ALGEBRA LINEARE CON ELEMENTI DI GEOMETRIA ( Proff. L. Angeleri, M. Spera )

modulo: ELEMENTI DI GEOMETRIA Prof. M. Spera

Prova scritta del 14 luglio 2010

(1) Nel piano euclideo reale, in cui sia fissato un riferimento cartesiano, determinare la parabola $\mathcal{P}$ di vertice $V:(0,1)$ e direttrice $\delta: x-3y=0$.
[ 1. Determinare l'asse $a$ di $\mathcal{P}$ e $H = a \cap \delta$
2. Determinare il fuoco $F$
3. Scrivere l'equazione di $\mathcal{P}$ ]
e se ne abbozzi il grafico (con una certa cura).
Scrivere l'equazione della retta tangente a $\mathcal{P}$ in $V$.

(2) Nel piano euclideo reale, in cui sia fissato un riferimento cartesiano, 1. scrivere la matrice della simmetria obliqua attorno alla retta

$$r: \quad 2x+y-2=0$$

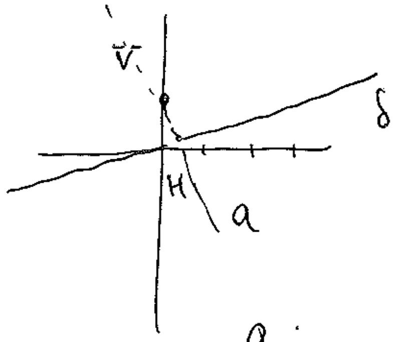
lungo la direzione $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ (formalismo unificato)

2. Scritta l'equazione della circonferenza $\mathcal{C}$ passante per $O:(0,0)$, $A:(1,0)$, $B:(0,2)$, determinare l'equazione di $\mathcal{C}'$ (immagine di $\mathcal{C}$ attraverso la simmetria obliqua in questione). Di che tipo di curva si tratta? Qual è l'immagine del centro di $\mathcal{C}$? Spiegare

Tempo a disposizione: 1h 15m - Le risposte vanno adeguatamente giustificate

Elementi di geometria | 14/7/2010 |

① $\mathcal{P}$ parabola con vertice $V = (0,1)$ e direttrice $\delta : x - 3y = 0$




l'asse di $\mathcal{P}$ sarà la retta per $V$ perpendicolare a $\delta$.

$$a : \quad 3(x-0) + 1(y-1) = 0$$

$$3x + y - 1 = 0$$

troviamo $H = a \cap \delta$

$$\begin{cases} 3x + y - 1 = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$$

$$3 \cdot 3y + y - 1 = 0$$

$$9y + y - 1 = 0$$

$$10y - 1 = 0 \qquad y = \frac{1}{10}$$

$$x = \frac{3}{10}$$

$$H : \left(\frac{3}{10}, \frac{1}{10}\right)$$

troviamo il fuoco $F$:

$V$ è il punto medio di $FH$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{10} \\ \frac{1}{10} \end{pmatrix}\right]$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} f_1 + \frac{3}{20} = 0 \\ 1 = \frac{1}{2} f_2 + \frac{1}{20} \end{cases} \qquad \begin{aligned} f_1 &= -\frac{3}{20} \cdot 2 = -\frac{3}{10} \\ f_2 &= 2 \cdot \frac{19}{20} = \frac{19}{10} \end{aligned}$$

$$F : \left(-\frac{3}{10}, \frac{19}{10}\right)$$

$\mathcal{P}$ avrà dunque equazione $\quad \left( d^2(P,F) = d^2(P,\delta) \right)$

$$\left(x + \frac{3}{10}\right)^2 + \left(y - \frac{19}{10}\right)^2 = \frac{(x-3y)^2}{10}$$

$$x^2 + \frac{3}{5}x + \frac{9}{100} + y^2 - \frac{19}{5}y + \frac{19^2}{100} = \frac{x^2 - 6xy + 9y^2}{10}$$

$$100x^2 + 60x + 9 + 100y^2 - 380y + 19^2 - 10x^2 + 60xy - 90y^2 = 0$$

$19^2 = 20^2 - 40 + 1 = 400 - 41 = 361$

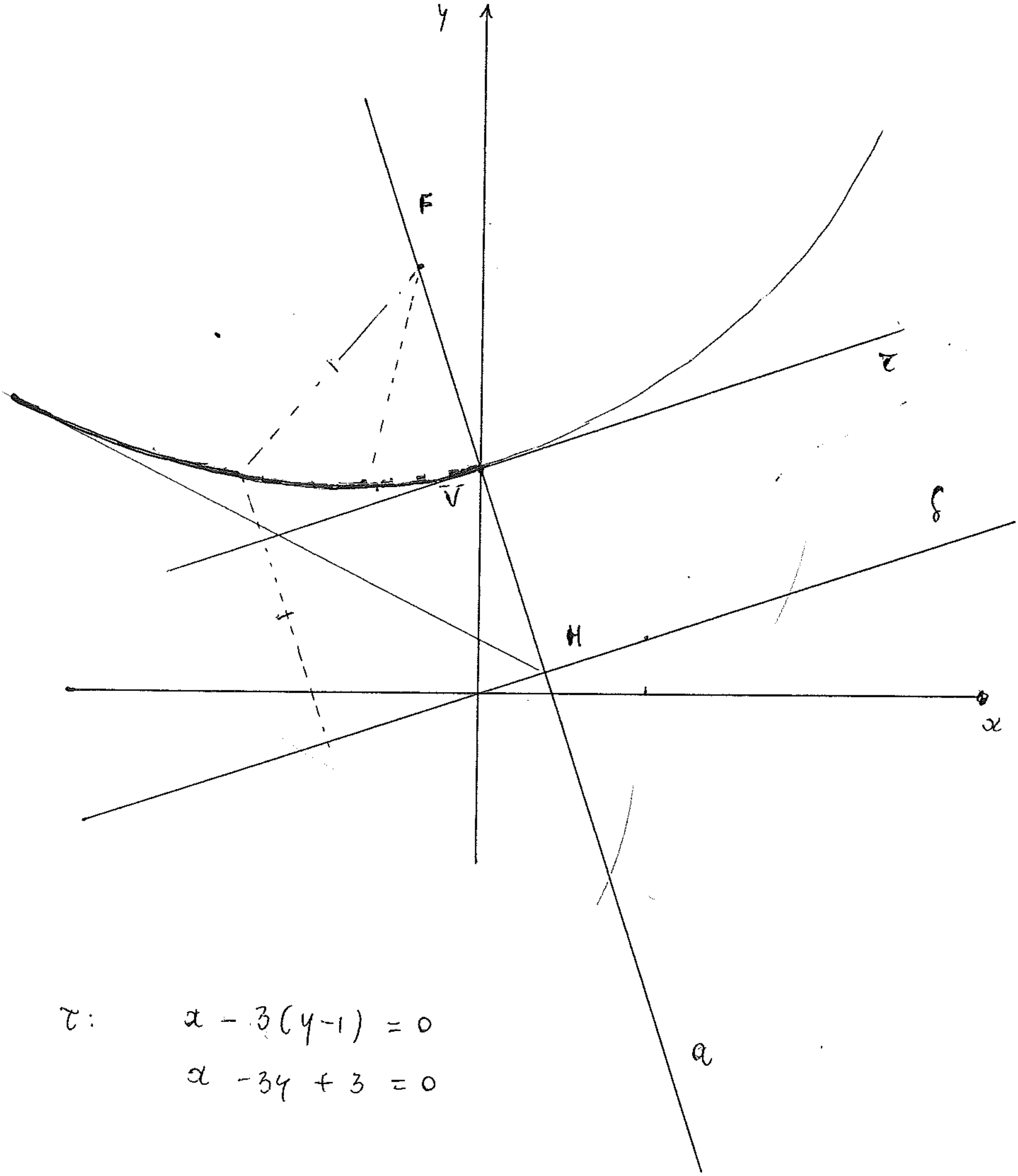
$$\begin{array}{r} 19 \\ 19 \\ \hline 171 \\ 19 \\ \hline 361 \end{array}$$

$$90x^2 + 10y^2 + 60xy + 60x - 380y + 370 = 0$$

$$\underbrace{9x^2 + y^2 + 6xy}_{(3x+y)^2} + 6x - 38y + 37 = 0$$

.. ok

tangente in $\bar{V}$ : retta per $\bar{V}$ // $\delta$

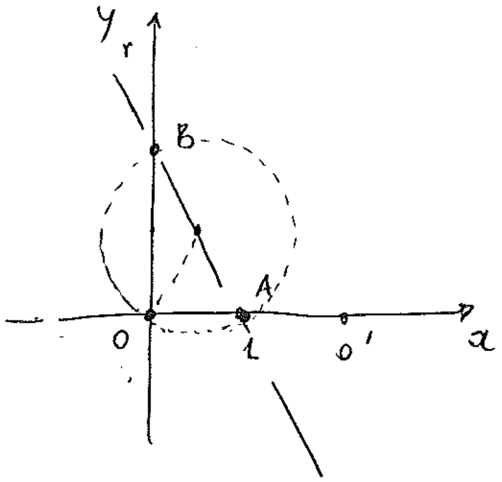


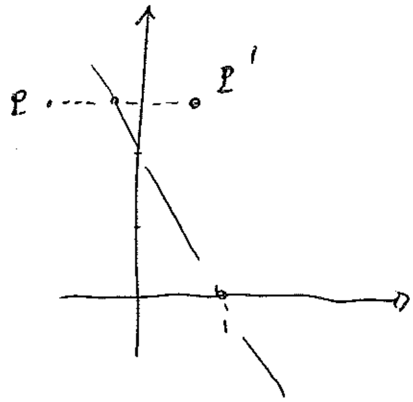

$\tau: \quad x - 3(y-1) = 0$

$x - 3y + 3 = 0$

| Diego 14/7/2010 |

(2) Simmetria obliqua rispetto a $r: 2x+y-2=0$ lungo la direzione $\langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \rangle$




$P: \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ $\quad r_P:$ $\begin{cases} x = a+t \\ y = b \end{cases}$

retta per P di dir. $\langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \rangle$

intersechiamo con r: $\quad 2(a+t)+b-2=0$

$2a+2t+b-2=0$

$2t = 2-b-2a \rightsquigarrow \hat{t}$

il val. del par corr. a $P'$

$P': \begin{cases} a'=x_{P'} = a+2\hat{t} = a+(2-b-2a) = 2-a-b \\ b'=y_{P'} = b \end{cases}$

$\begin{cases} a' = 2-a-b \\ b' = b \end{cases}$ $\qquad \begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

form. unificata

$M = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$\det A = \det\begin{vmatrix}-1 & -1\\0 & 1\end{vmatrix} = -1$

aree cons. a meno dell'orientamento

non è un mov. rigido

circonferenza per O, A, B

$O: (0,0)$
$A: (1,0)$
$B: (0,2)$

geometricamente: $C$ (centro) $= \dfrac{A+B}{2} = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$
vi figura

$R$ (raggio) $= \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2}\sqrt{1+4} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$$\mathcal{C}: \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{5}{4}$$

$$x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 - 2y + 1 = \frac{5}{4}$$

$$\mathcal{C}: \boxed{x^2 + y^2 - x - 2y = 0}$$

(controllo: passa per
O ✓
A $1-1=0$
B $4-4=0$ )

troviamo l'immagine di $\mathcal{C}$ tramite $M$

$$\begin{cases} x' = 2 - x - y \\ y' = y \end{cases} \qquad \begin{aligned} x &= 2 - y - x' \\ &= 2 - x' - y' \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = 2 - x' - y' \\ y = y' \end{cases}$$

$$(2-x'-y')^2 + y'^2 - 2 + x' + y' - 2y' = 0$$

$$4 + x'^2 + y'^2 - 4x' - 4y' + 2x'y' + y'^2 - 2 + x' - y' = 0$$

$$\mathcal{C}': x'^2 + 2y'^2 - 3x' - 5y' + 2 = 0$$

è un'ellisse di centro $C' = M \cdot C$
[una trasf. affine manda centri in centri]

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

il centro è lo stesso poiché AB è fissa e così pure $y = 1$
diametri di $\mathcal{C}$

$$C' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 - \frac{1}{2} - 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$