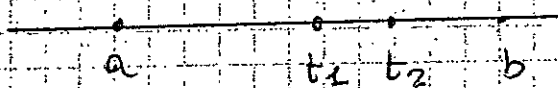
( $\Rightarrow$  se  $\theta$  regolare  $s$  è strettamente crescente)

$$ii) \quad \lambda(a, b) = \int_a^b \|\dot{r}(t)\| dt$$

Dim. ii) segue da i) per il teor. fondamentale  
del calcolo (Toricelli - Bonnow)

$$\lambda(a, b) = s(b) - s(a) = \int_a^b \dot{s}(t) dt = \int_a^b \|\dot{r}(t)\| dt$$

Proviamo i). Basta provare la derivabilità...



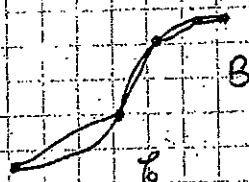
$$s(t_2) = s(t_1) + \lambda(t_1, t_2) \quad (\text{additività})$$

$$t_1 = t, \quad t_2 = t + h \quad (h > 0)$$

◇ Richiami sulla lunghezza d'arco

★ Determineremo un parametro "naturale" sulle curve spaziali, l'ascissa curvilinea. (... lunghezza...)

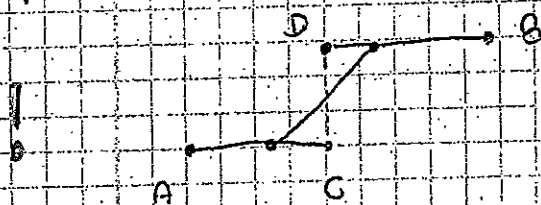
★ In modo informale la lunghezza dell'arco



di curva  $\mathcal{C}$  compreso tra A e B è l'estremo

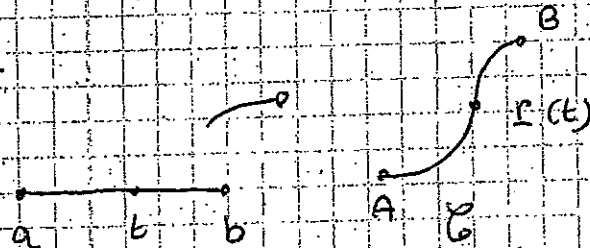
superiore delle lunghezze delle spezzate inscritte in  $\mathcal{C}$ .

★  $\mathcal{C}$  va supposta almeno continua.



$$\sup \left\{ \begin{array}{l} \text{lunghezze delle} \\ \text{spezzate} \end{array} \right\} = \overline{AC} + \overline{DB} + \overline{CD}$$

★



$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}(t) \\ \mathbf{r} &\in \mathcal{C}^1([a, b]) \end{aligned}$$

Infattivamente si ha

$$L(\mathcal{C}) = \int_a^b \|\dot{\mathbf{r}}(t)\| dt$$

$$\begin{aligned} (dL &= (dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}} = \dots \\ &= (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{\frac{1}{2}} dt \end{aligned}$$

e  $L$  è invariante per riparametrizzazioni

V. pag IV-10

★ Prevediamo, per uso futuro,  
alcune nozioni di calcolo differenziale  
per funzioni vettoriali

Sia  $\underline{v}: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$   $\underline{v} \in \mathcal{C}^1(a, b)$   
 $t \mapsto \underline{v}(t)$

★ Proposizione Sia  $\|\underline{v}(t)\| = \text{costante}$ ,  $t \in (a, b)$

Allora  $\langle \dot{\underline{v}}(t) | \underline{v}(t) \rangle = 0 \quad \forall t \in (a, b)$

Dm.  $\|\underline{v}(t)\|^2 = \langle \underline{v}(t) | \underline{v}(t) \rangle = \text{cost.}$

Derivando si ha  $\langle \dot{\underline{v}}(t) | \underline{v}(t) \rangle + \langle \underline{v}(t) | \dot{\underline{v}}(t) \rangle$   
 $= 2 \langle \dot{\underline{v}}(t) | \underline{v}(t) \rangle = 0$

[ in generale  $\langle \dot{\underline{a}} | \dot{\underline{b}} \rangle = \langle \dot{\underline{a}} | \underline{b} \rangle + \langle \underline{a} | \dot{\underline{b}} \rangle ]$

★ Consideriamo una funzione a valori matriciali

Sia  $A = A(t) \quad t \in (a, b) \quad A \in \mathcal{C}^1(a, b)$

$A(t) \in \text{Mat}(n \times n)$

Calcoliamo  $\frac{d}{dt} \det A(t)$

★ Proposizione

$$\left| \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \right| = \sum_{i=1}^n \left| \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \right|$$

★ Teorema. La lunghezza di una curva (regolare) non dipende né dalla parametrizzazione, né dall'orientamento.

Dim. Sia  $\tau \in [\alpha, \beta]$  ( $\alpha < \beta$ ),  $\frac{dt}{d\tau} > 0$

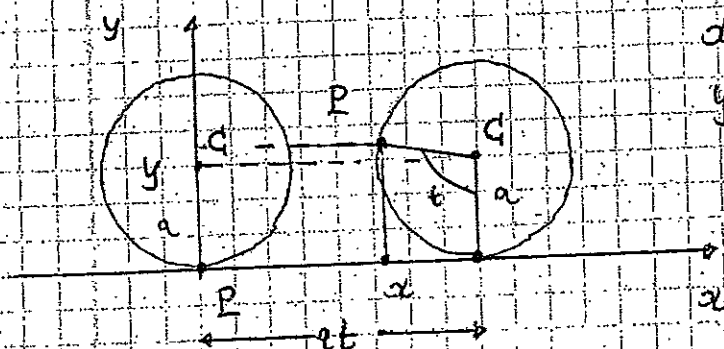
(per fissare le idee)

$$\underline{R}(\tau) = \underline{r}(t(\tau))$$

$$\begin{aligned} L(a,b) &= \int_a^b \|\dot{\underline{r}}(t)\| dt = \int_a^b \left\| \frac{d\underline{r}}{dt} \right\| dt = \\ &= \int_\alpha^\beta \left\| \frac{d\underline{R}}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} \right\| \frac{dt}{d\tau} d\tau = \int_\alpha^\beta \left\| \frac{d\underline{R}}{d\tau} \right\| d\tau \end{aligned}$$

(Analogo ragionamento se  $\tau$  induce l'orientamento opposto...)

◇ Esercizio. Calcolare la lunghezza di un arco di cicloide



$$x = a(t - \sin t)$$

$$y = a(1 - \cos t)$$

Per esempio, se  $n=2$

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= (ad - bc) = \overset{\cdot}{a}d + a\overset{\cdot}{d} - \overset{\cdot}{b}c - b\overset{\cdot}{c} = \\ &= \overset{\cdot}{a}d - \overset{\cdot}{b}c + a\overset{\cdot}{d} - b\overset{\cdot}{c} = \\ &= \begin{vmatrix} \overset{\cdot}{a} & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & \overset{\cdot}{b} \\ c & \overset{\cdot}{d} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

In generale si usa la formula

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

segue  
idea permutazione  $\sigma$

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{\sigma} (-1)^\sigma a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} = \\ &= \sum_{\sigma} (-1)^\sigma \sum_{j=1}^n a_{1\sigma(1)} \dots \overset{\cdot}{a_{j\sigma(j)}} \dots a_{n\sigma(n)} = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{\sigma} (-1)^\sigma a_{1\sigma(1)} \dots \overset{\cdot}{a_{j\sigma(j)}} \dots a_{n\sigma(n)} \end{aligned}$$

Da cui è evidente.

★ Proposizione: su  $\mathbb{R}^3$  si ha ( $\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^3(a, b)$ )

$$\underline{\overset{\cdot}{v}} \times \underline{\overset{\cdot}{w}} = \overset{\cdot}{\underline{v}} \times \underline{w} + \underline{v} \times \overset{\cdot}{\underline{w}}$$

Dim. Calcolo diretto ... si ricordi che

$$\underline{v} \times \underline{w} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

★ Teorema Sia  $\underline{v} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,

$\underline{v} \in C^1([a, b])$ . Si ha

$$\star \quad \left\| \int_a^b \underline{v}(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|\underline{v}(t)\| dt$$

si integra componente  
per componente

Dim.

Sia  $\underline{c} := \int_a^b \underline{v}(t) dt$  se  $\underline{c} = \underline{0}$  la  $\star$  è

ovvia, sia  $\underline{c} \neq \underline{0}$

$$\begin{aligned} \|\underline{c}\|^2 &= \langle \underline{c} | \underline{c} \rangle = \left\langle \underline{c} \left| \int_a^b \underline{v}(t) dt \right. \right\rangle = \\ &= \int_a^b \langle \underline{c} | \underline{v}(t) \rangle dt \leq \int_a^b \|\underline{c}\| \|\underline{v}(t)\| dt \\ &= \|\underline{c}\| \cdot \int_a^b \|\underline{v}(t)\| dt \end{aligned}$$

⇒ dividendo per  $\|\underline{c}\| > 0$  si ha il risultato. □

★ sia  $\mathcal{C}: \quad \gamma = \gamma(t) \quad t \in [a, b]$   
 $\gamma \in \mathcal{C}^1([a, b])$

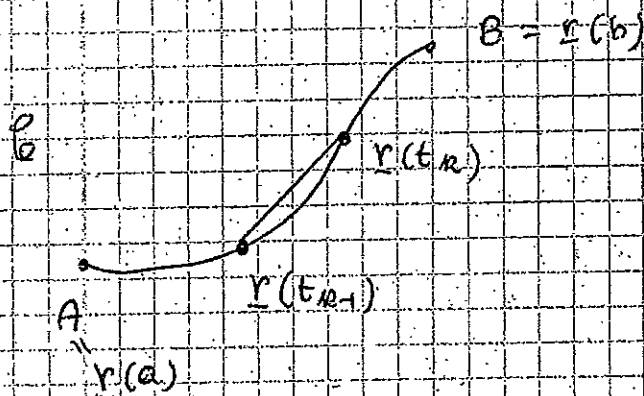
sia  $P = \{t_0 = a, t_1, t_2, \dots, t_n = b\}$

con  $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$

una partizione di  $[a, b]$ .

la lunghezza della spezzata inscritta in  $\mathcal{C}$   
 corrispondente a  $P$  è

$$| \pi(P) | := \sum_{k=1}^n \| \gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}) \|$$



★  $L =$  lunghezza di  $\mathcal{C}$  (tra  $A$  e  $B$ )

$$:= \sup_P | \pi(P) | \quad \equiv \quad \Lambda(a, b)$$

★ Proposizione . Nelle ipotesi fatte ( $\gamma \in \mathcal{C}^1[a, b]$ )

$\Lambda(a, b)$  è finita

(una curva di lunghezza finita è detta rettificabile)

Dice:  $|\pi(P)| = \sum_{k=1}^n \| \underline{r}(t_k) - \underline{r}(t_{k-1}) \| =$

$= \sum_{k=1}^n \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \dot{\underline{r}}(t) dt \right\|$  (teor. fond.)  
 del calcolo:

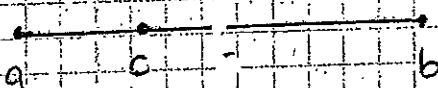
$(f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt)$

$\leq \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \| \dot{\underline{r}}(t) \| dt = \int_a^b \| \dot{\underline{r}}(t) \| dt$

$\Rightarrow \Lambda(a, b) = \sup_P |\pi(P)| \leq \int_a^b \| \dot{\underline{r}} \| dt < \infty$

★ Proposizione 1 è additiva

$\Lambda(a, b) = \Lambda(a, c) + \Lambda(c, b)$

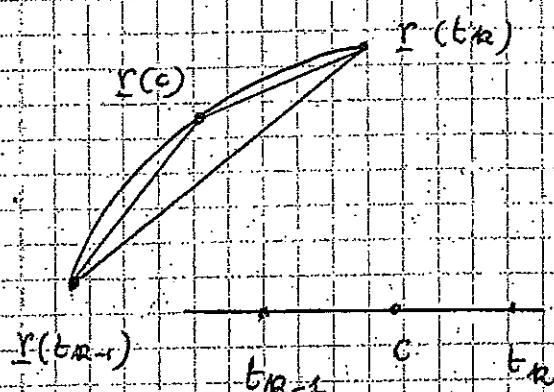


Dice:

Sia  $P$  una qualsiasi partizione di  $[a, b]$   
 Siano  $P_1, P_2$  le partizioni indotte su  
 $[a, c]$  e  $[c, b]$ , rispettivamente e  
 sia  $P_1 \cup P_2$  la partizione che si ottiene  
aggiungendo  $c$  a  $P$  (e  $c$  già fa parte  
 di  $P$  e  $P_1 \cup P_2 = P$ .)

Si ha (per la dis. triangolare)

$|\pi(P)| \leq |\pi(P_1)| + |\pi(P_2)|$



$$\begin{aligned}
 \Rightarrow |\pi(P)| &\leq \sup_{P_1} |\pi(P_1)| + \sup_{P_2} |\pi(P_2)| \\
 &\quad \text{(part. di } [a, c]) \quad \text{(part. di } [c, b]) \\
 &= \lambda(a, c) + \lambda(c, b)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda(a, b) \leq \lambda(a, c) + \lambda(c, b)$$

Facciamo vedere ora che vale  $\geq$

Sia  $P$  una partizione contenente  $c$  e siano

$P_1, P_2$  le partizioni indotte su  $[a, c]$  e  $[c, b]$ .

Sia:

$$|\pi(P)| = |\pi(P_1)| + |\pi(P_2)| \leq \lambda(a, b)$$

$$\Rightarrow |\pi(P_1)| \leq \lambda(a, b) - |\pi(P_2)|$$

Sia  $P_2$  fissa. Si avrà:

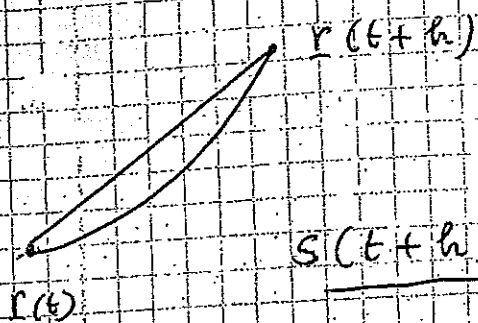
$$\lambda(a, c) \leq \lambda(a, b) - |\pi(P_2)|$$

Considero ora  $P_2 \rightarrow \bar{P}_2$

$$\lambda(a, c) \leq \lambda(a, b) - \lambda(c, b)$$

□

$$s(t+h) - s(t) = \lambda(t, t+h)$$



$$\frac{s(t+h) - s(t)}{h} \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|\dot{r}(t)\| dt$$

$\swarrow$

$\parallel$  (teor. di media integrale)

$$\left\| \frac{r(t+h) - r(t)}{h} \right\|$$

$$\|\dot{r}(\xi)\|$$

$(\xi \in (t, t+h))$

ora, se  $h \rightarrow 0$  e  $\|\dot{r}(\xi)\| \rightarrow \|\dot{r}(t)\|$

e  $\left\| \frac{r(t+h) - r(t)}{h} \right\| \rightarrow \|\dot{r}(t)\|$

ovvero  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} \text{ esiste e d. } \dot{s} = \|\dot{r}(t)\|$

Analogo di scorso per  $h < 0$ ...

$$\Rightarrow \dot{s}(t) = \|\dot{r}(t)\| \quad \square$$

★ Commento Una curva continua non è necessariamente rettificabile!

es:  $y = \alpha \sin \frac{1}{\alpha}$  (definita  $= 0$  per  $\alpha = 0$ )

$$\alpha \in ]0, \frac{1}{\pi}]$$

Sia  $R = \pm 1, 2, \dots$

$$\alpha_R = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi}$$

$$|\tilde{\alpha}_R \sin \frac{1}{\alpha_R}| = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi} \equiv \xi_R$$

$$\sum_{R=1}^{\infty} \xi_R \text{ è divergente...}$$

( posso inscrivere su  $\Gamma$  una successione di spezzate di lunghezza arbitrariamente piccola ... )

★ Sia  $\Gamma$  regolare : ricordiamo che in tal caso  $\dot{s} = \|\dot{r}\| > 0 \dots$

$s$  è il parametro "naturale" per descrivere  $\Gamma$

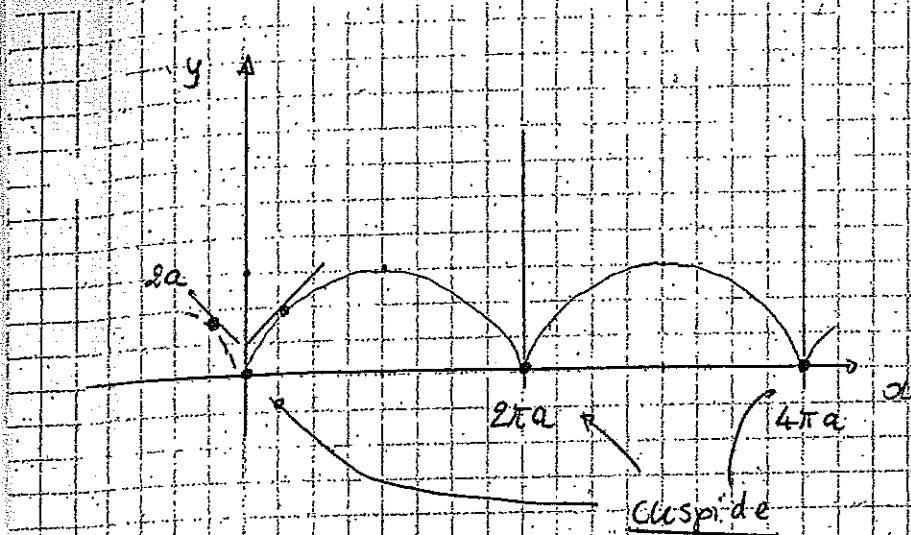
$$s = s(t) \quad \dots \quad t = t(s)$$

★ Osserviamo che

$$\begin{aligned} \|\dot{r}\| \left\| \frac{dr}{ds} \right\| &= \left\| \frac{dr}{dt} \frac{dt}{ds} \right\| = \left\| \frac{dr}{dt} \right\| \left| \frac{dt}{ds} \right| = \\ &= \|\dot{r}\| \cdot \frac{1}{\dot{s}} = \dots = 1 \end{aligned}$$

$$\left( 1 = \frac{d}{ds} \right) \Rightarrow \dot{r} : \text{vettore tangente}$$

$$\text{in particolare spesso } \dot{r} = \dot{t}$$



Per singolarità  $\dot{x} = a(1 - \cos t) = 0 \Rightarrow x = 2\pi k \cdot a$   
 $\dot{y} = a \cdot \sin t = 0 \Rightarrow k \in \mathbb{Z}$

$$m(t) := \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} \sim \frac{t}{\frac{t^2}{2}} \rightarrow \begin{cases} +\infty & t \rightarrow 0^+ \\ -\infty & t \rightarrow 2\pi^- \end{cases}$$

$\Rightarrow$  in  $(2\pi k \cdot a, 0)$  si hanno cuspide  
 (tangente doppia verticale)

$$L(0, 2\pi) = \int_0^{2\pi} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{1}{2}} dt =$$

$$= \sqrt{2} a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt$$

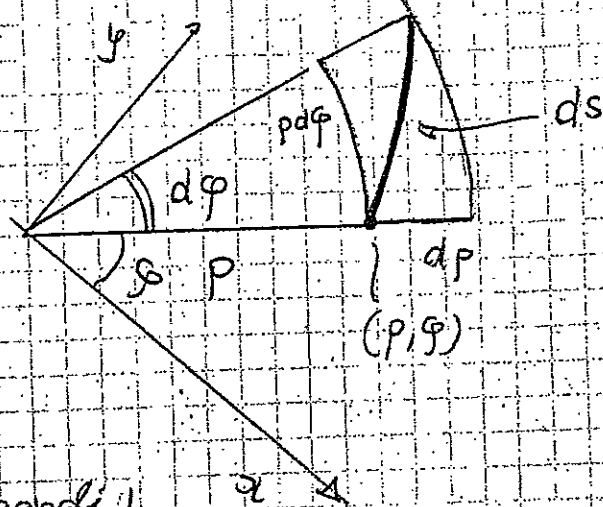
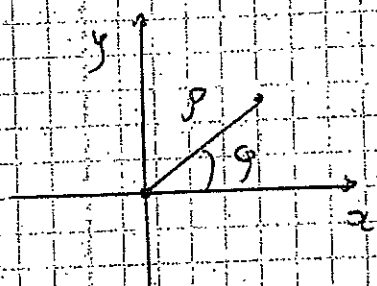
$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \quad \|\sin x\| = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}}$$

$$t = 2\xi \quad \xi \in [0, \pi] \Rightarrow \sqrt{2} \sin \xi = \sqrt{1 - \cos t}$$

$$dt = 2 d\xi$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow L &= \sqrt{2} \cdot a \cdot \sqrt{2} \cdot 2 \int_0^{\pi} \sin \xi d\xi = \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 a = 8a \end{aligned}$$

# ★ lunghezza d'arco in coordinate polari



(le coordinate polari sono  
coordinate curvilinee ortogonali)

("teor. di Pitagora  
nell'infinitesimo")

$$ds^2 = dp^2 + p^2 d\varphi^2$$

$$ds = \sqrt{p'^2 + p^2} d\varphi$$

$$1 = \frac{d}{d\varphi}$$

In modo rigoroso:

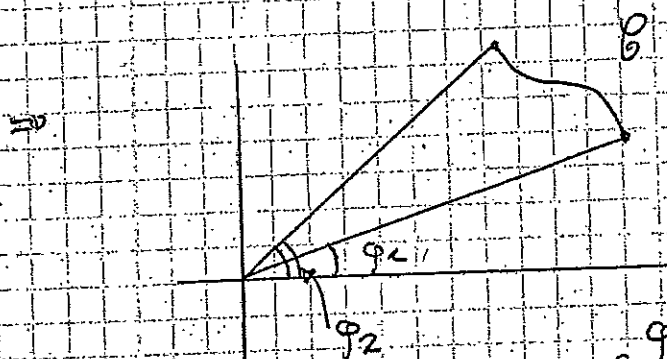
$$x = p(\varphi) \cos \varphi$$

$$x' = p' \cos \varphi - p \sin \varphi$$

$$y = p(\varphi) \sin \varphi$$

$$y' = p' \sin \varphi + p \cos \varphi$$

$$\Rightarrow ds = \sqrt{x'^2 + y'^2} d\varphi = \sqrt{p'^2 + p^2} d\varphi$$

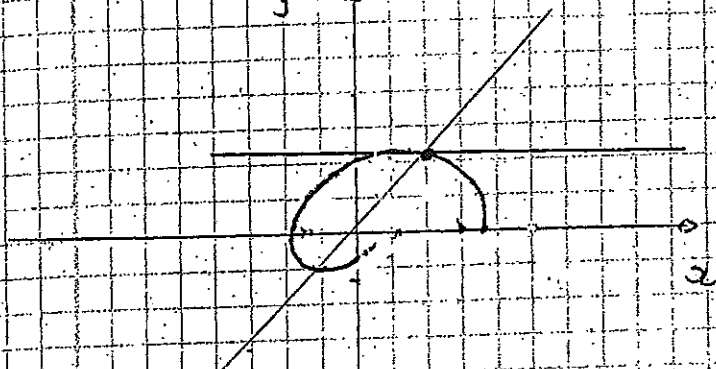


$$p = p(\varphi); \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$$

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (p^2 + p'^2)^{\frac{1}{2}} d\varphi$$

★ Esercizio Si calcoli la spira

$$\rho = e^{-\varphi} \quad \varphi \geq 0$$



Calcoliamo la lunghezza

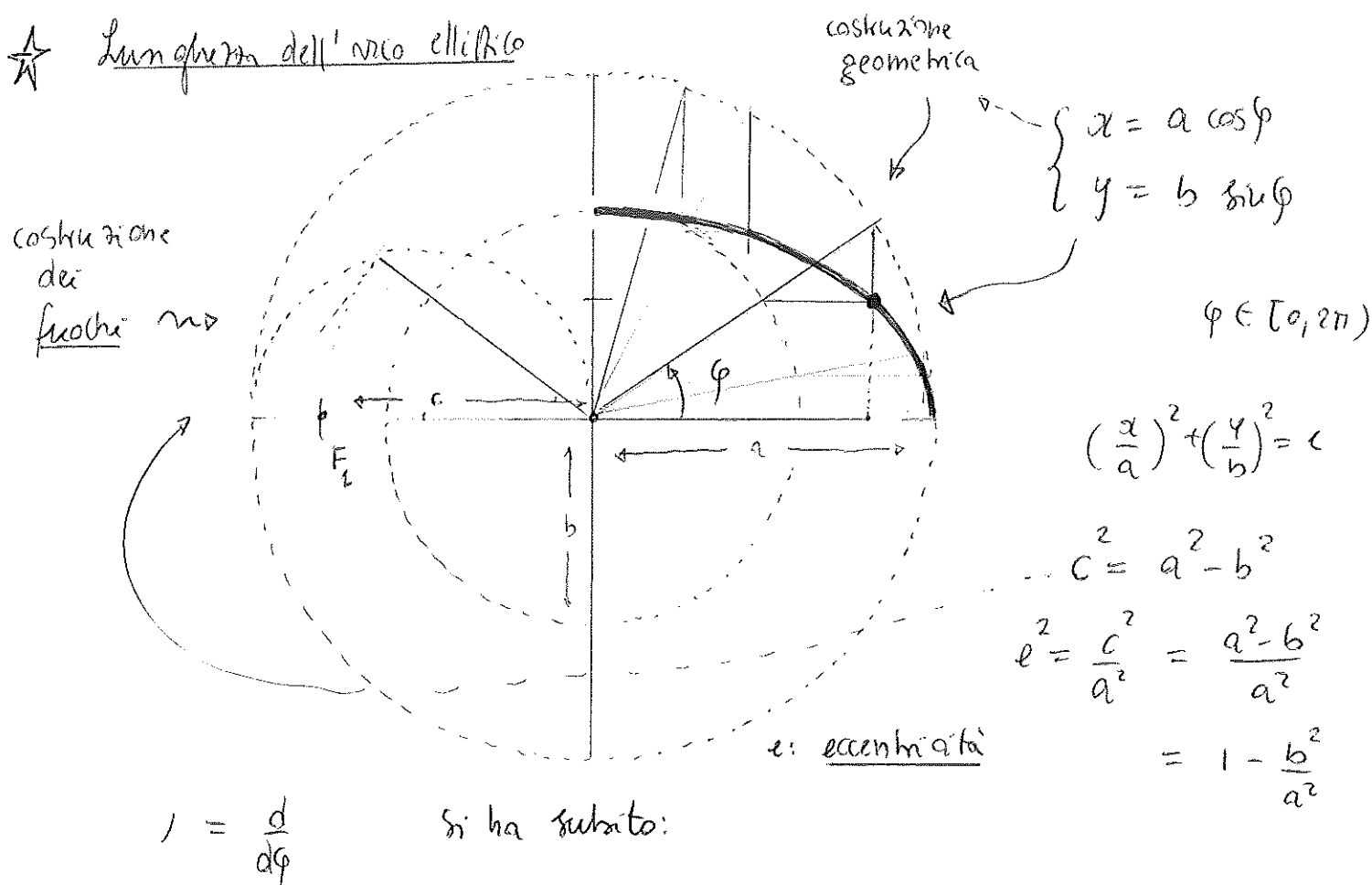
$$ds = (e^{-2\varphi} + e^{-2\varphi})^{\frac{1}{2}} d\varphi =$$

$$= \sqrt{2} e^{-\varphi} d\varphi$$

$$L = \sqrt{2} \int_0^{\infty} e^{-\varphi} d\varphi = \dots \sqrt{2}$$

★ In generale gli integrali esprimibili  
 con funzioni non sono risolvibili elementariamente  
 Contengono ellittici, iperfuchsiani  
 ---> formule di Yaglom ---  
 formule di Euler ---> teoria generale  
delle funzioni ellittiche. v. anche altre.

# ★ Lunghezza dell'arco ellittico



$$\begin{aligned} x' &= -a \sin \varphi & \Rightarrow & & x'^2 + y'^2 &= a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi \\ y' &= b \cos \varphi & & & &= a^2 (1 - \cos^2 \varphi) + b^2 \cos^2 \varphi = \\ & & & & &= a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 \varphi \\ & & & & &= a^2 \left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cos^2 \varphi\right) \\ & & & & &= a^2 (1 - e^2 \cos^2 \varphi) \end{aligned}$$

Calcoliamo la

## ★ lunghezza di un quarto di meridiano

$$L = a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi} d\varphi \quad (= a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \psi} d\psi \quad \psi = \frac{\pi}{2} - \varphi)$$

$e=0$  (cerca:  $\frac{\pi}{2} a$ )

★ integrale ellittico di 2<sup>a</sup> specie

Se  $0 < e \ll 1$   $\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \psi} \sim 1 - \frac{e^2}{2} \sin^2 \psi$  ( $\sqrt{1+x} \sim 1 + \frac{x}{2}$ )

$$L \sim a \left( \frac{\pi}{2} - \frac{e^2}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \psi d\psi \right) = \frac{\pi}{2} a \left(1 - \frac{e^2}{4}\right)$$

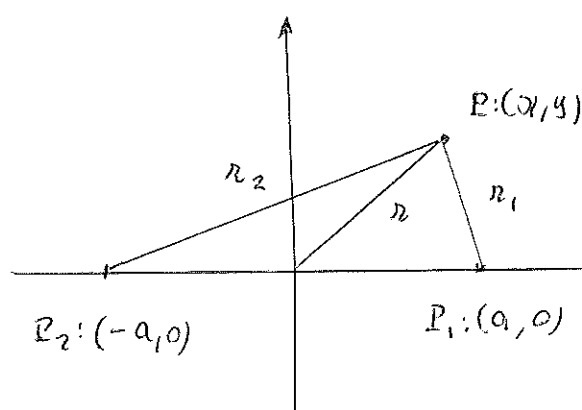
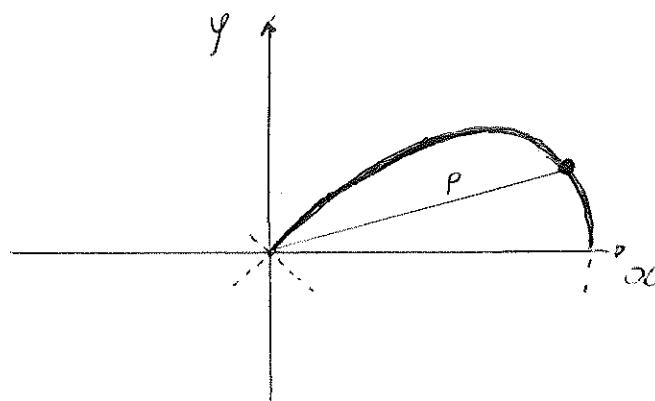
( $\int_0^{\pi/2} \sin^2 \psi d\psi = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} 1 \cdot d\psi = \frac{\pi}{4}$ )

# ◊ Sulla lunghezza dell'arco di Lemniscata

## Digressione

Dit.  
C.L. Siegel

Topics in  
Complex function  
Theory Vol I.  
Wiley Classics  
in Mathematics  
Wiley, 1988



$$r_1 r_2 = c^2$$

\* Carnicoidi

introdotta dal Cauchy  
in astronomia. Trovò  
anche applicazioni in  
analisi numerica.

$$(\diamond) \quad r^2 = x^2 + y^2$$

$$r_1^2 = (x - a)^2 + y^2 = r^2 + a^2 - 2ax$$

$$r_2^2 = (x + a)^2 + y^2 = r^2 + a^2 + 2ax$$

la Lemniscata si ottiene ponendo  $c = a$ . Poniamo

anche  $2a^2 = 1$ . Abbiamo, successivamente:

$c^4$

$$a^4 = (r^2 + a^2 - 2ax)(r^2 + a^2 + 2ax) =$$

$$(r^2 + a^2)^2 - 4a^2 x^2 = r^4 + \overbrace{2a^2}^{=1} r^2 + a^4 - 4a^2 x^2$$

$$\Rightarrow r^4 + r^2 = 2x^2 \quad \text{e, utilizzando } (\diamond),$$

$$r^4 + r^2 = 2(r^2 - y^2) \Rightarrow 2y^2 = r^2 - r^4$$

In definitiva:

$$(*) \quad \begin{cases} 2x^2 = r^2 + r^4 \\ 2y^2 = r^2 - r^4 \end{cases}$$

$$r \equiv p$$

$\Rightarrow$ , eliminando le radici, otteniamo  $\begin{cases} x = x(p) \\ y = y(p) \end{cases}$

calcoliamo l'asse anallitico (a partire da  $O: (0,0)$ )

$0 \leq p \leq 1$  : dalle (\*) si ha:

$$2xx' = p + 2p^3$$

$$1 = \frac{d}{dp}$$

$$2yy' = p - 2p^3$$

$$4x^2 x'^2 = (p + 2p^3)^2$$

$$x'^2 = \frac{(p + 2p^3)^2}{4x^2} = \frac{p^2(1+2p^2)^2}{2p^2(1+p^2)}$$

$$= \frac{(1+2p^2)^2}{2(1+p^2)}$$

$$4y^2 y'^2 = (p - 2p^3)^2$$

$$y'^2 = \frac{p^2(1-2p^2)^2}{2p^2(1-p^2)} = \frac{(1-2p^2)^2}{2(1-p^2)}$$

$$x'^2 + y'^2 = \frac{1}{2} \left[ \frac{(1-2p^2)^2}{1-p^2} + \frac{(1+2p^2)^2}{1+p^2} \right] \rightarrow$$

$$\overset{\delta'^2}{\alpha'^2 + \gamma'^2} = \frac{1}{2} \frac{(1-2p^2)^2(1+p^2) + (1+2p^2)^2(1-p^2)}{1-p^4}$$

$$\begin{aligned} \text{Ma } (1-2p^2)^2(1+p^2) + (1+2p^2)^2(1-p^2) &= \\ &= (1-2p^2)^2 + (1+2p^2)^2 + p^2[(1-2p^2)^2 - (1+2p^2)^2] \\ &= 2 + 8p^4 + p^2[(1-2\cancel{p^2} + 1 + 2\cancel{p^2})(-4p^2)] \\ &= 2 + 8p^4 - 8p^4 = 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \delta'^2 = \frac{1}{1-p^4}$$

$$\boxed{\delta = \delta(p) = \int_0^p \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}}$$

$$0 \leq z \leq 1$$

\* Integrale lemniscatico  
non risolvibile in  
termini di f. elementari

$$\text{cf: } \arcsin p = \int_0^p \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \quad (0 \leq z \leq 1)$$

\*\*\* Eulero

(nascita della teoria degli integrali ellittici...)  
(f. Siegel)

$$(*) \quad \sin(\alpha + \gamma) = \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma$$

$$u = \sin \alpha \quad v = \sin \gamma$$

$$\sin(\alpha + \gamma) = u \sqrt{1-v^2} + v \sqrt{1-u^2} \Rightarrow (*) \text{ diventa}$$

$$\boxed{\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} + \int_0^v \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}}}$$

abuso  
di notazione...

$$\text{e } r = u \sqrt{1-v^2} + v \sqrt{1-u^2}$$

Nel corso dell'integrale lemmiscolato, Eulero prova che

$$\square \quad \boxed{S(u) + S(v) = S(r), \text{ ove } (*) \quad r = \frac{u\sqrt{1-v^4} + v\sqrt{1-u^4}}{1+u^2v^2}}$$

Se  $u = v$  si ha  $S(r) = 2S(u)$ , con

$$r = \frac{2u\sqrt{1-u^4}}{1+u^4}$$

\* teorema di Fagnano

(da cui Eulero ha preso  
le mosse)

Cenno di dim.: Si parte da (\*), trattando  $r$

costante,  $u$  variabile indipendente,  $v$  dipendente.

Si pone  $U = \sqrt{1-u^4}$   $V = \sqrt{1-v^4}$ , e si deriva

rispetto ad  $u$ , ottenendo

$$\frac{du}{U} \left[ (UV - 2v u^3) (1 + u^2 v^2) - 2 (u UV + v - v u^4) u v^2 \right]$$

$$\frac{dv}{V} \left[ \begin{array}{c} + \\ \text{stessa espressione} \end{array} \right]$$

↳ che avviene  $= \sqrt{1-u^4}$  per  $u=0$ , ed  
 $x \neq 0$  se  $u$  e  $v$  sono suff. vicini a 0.

Pertanto

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^4}} + \frac{dv}{\sqrt{1-v^4}} = 0$$

⇓

$$\int_0^u \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} + \int_{\tilde{u}}^v \frac{dv}{\sqrt{1-v^4}} = 0$$

$\underbrace{\tilde{u}}_{\triangle}$

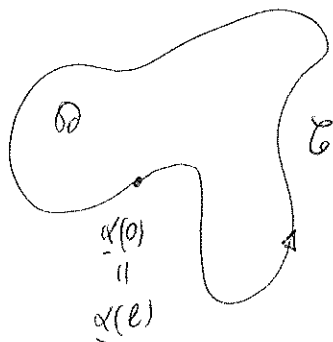
⇓

$$\begin{array}{l} \underbrace{\int_0^u \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}}_{S(u)} + \underbrace{\int_0^v \frac{dv}{\sqrt{1-v^4}}}_{S(v)} = \underbrace{\int_0^{\tilde{u}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}}_{S(\tilde{u})} \\ \hline \tilde{u} = \frac{u \sqrt{1-v^4} + v \sqrt{1-u^4}}{1 + u^2 v^2} \end{array}$$

Sia  $\underline{\alpha}: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$   
 $s \mapsto \underline{\alpha}(s)$

◊ la disuguaglianza  
Isoperimetrica

una curva semplice, chiusa ( $\underline{\alpha}(0) = \underline{\alpha}(l)$ ), liscia, regolare



parametrizzata tramite l'ascissa curvilinea  
 $s$ , di lunghezza  $l$ , di sostegno  $\mathcal{C}$

Della  $A$  l'area della regione  $\mathcal{O}$   
 racchiusa da  $\mathcal{C}$ , si ha

4 Disuguaglianza  
Isoperimetrica

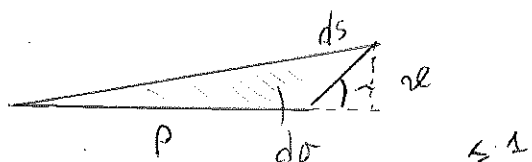
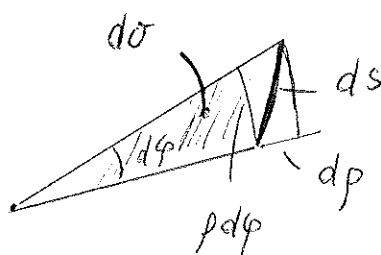
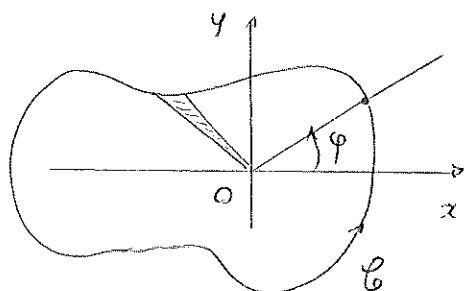
$$A \leq \frac{l^2}{4\pi}$$

(= area del cerchio di raggio  $\frac{l}{2\pi}$  :

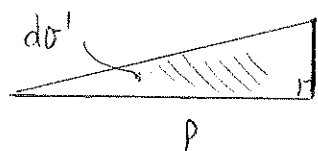
$$l_{\text{circ}} = 2\pi \frac{l}{2\pi} = l ; \quad \pi \frac{l^2}{4\pi^2} = \frac{l^2}{4\pi})$$

il segno = vale  $\Leftrightarrow \mathcal{C}$  è una circonferenza di raggio  $\frac{l}{2\pi}$

"Dim." Sia  $O$  un pto interno a  $\mathcal{C}$ , consideriamo  
 un sistema di coordinate polari di origine  $O$



$$dO = \frac{1}{2} \rho \cdot ds \cdot |\sin \alpha| \leq dO' = \frac{1}{2} \rho ds$$



in tale situazione  $ds = \sqrt{\rho'^2 + \rho^2} d\phi$

$$\rho' = 0 \Rightarrow \rho = \text{cost.}$$

In definitiva

$$A = \iint_D d\sigma \leq \frac{l^2}{4\pi}$$

trucco

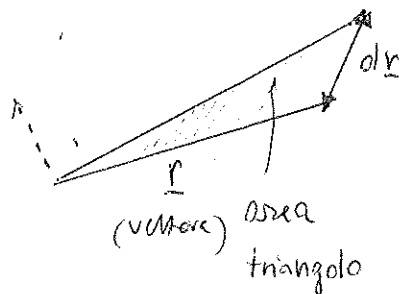
notare anche che  $d\sigma = \frac{1}{2} (x dy - y dx)$   $A = \frac{1}{2} \int_C x dy - y dx$

$$\left( \iint_D dxdy = \frac{1}{2} \int_C x dy - y dx \right)$$

$$\left[ \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int_C P dx + Q dy \right] \quad \star \text{ Green}$$

$$P = -y, \quad Q = x \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 = - \frac{\partial P}{\partial y}$$

\* interpretazione geometrica (Riemann)



$$\underline{r} = (x, y, 0)$$

$$d\underline{r} = (dx, dy, 0)$$

$$\frac{1}{2} (\underline{r} \times d\underline{r}) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x & y & 0 \\ dx & dy & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \underline{k} (x dy - y dx)$$

In definitiva: "tra tutte le curve di lunghezza l assegnata, la circonferenza è quella che racchiude l'area maggiore ( $= l^2/4\pi$ )"