ALGEBRA LINEARE CON ELEMENTI DI GEOMETRIA (Proff. L. Angeleri, N. Sposa)

Modulo: ELEMENTI DI GEOMETRIA Prof. N. Sposa

Prova scritta del 21 settembre 2020

(1) Nel piano euclideo reale, in cui sia fissato un riferimento cartesiano, e ampliato proiettivamente, si determini la conica $\mathscr{C}$ di centro $C:[1,1,1]$, passante per i punti $P_1:[0,1,0]$, $P_2:[0,1,2]$ e tangente alla retta $s: x=0$.
Si individuino gli assi di $\mathscr{C}$ e la forma canonica metrica, e se ne abbozzi il grafico. Fac. Determinare i fuochi di $\mathscr{C}$.

(2) Nel piano euclideo reale, in cui sia fissato un riferimento cartesiano, dopo aver scritto l'equazione della circonferenza $\mathscr{C}$ passante per $A:(-2,0)$, $B:(0,0)$, $D:(0,1)$, se ne determini l'immagine $\mathscr{C}'$ tramite l'affinità $T: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Di che tipo di curva si tratta?

[con apici indichiamo i trasformati dei punti in questione tramite T]

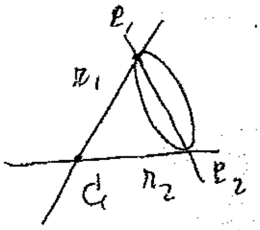
Calcolare l'area sottesa da $\mathscr{C}'$. Determinare le coordinate baricentriche del centro C di $\mathscr{C}$ rispetto ad A, B, D, nonché quelle di C' rispetto ad A', B', D'.

Tempo a disposizione: 1h 15m - Le risposte vanno adeguatamente giustificate.

$\boxed{\text{Elegeo } 21/9/10}$

(1) $\mathscr{C}$ con centro in $C:[1,1,1]$, tangente a r_∞ in $P_1:[0,1,0]$, $P_2:[0,1,2]$ e alla retta $f: x=0$ (asse y) $\boxed{\text{(iperbole)}}$

gli asintoti sono le rette CP_i, $i=1,2$



$$r_1: \begin{cases} x = 1 + t\cdot 1 \\ y = 1 + t\cdot 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{r_1: \quad y = 1}$$

$$r_2: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \end{cases} \qquad t = x-1$$

$$y = 1 + 2(x-1) = 1 + 2x - 2 = 2x-1$$

$$\boxed{r_2: \quad y = 2x-1}$$

fascio: $\quad r_1 r_2 + \lambda r_\infty^2 = 0$

$$(y-1)(y-2x+1) + \lambda = 0$$

Intersechiamo con la retta $x=0$

$$(y-1)(y+1) + \lambda = 0$$

$$y^2 - 1 + \lambda = 0 \qquad y^2 = 1-\lambda$$

vogliamo una radice doppia $\Rightarrow 1-\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 1$

pto di tangenza $x = y = 0 \Rightarrow O:(0,0)$

$$(y-1)(y-2x+1)+1=0$$

$$y^2 - \cancel{y} - 2xy + 2x + \cancel{y} \cancel{-1} \cancel{+1} = 0$$

$$y^2 - 2xy + 2x = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Delta = \det A =$

$(-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$

$\delta_{00} = \det A_{00} = -1$

$\mathcal{I} = 1$

$$t^2 + \frac{\delta_{00}\mathcal{I}}{\Delta} t + \frac{\delta_{00}^3}{\Delta^2} = 0$$

$$t^2 + \frac{(-1)\cdot 1}{-1} t + \frac{(-1)^3}{(-1)^2} = 0$$

$$t^2 + t - 1 = 0 \qquad t = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

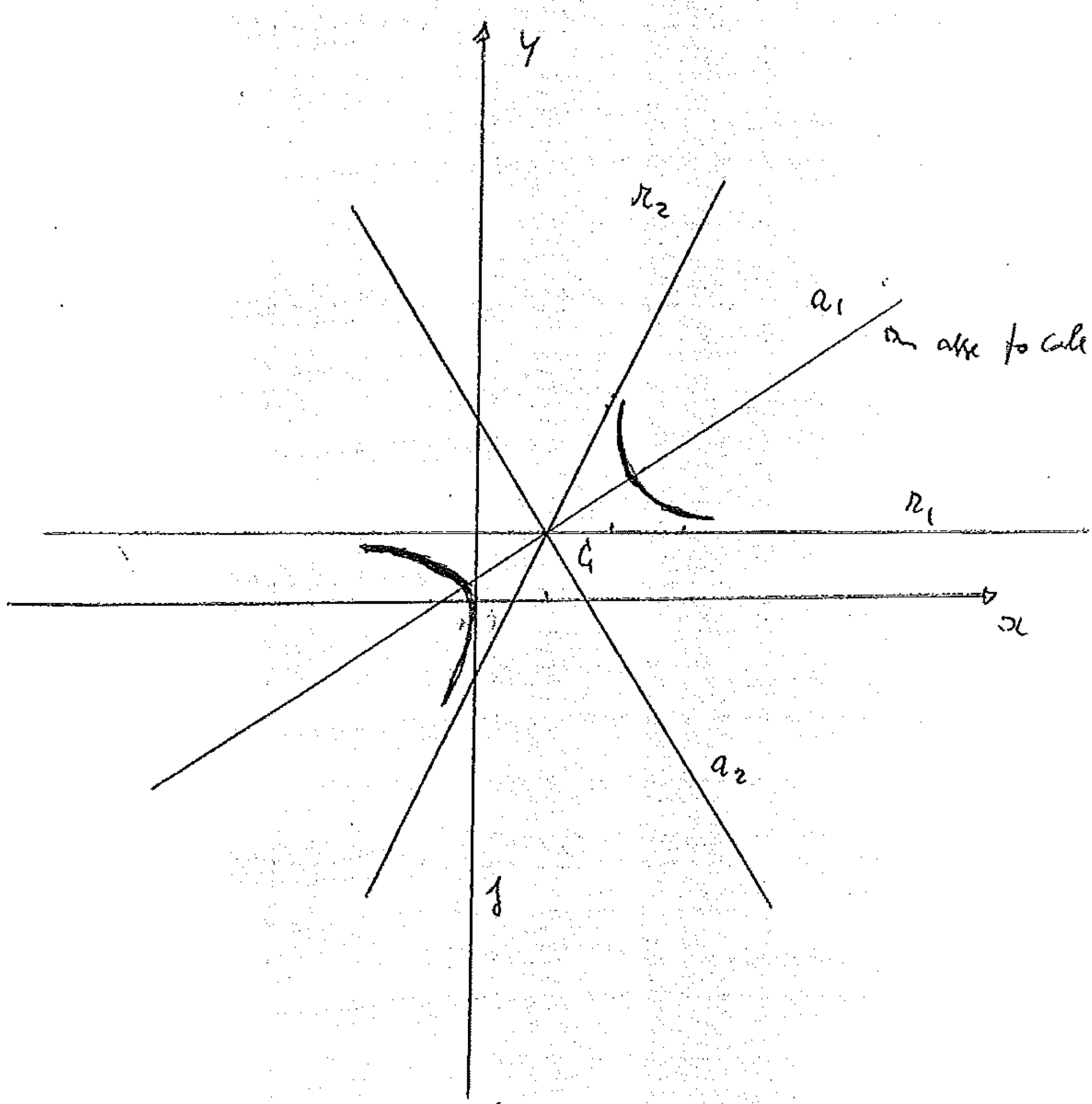
$$a = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{5}-1}} \qquad b = \sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{5}}}$$

$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\Phi^{-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

$$a = \sqrt{\Phi} \qquad b = \frac{1}{\sqrt{\Phi}}$$

X



assi: $$(-m \quad 1)\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ m\end{pmatrix} = 0$$

$$(-m \quad 1)\begin{pmatrix}-m\\ -1+m\end{pmatrix} = 0$$

$$m^2 - 1 + m = 0 \qquad m^2 + m - 1 = 0$$

$$m = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \begin{matrix} \nearrow m_+ \\ \searrow m_- \end{matrix}$$

assi $\quad y - 1 = m_\pm (x-1)$

asse focale (come rag. geometriche) : $\quad y = m_+(x-1)+1$

Coordinate dei fuochi:

$$d(C, F_{\frac{1}{2}}) = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\Phi + \frac{1}{\Phi}} = $$
$$= \sqrt{\frac{\Phi^2+1}{\Phi}}$$

$$m_+ = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\Phi}$$

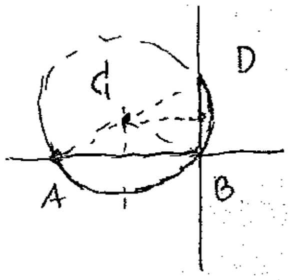
dir asse focale: $\rightsquigarrow \left(1, \frac{1}{\Phi}\right) \rightsquigarrow (\Phi, 1)$

$$\underline{u} = \left(\frac{\Phi}{\sqrt{\Phi^2+1}}, \frac{1}{\sqrt{\Phi^2+1}}\right)$$

$$F_{\frac{1}{2}} = C \pm \sqrt{\frac{\Phi^2+1}{\Phi}}\,\underline{u}$$
$$= \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \pm \frac{1}{\sqrt{\Phi}}\begin{pmatrix}\Phi\\1\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix}\sqrt{\Phi}\\ \frac{1}{\sqrt{\Phi}}\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}1 \pm \sqrt{\Phi}\\ 1 \pm \frac{1}{\sqrt{\Phi}}\end{pmatrix}$$

(2) $A : (-2, 0) \quad B : (0,0)$

$D : (0,1)$



Da semplici considerazioni geometriche si vede subito che $C_1 = \left(-1, \frac{1}{2}\right)$ centro di $\mathscr{C}$

$$R = \overline{CB} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

raggio

$\Rightarrow$ l'equazione è $\mathscr{C} : (x+1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - y + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$x^2 + 2x + \cancel{1} + y^2 - y - \cancel{1} = 0$$

$$\boxed{\mathscr{C}: \quad x^2 + y^2 + 2x - y = 0}$$

$\left(C_1 : \left(-1, +\frac{1}{2}\right) \text{ ok} \right)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A' & B' & C' & D' \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x + y + 1 \\ y \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x' = x + y + 1 \\ y' = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x' - y' - 1 \\ y = y' \end{cases}$$

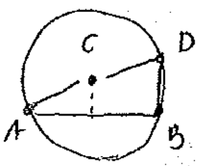
$$\mathcal{C}': \quad (x'-y'-1)^2 + y'^2 + 2(x'-y'-1) - y' = 0$$

(ellisse)

$$x'^2 + y'^2 + 1 - 2x' + 2y' - 2x'y' + y'^2 + 2x' - 2y' - 2 - y' = 0$$

$$\mathcal{C}': \quad x'^2 + 2y'^2 - 2x'y' - y' - 1 = 0$$

centro di $\mathcal{C}$



$C \in AD \Rightarrow$

$$C = \frac{1}{2}(A+D) = \frac{1}{2}A + 0\cdot B + \frac{1}{2}D$$

$\Rightarrow$ coord. bar. $\begin{cases} u_C = \frac{1}{2} \\ v_C = 0 \\ w_C = \frac{1}{2} \end{cases}$

Coordin. bar. di C' risp a A', B', D'! sono le stesse
(le coord. bar. sono invarianti per affinità!)

$$\underset{\text{area}}{\mathcal{A}_{\mathcal{C}'}} = \det \underset{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & A \end{pmatrix}}{A} \cdot \mathcal{A}_{\mathcal{C}} = 1 \cdot \pi \cdot \underset{R^2}{\frac{5}{4}} = \frac{5\pi}{4}$$