Geometria

Ingegneria Gestionale

Prova scritta del 25 gennaio 2001

E1. Sia dato $(\mathbf{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ (prodotto scalare standard) e sia $e = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonica.
i) Determinare tutti gli endomorfismi T tali che $V_1^T = \langle e_1\rangle$, $V_2^T = \langle e_3\rangle$ e $Ker\, T = \{0\}$, esibendone la matrice $m_{ee}(T)$.
ii) Tra questi, determinare quelli diagonalizzabili.
iii) Tra questi ultimi, vi sono operatori simmetrici?
iv) E ortogonali?
Con V_λ^T si denota l'autospazio corrispondente all'autovalore λ di T.

E2. Sia dato il piano euclideo reale $\mathbf{E}^2$ in cui sia fissato un riferimento cartesiano.
Determinare l'ellisse $\mathcal{E}$ tale che:
i) uno dei fuochi sia $F_1 := (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, e il relativo "perielio" sia $A_1 := (\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}})$.
ii) La lunghezza del semiasse minore b sia 4.
Sugg. Si può procedere per via elementare in almeno *tre* modi diversi: con un opportuno cambiamento di riferimento, dopo aver determinato il centro di $\mathcal{E}$; rifacendosi alla definizione elementare coinvolgente un fuoco e la relativa direttrice; oppure determinando l'altro fuoco e ricorrere ad un'altra ben nota caratterizzazione elementare...

T1. i) Sia dato $T \in Hom(V, W)$. Dare la definizione di nucleo e immagine di T, verificando che essi sono sottospazi vettoriali di....
ii) Enunciare e dimostrare il teorema della nullità + rango.
iii) Dimostrare che $T \in End(V)$ è iniettivo se e solo se è suriettivo.
iv) Cosa si intende col dire che $T \in Hom(V, W)$ è un isomorfismo?
v) Dare la definizione di isomorfismo di spazi vettoriali.
vi) Dimostrare che la dimensione è un invariante completo per isomorfismi (si lavori in dimensione finita).

T2. Data una conica irriducibile C in $\mathbf{P}^2$ (in cui è fissato un riferimento proiettivo),
i) si definisca analiticamente la polare di un punto rispetto a C.
ii) Si enunci e si dimostri il *teorema di reciprocità*.
iii) Si dia l'interpretazione geometrica della polare, giustificandola tramite ii).
iv) Dare la definizione di triangolo autopolare, fornendone poi un'interpretazione "vettoriale".
v) Sia dia la definizione conica a centro, di diametro di una tale conica e di diametro ad esso coniugato. Nel piano affine, si accenni a una costruzione geometrica di quest'ultimo.

Tempo a disposizione 2h.30m
Le risposte vanno adeguatamente giustificate

Geometria 25/1/2001

(1) i) Determinare i $T \in End(\mathbb{R}^3)$ tali che:

$\langle e_1 \rangle = V_1$ (aut. corr. a $\lambda = 1$)

$\langle e_3 \rangle = V_2$ (" " $\lambda = 2$)

$Ker\, T = \{\underline{0}\}$, esibendone la matrice

$m_{ee}(T)$ ($e : (e_1, e_2, e_3)$ base canonica)

ii) Det. i T diagonalizzabili

iii) Tra questi ultimi vi sono op. simmetrici (si introduce $\langle\ \rangle_{standard}$)? E ortogonali?

Sol. i) Si ha subito

$$e_1 \longmapsto e_1$$
$$e_2 \longmapsto a e_1 + b e_2 + c e_3$$
$$e_3 \longmapsto 2 e_3$$

La condizione $Ker\, T = \{\underline{0}\}$ implica $Im\, T = \mathbb{R}^3$ sicché deve essere $b \neq 0$. Si ha poi

$$\underbrace{m_{ee}(T)}_{\substack{\equiv \\ A}} = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & c & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{con } b \neq 0)$$

ii) Il polinomio caratteristico è (vedi l. A.)

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & a & 0 \\ 0 & b-\lambda & 0 \\ 0 & c & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

Laplace

$$= (1-\lambda)(b-\lambda)(2-\lambda) \qquad b \neq 0$$

Se $b \neq 1$, $b \neq 2$, T è certamente diagonalizzabile (3 aut. distinti)

Consideriamo i casi $b=1$ $\left(\begin{matrix} m_a(1)=2 \\ m_a(2)=1 \end{matrix} \right)$

e $b=2$ $\left(\begin{matrix} m_a(1)=1 \\ m_a(2)=2 \end{matrix} \right)$

Controlliamo, nei casi se $m_g = m_a = 2$

$\boxed{b=1}$ $A-I = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \rho(A-I) = \begin{cases} 2 & \text{se } a \neq 0 \Rightarrow m_g(1) = 3-2 = 1 \\ 1 & \text{se } a = 0 \Rightarrow m_g(1) = 3-1 = 2 = m_a(1) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ diag. con $a=0$

$(b=1, a=0)$

c arb.

$\boxed{b=2}$ $A-2I = \begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix}$

$$\rho(A-2I) = \begin{cases} 2 & \text{se } c \neq 0 \Rightarrow m_g(2) = 3-2 = 1 \\ 1 & \text{se } c = 0 \Rightarrow m_g(2) = 3-1 = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ diag. con $c=0$

$(b=2, c=0)$

a arb.

IV) per la simmetria (risp. a $\langle\ \rangle_{st}$)

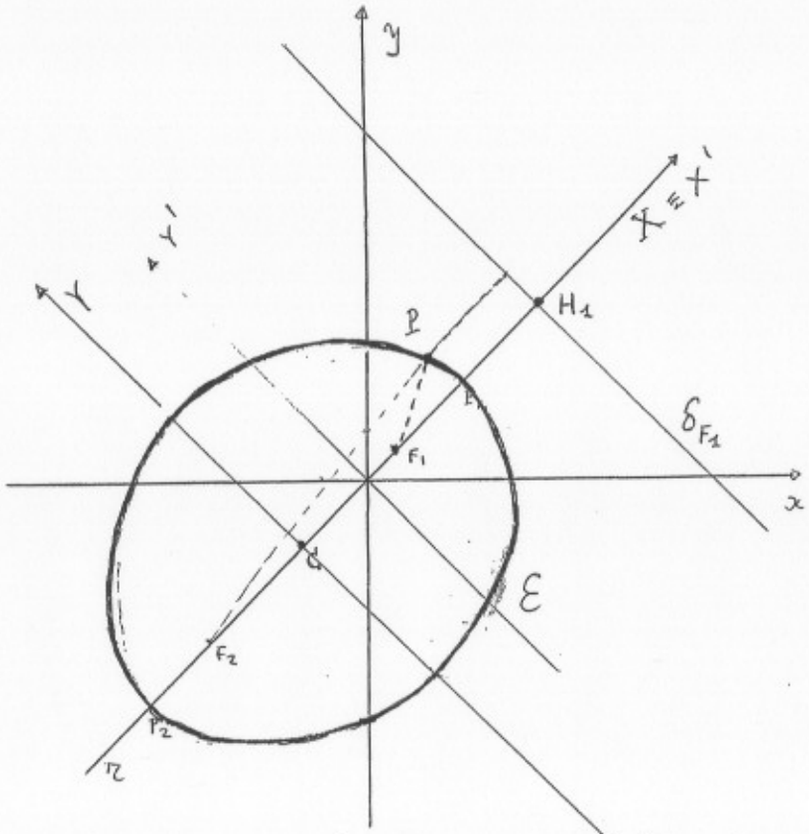
occorrerebbe che A sia simmetrica

$\Rightarrow a = c = 0$ (e $b \neq 0$...)

(già diagonale...)

Non vi sono T ortogonali poiché, ad esempio $\|Te_3\| = 2$, e un op. ortogonale conserva le lunghezze dei vettori.

Geometria 25/4/2001



Det. $\mathcal{E}$ con $F_1: \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $P_1: \left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$

("piedi di P_1") e $b = 4$

(Sono possibili almeno tre soluzioni elementari)

Sol. Osserviamo subito che

$$\overline{P_1F_1} = \sqrt{\left(\frac{3-1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{3-1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 2} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$$

e che $r \equiv X = P_1F_1$ e $Y = x$

Pertanto $a - c = 2$

e $a^2 - c^2 = b^2 = 16$

$$(a-c)(a+c) = 16$$

$$2(a+c) = 16 \Rightarrow a + c = 8$$

$$\begin{cases} a + c = 8 \\ a - c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a = 5 \\ c = 3 \end{matrix}$$

Determiniamo C e F_2

Sia $\underline{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ versore di r

$$C = F_1 - \underbrace{3}_{c}\,\underline{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$F_2 = F_1 - \underbrace{6}_{2c}\,\underline{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} - 6\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} - 6\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{\sqrt{2}} \\ -\frac{5}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$(= C - 3\underline{u})$$

Determiniamo $H_1 = \delta_{F_1} \cap r$ (direttrice)

Si ha: $\boxed{\overline{CH_1} = \frac{a}{e}} = \frac{a}{\frac{c}{a}} = \frac{a^2}{c} = \frac{25}{3}$

$$\Rightarrow H_1 = C + \frac{25}{3}\,\underline{u} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + \frac{25}{3}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{19}{3}\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{19}{3}\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

(I) $\mathcal{E}$: $\quad P: \quad \dfrac{\overline{PF_1}}{d(P,\delta_1)} = e \quad \left(= \dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{5}\right)$

$$\Rightarrow \quad \overline{PF_1}^2 = e^2\, d(P,\delta_1)^2 \quad \left(= \frac{(ax+by+c)^2}{a^2+b^2}\right)$$

$$\left(x-\frac{1}{\sqrt2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{\sqrt2}\right)^2 = \frac{9}{25}\,\frac{\left(x+y-\frac{19}{3}\sqrt2\right)^2}{2}$$

$\delta_1: \left(x-\frac{19}{3\sqrt2}\right)+\left(y-\frac{19}{3\sqrt2}\right)=0$

$x+y-\frac{38}{3\sqrt2}=0$

$\delta_1: \boxed{x+y-\frac{19}{3}\sqrt2=0}$

$$x^2+y^2-\sqrt2 x-\sqrt2 y+1 = \frac{9}{50}\left(x^2+y^2+2xy-\frac{38}{3}\sqrt2 x-\frac{38}{3}\sqrt2 y+\frac{361\cdot 2}{9}\right)$$

$$= \frac{9}{50}x^2+\frac{9}{50}y^2-\frac{19\cdot 3}{25}\sqrt2 x-\frac{57}{25}\sqrt2 x+\frac{9}{25}xy+\frac{361}{25}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{41}{50}x^2+\frac{41}{50}y^2-\frac{9}{25}xy+\left(\frac{57}{25}-1\right)\sqrt2 x+\frac{32}{25}\sqrt2 y-\frac{361}{25}=0$$

$\Rightarrow$

$$41x^2+41y^2-18xy+64\sqrt2 x+64\sqrt2 y+\left(1-\frac{361}{25}\right)=0$$

$$\boxed{\mathcal{E}: 41x^2+41y^2-18xy+64\sqrt2 x+64\sqrt2 y-672=0}$$

$$\begin{array}{r} 361- \\ 25 \\ \hline 336 \end{array} \qquad 336\cdot 2 = 672$$

(II) Con rif. alla figura, applichiamo i seguenti cambi di riferimento

$$Y' = \frac{1}{\sqrt2}(y-x)$$

$$X' = \frac{x+y}{\sqrt2}$$

$$\det\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \\ -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \end{pmatrix} = \frac12+\frac12 = 1$$

$$Y = Y' = \frac{y-x}{\sqrt2}$$

origine di G

$$X = X'+2 = \frac{x+y}{\sqrt2}+2 = \frac{x+y+2\sqrt2}{\sqrt2}$$

L'eq. canonica di $\mathcal{E}$ è

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1 \quad \text{, ossia}$$

$$\frac{(x+y+2\sqrt2)^2}{2\cdot 25}+\frac{(x-y)^2}{2\cdot 16}=1 \qquad 2\cdot 25\cdot 16 = 800$$

$$16(x+y+2\sqrt2)^2+25(x-y)^2=800$$

$$16(x^2+y^2+8+4\sqrt2 x+4\sqrt2 y+2xy)+25(x^2+y^2-2xy)=800 \quad \Rightarrow$$

$$41x^2+41y^2-18xy+64\sqrt2 x+64\sqrt2 y+\underbrace{16\cdot 8-800}_{128-800=-672}=0$$

$\Rightarrow$ Si ottiene la stessa eq. (come doveva essere!!)

(III)

Un terzo metodo è il seguente.
(noto dalla scuola superiore!)

Si scrive

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$

$$\sqrt{A} + \sqrt{B} = 2a$$

$$\sqrt{A} = 2a - \sqrt{B}$$

$$A = 4a^2 - 4a\sqrt{B} + B$$

$$4a\sqrt{B} = B - A + 4a^2$$

$$\sqrt{B} = \frac{1}{4a}(B - A + 4a^2)$$

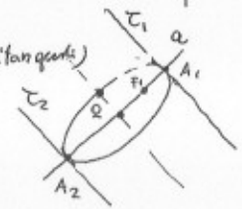
$$B = \frac{1}{16a^2}(B - A + 4a^2)^2 \quad \text{ecc.}$$

Sostituendo e semplificando si giunge di nuovo alla stessa equazione.

(IV) Si può comunque procedere proiettivamente

anche così
(fascio di coniche bitangenti)

$\mathbb{P}^2$



$$\tau_1\tau_2 + \lambda a^2 = 0$$

λ è determinato imponendo il passaggio per Q

Geometria

Ingegneria Gestionale

Prova scritta dell' 8 febbraio 2001

E1. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbf{R}^3$ (visto come spazio affine euclideo (rispetto al prodotto scalare standard)) siano dati il piano $\pi : 3x + 2y + z = 0$ e la retta r di equazione

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

i) Determinare la matrice $m_{ee}(p_U^W)$, dove p_U^W è la proiezione su U (giacitura di π) lungo W (direzione di r).
ii) Verificare che il triangolo OAB, con $O : (0,0,0)^t$, $A : (1,0,-1)^t$, $B : (1,-1,0)^t$ giace sul piano per O perpendicolare a r e se ne calcoli l'area.
iii) Si determini l'area di $O'A'B'$, con $O'A'B' = p_U^W(OAB)$. **Sugg.** Il problema è standard, ma se si tiene in debito conto il significato geometrico del prodotto vettoriale, è possibile fornire una soluzione molto rapida.)

E2. i) Si determini, nel piano affine reale $\mathbf{A}^2$, (ampliato proiettivamente) la conica C tale che (si intende fissato un riferimento affine):
1) il punto $P : (2,1)$ sia polo di $p : y + x = 0$; 2) passi per $P_1 : (-2,2)$, $P_2 : (1,-1)$, $Q : (1,1)$.
ii) Determinare il tipo affine di C.
iii) Determinare il polo R' di $r' := PQ$.
iv) Determinare il polo R'' di $R'P$.
v) Sfruttare le costruzioni precedenti per determinare la segnatura di A (matrice (proiettiva) di C) e calcolare quest'ultima anche in un altro modo.

T1. i) Dare la definizione generale di spazio affine e fornire possibilmente almeno due esempi.
ii) Dare la definizione di sottospazio affine, e dire che cosa si intende con l'affermare che due sottospazi affini sono 1) incidenti, 2) paralleli.
iii) Enunciare e dimostrare, sia in forma geometrica (vettoriale) che in forma matriciale, il teorema di Rouché-Capelli.

T2. Sia dato un piano euclideo reale, ampliato proiettivamente e complessificato.
i) Che cosa sono le rette isotrope del piano? E i punti ciclici?
ii) Quali coniche sono caratterizzate dal passaggio per i punti ciclici?
iii) Definire fuochi e direttrici di una conica.
iv) Ricavare, dall'approccio proiettivo, la proprietà delle coniche di essere luogo dei punti tali che il rapporto delle distanze rispettive da un punto dato e una retta data è...
v) Dimostrare iv) per via elementare, partendo dalla costruzione di Dandelin (limitarsi al caso dell'ellisse).

Tempo a disposizione 2h.30m
Le risposte vanno adeguatamente giustificate.

Geometria 8/2/2001

Siano dati, in $\mathbb{R}^3$, letto come spazio affine su se stesso, il piano

$$\pi : 3x + 2y + z = 0$$

e la retta $\quad r : \begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$

(entrambi per l'origine..) Detta U la giacitura di π e W la direzione di r,

i) determinare $m_{ee}(P_U^W)$ $\quad$ ($e = (e_1, e_2, e_3)$ base canonica)

ii) Verificare che il triangolo OAB, con $O = (0,0,0)^t$; $A = (1, 0, -1)^t$; $B = (1, -1, 0)^t$ giace sul piano per O perpendicolare a r e se ne calcoli l'area.

iii) Si determini l'area di $O'A'B'$, con

$$O'A'B' = P_U^W(OAB)$$

Sol. $\quad r : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \qquad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Sia $P = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un pto generico; consideriamo la retta per P // ad r

$$r_P : \quad P + tW \qquad \begin{aligned} x &= a + t \\ y &= b + t \\ z &= c + t \end{aligned}$$

Calcoliamo $r_P \cap \pi$

$$3(a+t) + 2(b+t) + c + t = 0$$

$$(3a + 2b + c) + (3+2+1)t = 0$$

$$3a + 2b + c + 6t = 0$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{-3a - 2b - c}{6}$$

e ora, successivamente

$P : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad t_P = -\frac{1}{2}$

$P : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad t_P = -\frac{1}{3}$

$P : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad t_P = -\frac{1}{6}$

$$\Rightarrow e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} \\ 0 - \frac{1}{2} \\ 0 - \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 - \frac{1}{3} \\ 1 - \frac{1}{3} \\ 0 - \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 - \frac{1}{6} \\ 0 - \frac{1}{6} \\ 1 - \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad m_{ee}(P_U^W) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

Il piano π', $\perp$ a r per O ha equazione $x + y + z = 0$

$\Rightarrow A, B \in \pi'$

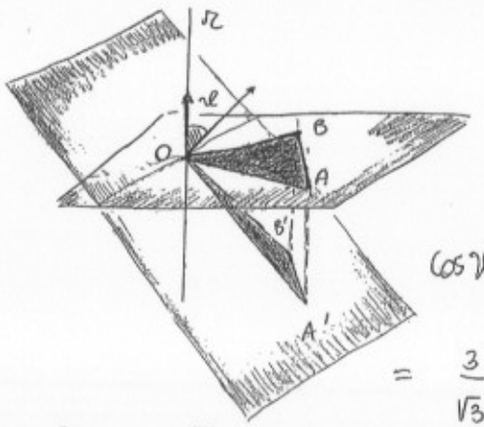
$$\text{Area } \mathcal{A} = \frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{1+1+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Calcoliamo $\mathcal{A}' = \text{area } \underset{\overset{\|}{O}}{O'}A'B'$

Procediamo in due modi (il primo è il migliore)



$$\mathcal{A}' = \frac{\mathcal{A}}{\cos\vartheta}$$

(si può far sì che $-\frac{\pi}{2} \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow \cos\vartheta \geq 0$

$$\cos\vartheta = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\sqrt{3}\sqrt{9+4+1}} =$$

$$= \frac{3+2+1}{\sqrt{3}\sqrt{14}} = \frac{6}{\sqrt{3}\sqrt{14}} =$$

$$= \frac{6}{\sqrt{6}\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}} \Rightarrow \mathcal{A}' = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{\frac{7}{6}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}$$

Altro metodo det. A' e B'

$$A' = P_U^W(A)$$
$$B' = P_U^W(B)$$

$$A' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} - \frac{5}{6} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3+1}{6} \\ \frac{-3+1}{6} \\ \frac{-3-5}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$B' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3+2}{6} \\ -\frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{-3-4}{6} \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{-3+2}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ -\frac{7}{6} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$\text{Area } \underset{\overset{\|}{O}}{O'}A'B' \equiv \mathcal{A}' = \frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{5}{6} & -\frac{7}{6} & -\frac{1}{6} \end{vmatrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{36}\sqrt{\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -7 \end{vmatrix}^2}_{-14+5=-9} + \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ -7 & -1 \end{vmatrix}^2}_{1-28=-27} + \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}^2}_{-2+20=18}}$$

$$= \frac{1}{36}\sqrt{(-9)^2 + (-27)^2 + 18^2} =$$

$$= \frac{1}{36}\sqrt{9^2[1+9+4]} = \frac{1}{4}\sqrt{14} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{14}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}$$

OK

Geometria 8/2/2001

i) Determinare la conica $\mathcal{C}$ tale che

1) $P:(2,1)$ sia polo di $p: y=-x$

2) $P_1:(-2,2) \in \mathcal{C}$ 3) $Q:(1,1) \in \mathcal{C}$
$P_2:(1,-1)$

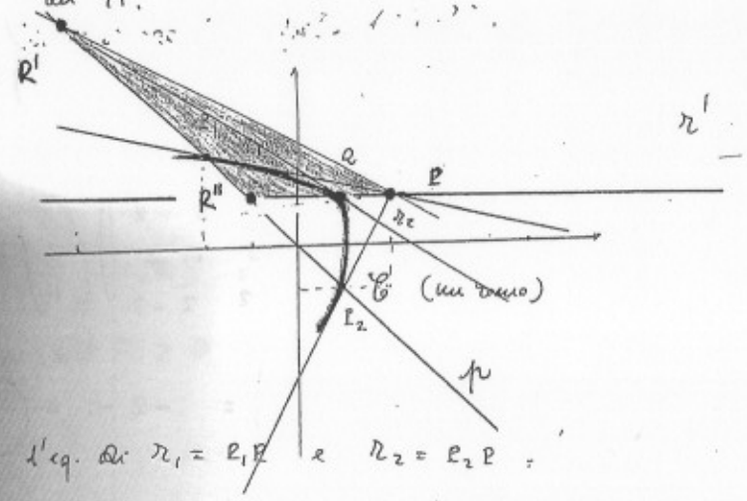
ii) Determinare il tipo affine.

iii) Determinare $R' \equiv$ polo di $r' \equiv PQ$

iv) Determinare il polo R'' di $Q'P$

v) Sfruttare le costruzioni precedenti per det la struttura di A.

Sol.



Det. l'eq. di $r_1 = P_1P$ e $r_2 = P_2P$:

r_1: $y-2 = \underbrace{-\frac{1}{4}}_{m_1}(x+2) \Rightarrow 4(y-2)+x+2=0$

$4y-8+x+2=0$

$\boxed{4y+x-6=0 \quad r_1}$

r_2 $y+1 = \underbrace{2}_{m_2}(x-1)$ $2x-2-y-1=0$

$\boxed{2x-y-3=0 \quad r_2}$

$\mathcal{C} \in \mathcal{F}$: $r_1 r_2 + \lambda \cdot p^2 = 0$

$(4y+x-6)(2x-y-3)+\lambda(y+x)^2=0$

Imponiamo il passaggio per $Q:(1,1)$

$(4+1-6)(2-1-3)+\lambda\cdot 4=0$

$(-1)(-2)+4\lambda=0$

$2+4\lambda=0$ $\boxed{\lambda=-\frac{1}{2}}$

$2(4y+x-6)(2x-y-3)-(y+x)^2=0$

$2(8xy+2x^2-12x-4y^2-xy+6y-12y-3x+18)$
$-(x^2+2xy+y^2)=0$

$2(2x^2-4y^2+7xy-15x-6y+18)-$
$-x^2-2xy-y^2=0$

$3x^2-9y^2+12xy-30x-12y+36=0$

$\underbrace{x^2-3y^2+4xy}-10x-4y+12=0$

$\det A \neq 0$

$A_{00} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ $\det A_{00} = a_{00} = -3-4=-7$

iperbole

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -5 & -2 \\ -5 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$\det A =$

$-36 + 20 + 20$

$-4 - 48 + 75 =$

$= -36 + 40 + 75 - 52$

$= -56 + 75 = 19 > 0$

Calcoliamo la tangente a $\mathcal{C}$ in $Q: (1,1) = [1,1,1]$

$$(x_0 \ x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 12 & -5 & -2 \\ -5 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$(x_0 \ x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} \overbrace{12 - 5 - 2}^{5} \\ \overbrace{-5 + 1 + 2}^{-2} \\ \underbrace{-2 + 2 - 3}_{-3} \end{pmatrix} = 0$$

$5 : x_0 - 2x_1 - 3x_2 = 0$

$\boxed{\tau_Q : \ 5 - 2x - 3y = 0}$

☆ Per il principio di reciprocità, il polo di $r' = PQ$, sia R', è dato da $\underset{\text{polare di } Q}{\tau_Q} \cap \underset{\text{polare di } P}{p}$

$$R' : \begin{cases} 5 - 2x - 3y = 0 \\ y + x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -x \qquad \begin{aligned} &5 - 2x + 3x = 0 \\ &5 + x = 0 \quad x = -5 \\ &y = 5 \end{aligned}$$

$\Rightarrow R' : (-5, 5)$

$$\boxed{\underset{\text{polo di } R'P}{R''} = \underset{\text{polare di } R'}{r'} \cap \underset{\text{polare di } P}{p}}$$

$$\begin{cases} y + x = 0 : p \\ y = 1 \quad : PQ = r' \end{cases}$$

Ancora per il principio di reciprocità

$\Rightarrow x = -1$

$R'' = (-1, 1)$

Il triangolo $P R' R''$ è pertanto autopolare. Ciò ci permette di calcolare facilmente la struttura di A

$P = [1, 2, 1] \qquad X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$R' = [1, -5, 5] \qquad X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$

$R'' = [1, -1, 1] \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$X_0^t A X_0 = (1 \ 2 \ 1) \begin{pmatrix} 12 & -5 & -2 \\ -5 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (1 \ 2 \ 1) \begin{pmatrix} \overbrace{12 - 10 - 2}^{0} \\ \overbrace{-5 + 2 + 2}^{-1} \\ \underbrace{-2 + 4 - 3}_{-1} \end{pmatrix} = -2 - 1 = -3$$

$$X_1^t A X_1 = (1 \ -5 \ 5) \begin{pmatrix} 12 & -5 & -2 \\ -5 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} =$$

$$= (1 \ -5 \ 5) \begin{pmatrix} \overbrace{12 + 25 - 10}^{27} \\ \overbrace{-5 - 5 + 10}^{0} \\ \underbrace{-2 - 10 - 15}_{-27} \end{pmatrix} = 27 + 5(-27) = (-4) \cdot 27 = -81$$

Dobbiamo trovare necessariamente $x_2^t A x_2 > 0$

$\Rightarrow$ Segnatura $= (1,2)$.

Verifichiamolo direttamente

$$(1 \ -1 \ 1)\begin{pmatrix} 12 & -5 & -2 \\ -5 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (1 \ -1 \ 1)\begin{pmatrix} \overbrace{12+5}^{15} & -2 \\ -5 & \overbrace{-1+2}^{-4} \\ -2 & \underbrace{-2+3}_{-1} \end{pmatrix} = 15 + 4 - 1 =$$

$$18 > 0$$

OK

In altro modo: la segnatura è

$(1,2)$ o $(2,1)$

ma $\det A > 0 \Rightarrow$ è $(1,2)$ $\square$

a.a. 2000 - 2001

Geometria

Ingegneria Gestionale

Prova scritta del 22 giugno 2001

E1. i) Determinare la segnatura della forma quadratica rappresentata, rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$, dalla matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

nonché una base di Sylvester.

ii) Dato $v = (1,1,3)^t$, si determini $\langle v \rangle^{\perp_A}$. Dato inoltre $Z = \langle v_1, v_2 \rangle$, dove

$$v_1 = (1,1,1)^t \qquad v_1 = (0,0,1)^t$$

si determinino le dimensioni e opportune basi di $\langle v \rangle^{\perp_A} + Z$ e $\langle v \rangle^{\perp_A} \cap Z$.

iii) Sia dato $u = (1,0,1)^t$. Verificare che $\langle u \rangle^{\perp_A}$ appartiene al fascio di piani di asse $\langle v \rangle$.

Facoltativo. Tenendo anche conto dell'esercizio E2, discutere in astratto la situazione geometrica rappresentata.

E2. i) Nel piano euclideo reale $\mathbb{E}^2$ determinare la conica $\mathcal{P}$ tale che:
1) $\mathcal{P}$ passi per $O : (0,0)$ e per $P : (1,3)$
2) La polare di $P_1 : (0,1)$ sia $p_1 : y - 3x = 0$.
3) $\mathcal{P}$ sia una parabola.
ii) Determinare fuoco e direttrice di $\mathcal{P}$ e si abbozzi (con una certa cura) il grafico di $\mathcal{P}$.

T1. i) Dare la definizione generale di spazio affine e fornire almeno due esempi.
ii) Dare la definizione di sottospazio affine, e dire che cosa si intende con l'affermare che due sottospazi affini sono 1) incidenti, 2) paralleli, 3) sghembi. Fare esempi.
iii) Enunciare e dimostrare il teorema XI.3 di Euclide.
iv) Enunciare e dimostrare, sia in forma geometrica (vettoriale) che in forma matriciale, il *teorema di Rouché-Capelli*.

T2. Data una conica irriducibile $\mathcal{C}$ in $\mathbb{P}^2$ (in cui è fissato un riferimento proiettivo),
i) si definisca analiticamente la polare di un punto rispetto a $\mathcal{C}$.
ii) Si enunci e si dimostri il *teorema di reciprocità*.
iii) Si dia l'interpretazione geometrica della polare, giustificandola tramite ii).
iv) Dare la definizione di triangolo autopolare, fornendone poi un'interpretazione algebrica.
v) Sia dia la definizione conica a centro, di diametro di una tale conica e di diametro ad esso coniugato. Nel piano affine, si accenni a una costruzione geometrica di quest'ultimo.

Tempo a disposizione 2h.30m
Le risposte vanno adeguatamente giustificate

Geometria Prova scritta del 22/6/2001

(E1) i) Determinare la signatura di

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e una base di Sylvester

Sol: poniamo $X = (x_0, x_1, x_2)$

$$X^t A X = (x_0\ x_1\ x_2) \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$$

$$= (x_0\ x_1\ x_2) \begin{pmatrix} -2x_1 \\ -2x_0 + x_1 - x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix} =$$

$$= -2x_0x_1 + x_1(-2x_0 + x_1 - x_2) + x_2(-x_1 + x_2) =$$

$$-2x_0x_1 \quad -2x_0x_1 + x_1^2 - x_1x_2 \quad -x_1x_2 + x_2^2$$

$$= x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_0x_1$$

$$= (x_1 - x_2)^2 - 4x_0x_1$$

poniamo $x_1 - x_2 = \xi_0$

$x_0 = \xi_1 + \xi_2$

$x_1 = \xi_1 - \xi_2$

$(x_2 = x_1 - \xi_0 = \xi_1 - \xi_2 - \xi_0)$

$$\begin{cases} x_0 = \xi_1 + \xi_2 \\ x_1 = \xi_1 - \xi_2 \\ x_2 = -\xi_0 + \xi_1 - \xi_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

(non singolare)

base di Sylvester (previo diagonalizzazione)

$$\Rightarrow X^t A X = \xi_0^2 - 4(\xi_1 + \xi_2)(\xi_1 - \xi_2)$$

$$= \xi_0^2 - 4\xi_1^2 + 4\xi_2^2$$

$$= \left(\begin{array}{l} \xi_0 = \eta_0 \\ 2\xi_1 = \eta_1 \\ 2\xi_2 = \eta_2 \end{array} \right)$$

$$= \eta_0^2 - \eta_1^2 + \eta_2^2$$

$\Rightarrow$ signatura $= (2, 1)$

base di Sylvester $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right)$ $w \in$

ii) Sia $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{matrix}$ Determinare $\langle v \rangle^{\perp_A}$

$(x_1 - x_2)^2 - 4x_0x_1$

$$v^t A v = (3-1)^2 - 4 \cdot 1 = 4 - 4 = 0$$

$\Rightarrow$ v è isotropo (Sicchè $\langle v \rangle \leq \langle v \rangle^{\perp_A}$,

Determiniamo $\langle v \rangle^{\perp}$

$$(x_0 \ x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

$$(x_0 \ x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} -2 \\ -2+1-3 \\ 0-1+3 \end{pmatrix} = 0$$

$$(x_0 \ x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$-2x_0 - 4x_1 + 2x_2 = 0$$

$$x_0 + 2x_1 - x_2 = 0 \qquad x_2 = x_0 + 2x_1$$

$w \in \langle v \rangle^{\perp}$: $\quad w = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_0 + 2x_1 \end{pmatrix} = x_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\langle v \rangle^{\perp_A} = \langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{w_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{w_2} \rangle$$

notare come $v \in \langle v \rangle^{\perp_A}$

$v = w_1 + w_2$

Sia dato $Z_1 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$

Determinare $\dim(\langle v \rangle^{\perp_A} \cap Z_1)$ e basi.
$\dim(\langle v \rangle^{\perp_A} + Z_1)$

e basi per le

$$\langle v \rangle^{\perp_A} = \langle \overset{w_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}, \overset{w_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}} \rangle \qquad \text{piano}$$

$$Z_1 = \langle \underset{z_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{z_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \rangle \qquad \text{piano}$$

$$\begin{array}{c} w_1 \\ w_2 \\ z_2 \\ z_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ — base} \Rightarrow \dim(\langle v \rangle^{\perp_A} + Z) = 3$$

$$\dim(\langle v \rangle^{\perp} \cap Z_1) = \underset{2}{\dim \langle v \rangle^{\perp}} + \underset{2}{\dim Z_1} - \underset{3}{\dim(\langle v \rangle^{\perp} + Z_1)}$$

$$= 1$$

Det. una base di $\langle v \rangle^{\perp} \cap Z_1$

$\langle v \rangle^{\perp_A}$: $\quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad x(-1) - y \cdot 2 + z = 0$

$$-x - 2y + z = 0$$

$$x + 2y - z = 0$$

Z_1: $\quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad 1(x - y) = 0$

$$x - y = 0$$

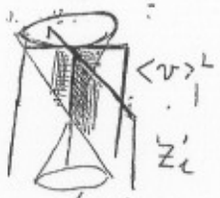
$Z_1 \cap \langle v \rangle^{\perp} \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \qquad y = x \qquad 3x - z = 0 \qquad z = 3x \qquad y = x \qquad x = x$$

$Z_1 \cap \langle v \rangle^{\perp}$

$$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$$

notare che $\langle v \rangle = Z_1 \cap \langle v \rangle^\perp$

* Z_1 taglia $\langle v \rangle^\perp$ lungo $\langle v \rangle$



Sia ora $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

u non è isotropo $\Rightarrow$ $\langle u \rangle \oplus \langle u \rangle^\perp = \mathbb{R}^3$

Det. eqn. $u^\perp$:

$$(x_0 \ x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$(x_0 \ x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$(x_0 \ x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$-3x_1 + x_2 = 0 \qquad \begin{aligned} x_0 &= x_0 \\ x_1 &= x_1 \\ x_2 &= 3x_1 \end{aligned}$$

$$\langle u \rangle^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Dare $\mathcal{S}$ $\langle U \rangle^\perp$ e $\mathcal{Y}$ fascio di asse $\langle v \rangle$

$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad \langle v \rangle: \begin{aligned} x &= t \\ y &= t \\ z &= 3t \end{aligned}$ $\quad \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

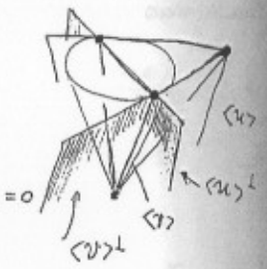
$al + bm + cn = 0$

$1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 3 = 0$ $\quad \langle v \rangle^\perp$

$x + 2y - z$

$a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 3 = 0$

$c = 0 \quad a = 1 \quad b = -1$

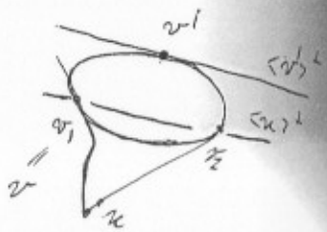


$\mathcal{Y}: \quad \lambda(x - y) + \mu(x + 2y - z) = 0$

$\langle u \rangle^\perp: \quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$

$-y \cdot 3 + z = 0$

$z - 3y = 0$



$Z_1: \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ ?$

$\langle v \rangle^\perp$:

$\langle u \rangle^\perp$.

$2 - 3 + 1 = 0$ sì

int. geometrica

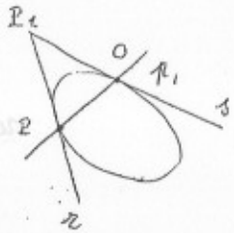
Geometria 22/6/2001

(E2) Determinare la conica $\mathcal{P}$ tale che:

1) $\mathcal{P}$ passi per $O=(0,0)$ e per $P=(1,3)$
2) La polare di $P_1=(0,1)$ sia: $p_1: y-3x=0$
3) $\mathcal{P}$ sia una parabola

Determinare F e δ e abbozzare il grafico

Sol. Si osservi che $O \in p_1$, $P \in p_1$



Le rette $r = P_1P$ e $s = OP$, hanno eq.

$r: \quad y-1 = 2x \qquad y-2x-1=0$

$s: \quad x=0$

$\Rightarrow$ $\mathcal{P}$ appartiene al fascio (descrizione non omogenea)

$$rs + \lambda p_1^2 = 0$$

$$(y-2x-1)x + \lambda(y-3x)^2 = 0$$

Imponiamo che $\mathcal{P}$ sia una parabola; consideriamo il complesso dei termini di 2° grado:

$$\lambda(9x^2-6xy+y^2) - 2x^2 + xy =$$

$$= (9\lambda-2)x^2 + (1-6\lambda)xy + \lambda y^2$$

deve essere $a_{00}=0$, ovvero

$$(9\lambda-2)\lambda - \frac{1}{4}(1-6\lambda)^2 = 0$$

$$9\lambda^2 - 2\lambda - \frac{1}{4}(36\lambda^2 - 12\lambda + 1) = 0$$

$$-2\lambda + 3\lambda - \frac{1}{4} = 0$$

$$\lambda - \frac{1}{4} = 0 \qquad \boxed{\lambda = \frac{1}{4}}$$

$\mathcal{P}$

$$4(y-2x-1)x + (y-3x)^2 = 0$$

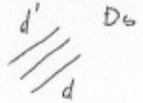
$$4xy - 8x^2 - 4x + y^2 - 6xy + 9x^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2xy - 4x = 0 \qquad (x-y)^2 - 4x = 0$$

$$\mathcal{P}: \quad X^t A X = 0 \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Determiniamo l'asse a di $\mathcal{P}$

I diametri hanno eq. $\quad x - y + k = 0$

$\Rightarrow$ 

$D_\infty = [0, 1, 1]$

$$D_\infty^\perp = [0, 1, -1]$$

a: polare di $D_\infty^\perp$

$$(x_0 \;\; x_1 \;\; x_2) \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$(x_0 \;\; x_1 \;\; x_2) \begin{pmatrix} -2 \\ 1+1 \\ -1-1 \end{pmatrix} = 0$$

$$(x_0 \;\; x_1 \;\; x_2) \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

$$-x_0 + x_1 - x_2 = 0 \qquad a: \; x - y - 1 = 0$$

$$y = x - 1$$

$$V = a \cap \mathcal{P} \qquad x - y = 1$$

$$\Rightarrow \quad 1^2 - 4x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_V = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad y_V = x_V - 1 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$$

$$V = (x_V, y_V) = \left(\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}\right)$$

$$\mathcal{A} = \det A = (\text{Sarrus}) = -4$$

$$\mathcal{J} = 2$$

$$p = \sqrt{-\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{J}^3}} = \sqrt{\frac{4}{8}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$F = V + \overset{\frac{p}{2}}{\frac{1}{2\sqrt{2}}} \, \underline{u} \qquad \underline{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + \overbrace{\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{4}} \\ -\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$F: \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

★ per ragioni geometriche:

infatti: $(x-y)^2 - 4x = 0$

$(x-y)^2 = 4x$

$\Rightarrow x \geq 0 \ldots$

in particolare $Q: (4, 0) \in \mathcal{P}$

δ (direttrice) = polare di F:

$$(x_0 \;\; x_1 \;\; x_2)\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = 0$$

$$(x_0 \;\; x_1 \;\; x_2)\begin{pmatrix} -1 \\ -2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 0$$

$$(x_0 \;\; x_1 \;\; x_2)\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$x_0 + x_1 + x_2 = 0$$

$$\boxed{\delta: \; 1 + x + y = 0}$$