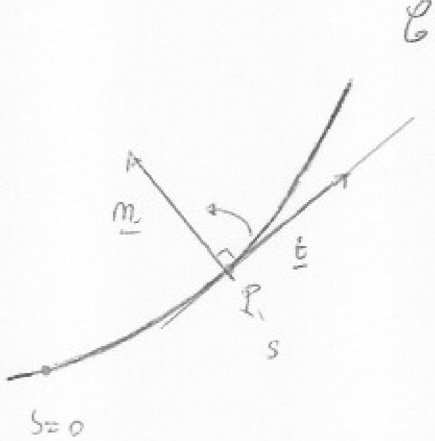
Appunti del corso di **GEOMETRIA** (Prof. M. Spera)

Lezione V

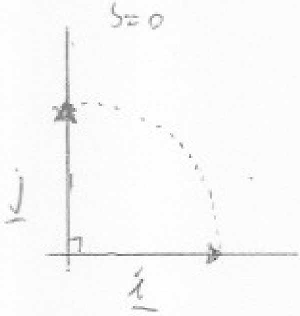
◇ Geometria differenziale delle curve piane

Sia $\mathscr{C}$: $\underline{r} = \underline{r}(s)$ curva piana, semplice, liscia regolare, parametrizzata dall'ascissa curvilinea

(si ricordi $\|\underline{r}'\| = 1$: velocità unitaria



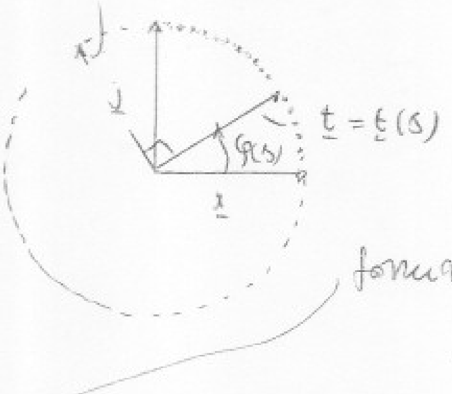
Sia $\underline{n}$ (versore normale in un dato pto della curva) scelto in modo che $(\underline{i}, \underline{j})$ e $(\underline{t}, \underline{n})$ siano equiorientate (i.e. la matrice del cambiamento di base sia ortogonale speciale (det = +1)



$$\begin{array}{cc} \underline{t} & \underline{n} \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} \cos\varphi(s) & -\sin\varphi(s) \\ \sin\varphi(s) & \cos\varphi(s) \end{pmatrix}$$

$\underline{n} = \underline{n}(s)$

$$\underline{t}(s) = \begin{pmatrix} \cos\varphi(s) \\ \sin\varphi(s) \end{pmatrix} = \cos\varphi(s)\,\underline{i} + \sin\varphi(s)\,\underline{j}$$



$$\underline{n}(s) = \begin{pmatrix} -\sin\varphi(s) \\ \cos\varphi(s) \end{pmatrix}$$

formalismo "misto" $\quad \underline{t}(s) = e^{i\varphi(s)}\,\underline{i}$

= complesso $\quad t(s) = e^{i\varphi(s)} = \cos\varphi(s) + i\sin\varphi(s)$

$$\underline{n}(s) = i\,e^{i\varphi(s)}\,\underline{i}$$

$$n(s) = i\,e^{i\varphi(s)}$$

i :  $\frac{\pi}{2}$ rotazione di $\frac{\pi}{2}$ in senso antiorario

Definiamo la curvatura (con segno) di $\mathcal{C}$

(in P, di ascissa curvilinea s)

considieriamo $\underline{r}'' = \underline{t}' = \dfrac{d\underline{t}}{ds}$ ("accelerazione" ($s \equiv$ "tempo" velocità scalare unitaria $\|\underline{t}\| = 1$

si ha $\langle \underline{t}', \underline{t} \rangle = 0$

(infatti da $\langle \underline{t}, \underline{t} \rangle = 1$ i $\langle \underline{t}, \underline{t} \rangle' = 0$

ossia $\langle \underline{t}', \underline{t} \rangle + \langle \underline{t}, \underline{t}' \rangle = 2 \langle \underline{t}', \underline{t} \rangle = 0$)

pertanto $\underline{t}' = k\, \underline{n}$, $k \in \mathbb{R}$

k è detta curvatura (con segno) di $\mathcal{C}$ in P.

in particolare $|k| = \|\underline{r}''\|$

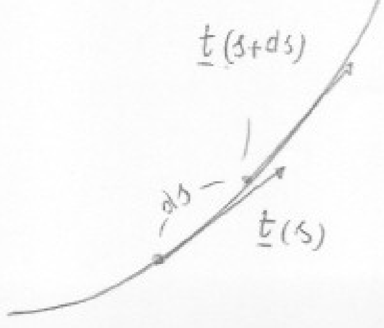
osserviamo ora che da $\underline{t} = e^{i\varphi}\, \underline{i}$, si ha pure

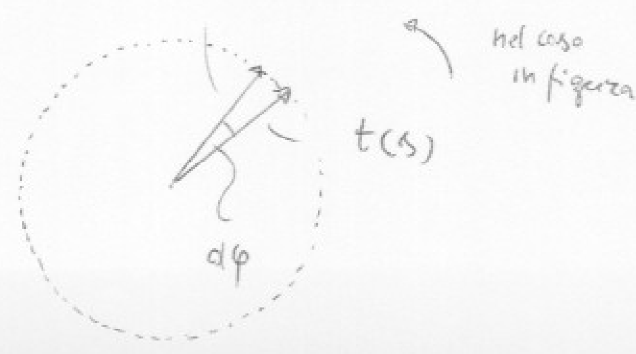
$$\underline{t}' = i\varphi' e^{i\varphi}\, \underline{i} + e^{i\varphi} \underbrace{\underline{i}'}_{\underline{0}} = \varphi' \underbrace{i\, e^{i\varphi(s)}\, \underline{i}}_{\underline{n}}$$

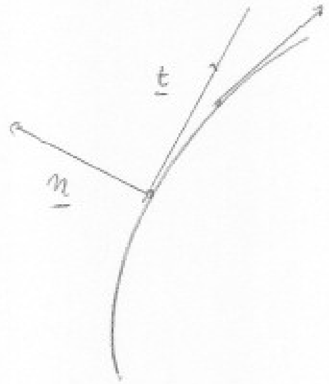
sicché $$k = \frac{d\varphi}{ds} \qquad (k = \varphi')$$

k: "velocità angolare" rispetto a s

di chiara interpretazione geometrica







in questo caso $k < 0$

Casi particolari importanti

☆ rette

$k \equiv 0$

si ha $\underline{t}' = \underline{0} \Rightarrow \underline{t} = \underline{t}_0$, costante (su un intervallo)

$$\underline{r}(s) - \underline{r}(0) = \int_0^s \underline{t}(\xi)\, d\xi = \int_0^s \underline{t}_0\, d\xi =$$

$$= s\,\underline{t}_0$$

ovvero $\underline{r} = \underline{r}(s) = \underbrace{\underline{r}(0)}_{P_0} + s\,\underline{t}_0 \Rightarrow$ retta

passante per $P_0 = \underline{r}(0)$ e direzione $\underline{t}_0$ (o meglio $\langle \underline{t}_0 \rangle$)

s.sp. vettoriale generato da $\underline{t}_0$

Inversamente, per una retta è subito visto che $k \equiv 0$

$$\underline{r}(s) = \underline{a} + s\,\underline{b} \Rightarrow \underline{t}(s) \equiv \underline{b} \Rightarrow \underline{t}'(s) \equiv \underline{0}$$

$\|\underline{b}\| = 1$ (s è automaticamente la lunghezza d'arco)

☆ Circonferenze

$k \equiv k_0 > 0$ costante

da $\varphi' = k_0$ è subito

$$\varphi(s) = \varphi(0) + k_0 \cdot s$$

poniamo per semplicità $\varphi(0) = 0$

$$\Rightarrow \underline{t}(s) = e^{i k_0 s}\,\underline{i} \quad (= \cos(k_0 s)\,\underline{i} + \sin(k_0 s)\,\underline{j})$$

$$\underline{r}(s) = \underline{r}(0) + \int_0^s \underline{t}(\xi)\, d\xi = \underline{r}(0) + \left(\int_0^s e^{i k_0 \xi}\, d\xi\right) \underline{i}$$

$$= \underline{r}(0) + \left.\frac{e^{i k_0 \xi}}{i k_0}\right|_0^s \underline{i}$$

$$= \underbrace{\underline{r}(0)}_{\underline{r}_0 = x_0\underline{i} + y_0\underline{j}} + \frac{e^{i k_0 s} - 1}{i k_0}\,\underline{i}$$

$$\frac{1}{i}\underline{i} = -i\,\underline{i} = -\underline{j}$$

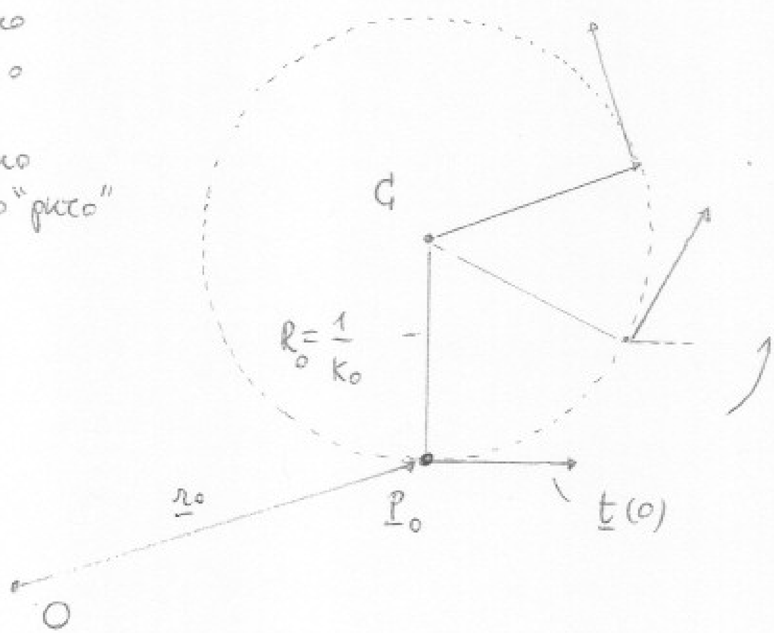
$$i(-\underline{j}) = -i\,\underline{j} = \underline{i}$$

$$= \underbrace{\underline{r}_0 + \frac{1}{k_0}\underline{j}}_{C} + \frac{1}{k_0}e^{i k_0 s}(-\underline{j})$$

$s = 0$

$\underline{t}(0) = \underline{i}$

stesso tipo di calcoli col formalismo vettoriale o col formalismo complesso "puro"



circonferenza di centro C e raggio $R_0 = \frac{1}{k_0}$ (passante per P_0)

viceversa

sia $\underline{r} = \underline{r}_0 + R e^{i\varphi}\underline{i}$

$' = \frac{d}{d\varphi}$ $\quad \underline{r}' = i R e^{i\varphi}\underline{i}$

$\|\underline{r}'\| = R$

$ds = R\,d\varphi$

possiamo porre $s = R\varphi$

$\underline{r} = \underline{r}(s) = \underline{r}_0 + R e^{i\frac{s}{R}}\underline{i}$

$\frac{d\underline{r}}{ds} = R\cdot\frac{i}{R}e^{i\frac{s}{R}}\cdot\underline{i}$

fare una figura...

$$\frac{d\underline{r}}{ds} = i\,e^{i\frac{s}{R}}\,\underline{i}$$

$$\frac{d^2\underline{r}}{ds^2} = (-1)\frac{1}{R}e^{i\frac{s}{R}}\underline{i} = \frac{1}{R}\underbrace{\left(e^{i\frac{s}{R}}\cdot(-\underline{i})\right)}_{\underline{n}}$$

Analogo discorso per $k_0 < 0$ (Cambia l'orientamento...)

<u>Variante</u> ripartiamo da $\underline{t}' = k_0 \underline{n}$ $\qquad k_0 > 0$

$$\underline{n} = i\,\underline{t} \quad \Rightarrow \quad \underline{t}' = i k_0 \underline{t}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{t}(s) = e^{i k_0 s}\, \underline{t}(0) \qquad \underline{t}(0) = \underline{t}_0$$

$$\underline{r}(s) = \underline{r}(0) + \int_0^s [e^{i k_0 \xi}\, \underline{t}(0)]\, d\xi$$

$$= \underline{r}(0) + \frac{e^{i k_0 s} - 1}{i k_0}\, \underline{t}(0) = \text{etc...}$$

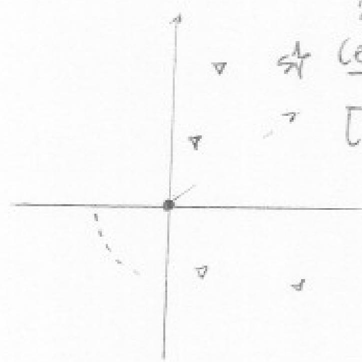
<u>ancora una variante</u>

poniamo $\underline{t} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{n} = \begin{pmatrix} -\eta \\ \xi \end{pmatrix}$ $\qquad \xi^2 + \eta^2 = 1$

si ha: $\begin{cases} \xi' = -k_0 \eta \\ \eta' = +k_0 \xi \end{cases}$ $\qquad \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -k_0 \\ k_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$

$$\xi'' = -k_0 \eta' = -k_0^2 \xi$$

$$\xi'' + k_0^2 \xi = 0$$ ★ <u>oscillatore armonico</u>



☆ Centro

[cf. teoria dei Sistemi dinamici

k_0 vel. angolare

si prosegua...

Cerchio osculatore

Sia dato $P \in \mathcal{C}$, di ascissa curvilinea s (calcolata a partire da un dato pto iniziale)

La circonferenza di raggio $|\rho(s)| = |k(s)|^{-1}$ (se $k \neq 0$)

e di centro $C = \underline{P} + \rho\, \underline{n}$, $\rho = k^{-1}$

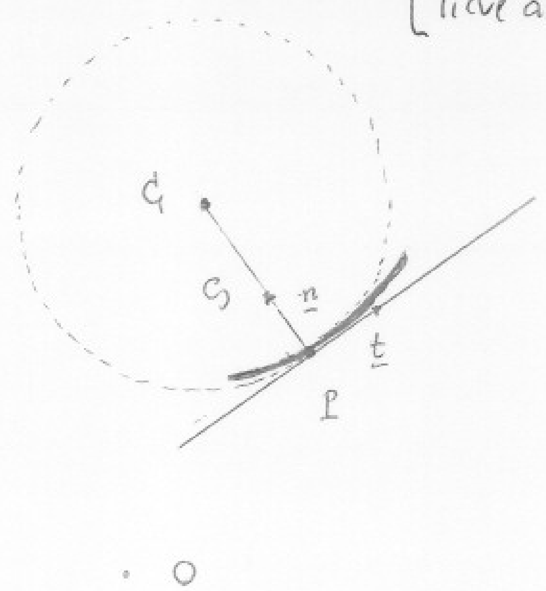
è detta circonferenza osculatrice, o cerchio osculatore

[da osculum = bacio, in latino] alla curva $\mathcal{C}$ in P

C è detto centro di curvatura, ρ raggio di curvatura (in P)

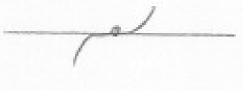
[lieve abuso di linguaggio]

qui $k > 0$



Si noti che in generale il cerchio osculatore attraversa la curva

(contatto tripunto cf $y = x^3$

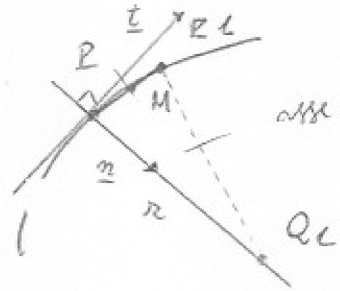


Per una retta $k \equiv 0 \Rightarrow \rho = \infty$

(il cerchio osculatore può pensarsi come la retta stessa)

Per una circonferenza coincide con la circonferenza stessa

☆ Il cerchio osculatore può vedersi come limite dei cerchi tangenti a $\mathcal{C}$ in P e passanti per un altro pto della curva, al tendere di quest'ultimo a P.



Con riferimento alla figura si ha:

$$P - M = \frac{1}{2}(P - P_1)$$

$$Q_1 = P + r\,\underline{n} \qquad \langle Q_1 - M,\ P_1 - P \rangle = 0$$

ma
$$Q_1 - M = \underbrace{Q_1 - P}_{\parallel} + \underbrace{P - M}$$
$$= r\,\underline{n} + \frac{1}{2}(P - P_1) = r\,\underline{n} - \frac{1}{2}(P_1 - P)$$

$$\Rightarrow \langle r\,\underline{n},\ P_1 - P \rangle = \frac{1}{2}\|P_1 - P\|^2 \qquad (*)$$

ma $P_1 - P = \Delta s\,\underline{t} + \frac{\Delta s^2}{2}\underbrace{\frac{\underline{n}}{\rho}}_{\underline{t}'} + o(\Delta s^2)$ Taylor (rispetto all'ascissa curvilinea)

$$\Rightarrow \|P_1 - P\|^2 = \Delta s^2 + \cdots$$

$\Rightarrow$ $(*)$ diventa $\frac{r}{\rho}\frac{\Delta s^2}{2} = \frac{\Delta s^2}{2} + \cdots$

$\Rightarrow$ per $\Delta s \to 0$, $\frac{r}{\rho} \to 1$ $\square$

☆ Formule generali (nel piano)

$$\dot{} = \frac{d}{dt} \qquad {}' = \frac{d}{ds}$$

$$\underset{\underset{\dot{\underline{\alpha}}}{\parallel}}{\dot{\underline{P}}} = v\,\underline{t}$$

velocità (scalare)

$$\frac{d\underline{\alpha}}{dt} = \underbrace{\frac{d\underline{\alpha}}{ds}}_{\underline{t}}\ \underbrace{\frac{ds}{dt}}_{v} \qquad v = \|\dot{\underline{\alpha}}\|$$

$$\|\underline{t}\| = 1$$

$$\underset{\underline{}}{\ddot{\underline{\alpha}}}$$

$$\ddot{\underline{P}} = \dot{v}\,\underline{t} + v\,\dot{\underline{t}}$$

accelerazione

$$= \dot{v}\,\underline{t} + k v^2\,\underline{n}$$

$$= \dot{v}\,\underline{t} + \frac{v^2}{\rho}\,\underline{n}$$

accelerazione tangenziale

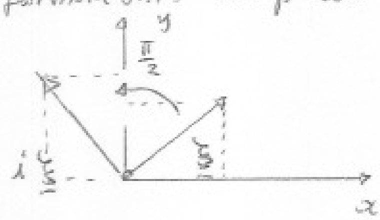
accelerazione centripeta

$$\frac{d\underline{t}}{dt} = \frac{d\underline{t}}{ds}\ \underbrace{\frac{ds}{dt}}_{v}$$

$$= v\,\underline{t}' = v \cdot k\,\underline{n}$$

$$i\,\dot{\underline{P}} = v \cdot i\,\underline{t} = v\,\underline{n}$$

formalismo complesso



$$\begin{pmatrix} -\xi_2 \\ \xi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

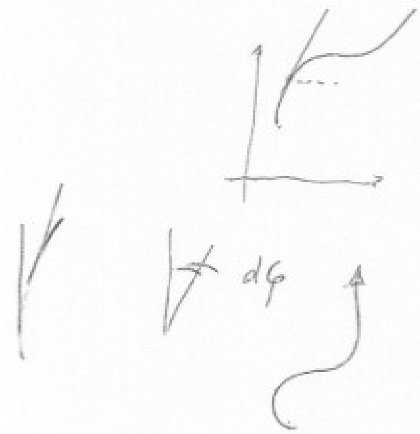
$$\langle i\dot{\underline{P}}, \ddot{\underline{P}} \rangle = \frac{v^3}{\rho} \qquad i\dot{\underline{P}} \sim \begin{pmatrix} -\dot{y} \\ \dot{x} \end{pmatrix} \qquad \ddot{\underline{P}} \sim \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\rho} = k = \frac{\langle i\dot{\underline{P}}, \ddot{\underline{P}} \rangle}{|\dot{\underline{P}}|^3}$$

$$|\dot{\underline{P}}| = \|\dot{\underline{\alpha}}\| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$$

se $y = y(x)$ $\rightsquigarrow$ $\begin{cases} x = x \\ y = y(x) \end{cases}$



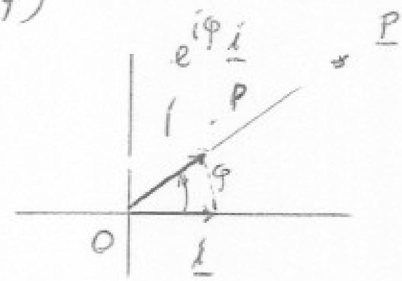
$$k = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

ricavabile anche <u>direttamente</u>:

$$k = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{dx}\,\frac{dx}{ds} = \frac{d \arctan y'(x)}{dx}\,\frac{dx}{ds} =$$

$$= \frac{y''(x)}{1+y'(x)^2} \cdot \frac{1}{(1+y'(x)^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

in <u>coordinate polari</u>: $\rho = \rho(\varphi)$



$$\underline{P} = O + \rho\, e^{i\varphi}\,\underline{i}$$

$$\mathring{\underline{P}} = \mathring{\rho}\, e^{i\varphi}\,\underline{i} + i\rho\, e^{i\varphi}\,\underline{i}$$

$$= e^{i\varphi}\left(\mathring{\rho}\,\underline{i} + \rho\,\underline{j}\right)$$

$$\circ = \frac{d}{d\varphi}$$

$$\overset{\circ\circ}{\underline{P}} = i e^{i\varphi}\left(\mathring{\rho}\,\underline{i} + \rho\,\underline{j}\right) + e^{i\varphi}\left(\overset{\circ\circ}{\rho}\,\underline{i} + \mathring{\rho}\,\underline{j}\right)$$

$$= e^{i\varphi}\left[\mathring{\rho}\,\underline{j} - \rho\,\underline{i} + \overset{\circ\circ}{\rho}\,\underline{i} + \mathring{\rho}\,\underline{j}\right]$$

$$= e^{i\varphi}\left[(\overset{\circ\circ}{\rho} - \rho)\,\underline{i} + 2\mathring{\rho}\,\underline{j}\right]$$

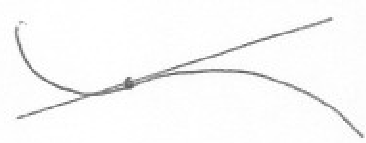
$$|\mathring{\underline{P}}|^2 = \mathring{\rho}^2 + \rho^2 \quad (\text{già visto...})$$

$$\langle i\dot{P}, \ddot{P}\rangle = \langle e^{i\varphi}[\dot{\rho}\,\underline{j} - \rho\,\underline{i}],$$
$$e^{i\varphi}[(\ddot{\rho}-\rho)\,\underline{i} + 2\dot{\rho}\,\underline{j}]\rangle$$

$$= -\rho(\ddot{\rho}-\rho) + 2\dot{\rho}^2 =$$
$$= \rho^2 + 2\dot{\rho}^2 - \rho\ddot{\rho}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\varrho} = k = \frac{\rho^2 + 2\dot{\rho}^2 - \rho\ddot{\rho}}{(\rho^2+\dot{\rho}^2)^{3/2}} \qquad \dot{} = \frac{d}{d\varphi}$$

flessi generalizzati : $k = 0$

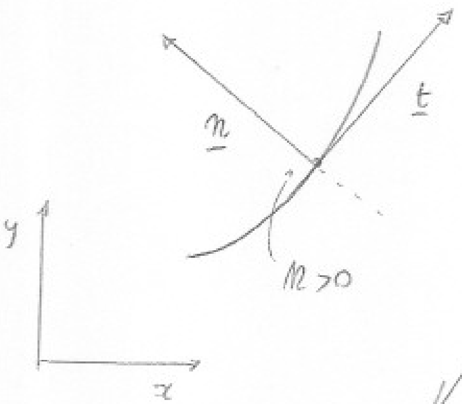


Nota: da $k(x) = \dfrac{y''(x)}{(1+y'^2(x))^{3/2}}$

vediamo come k sia legata alla convessità di $y=y(x)$. In particolare, se x è critico ($y'(x)=0$), il test della derivata seconda è di fatto un calcolo di curvatura.

✧ Ricostruzione di una curva piana a partire dalla sua curvatura (con segno) (parametro: s)

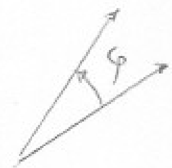
a meno di un movimento rigido



$$(*) \quad \underline{t}' = k\, \underline{n}$$

$(\underline{t}, \underline{n})$ equiorientata con $(\underline{i}, \underline{j})$

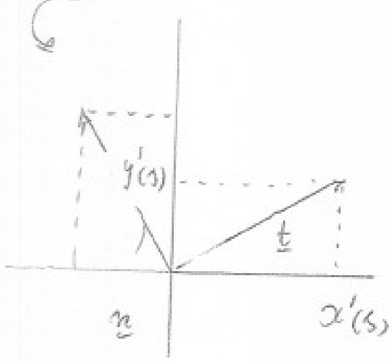
$$k = \frac{d\varphi}{ds} \quad (= \varphi'$$



✧ teorema fondamentale per le curve piane

se $\underline{t} = (x', y')$, $x'^2 + y'^2 = 1$, i.e.

$\underline{n} = (-y', x')$



(*) diviene [disponendo le componenti dei vettori in colonna...]

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\underline{t}' = k\, \underline{n}$$

posto $\underline{\xi} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underline{t}$ i.e.

$\underline{\xi} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \xi' = -k\, \eta \\ \eta' = k\, \xi \end{cases}$$

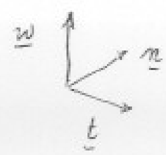
$$\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

✧ velocità angolare

cf. lezione III

e v. anche oltre, formule di Frénet

$$\underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} = k\, \underline{k}$$



Ora: $\underline{t} = (\cos\varphi(s), \sin\varphi(s))$ $\quad (\equiv e^{i\varphi(s)})$

$$\underline{\alpha}(s) = \underline{\alpha}(s_0) + \int_{s_0}^{s} \underline{t}(u)\,du$$; <u>ma da $\varphi' = k$ è</u>

$$\varphi(s) = \varphi_0 + \int_{s_0}^{s} k(u)\,du$$

poniamo, per semplicità, $\varphi_0 = 0$, $\underline{\alpha}(s_0) = \underline{0}$, $s_0 = 0$

[ciò si può ottenere tramite un movimento rigido]

$$\underline{\alpha}(s) = \int_0^s \underline{t}(u)\,du$$

$$\varphi(s) = \int_0^s k(u)\,du$$

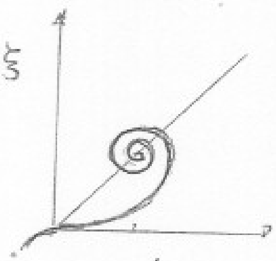
Dunque, la k consente di ricostruire la curva a partire dalla sua curvatura a meno di un movimento rigido in modo esplicito

$\Downarrow$

$$\underline{\alpha}(s) = \left(\int_0^s \cos\left(\int_0^{\xi} k(u)\,du\right) d\xi ,\ \int_0^s \sin\left(\int_0^{\xi} k(u)\,du\right) d\xi \right)$$

$$\equiv \int_0^s \left[e^{i\int_0^{\xi} k(u)\,du} \right] d\xi$$

formalismo complesso



Esempio: $k(s) = s$ $\Rightarrow$ si ottiene la clotoide

(spirale di Cornu) $\quad \varphi(s) = \int_0^s u\,du = \frac{s^2}{2}$

$$\underline{\alpha}(s) = \left(\int_0^s \cos\frac{\xi^2}{2}\,d\xi ,\ \int_0^s \sin\frac{\xi^2}{2}\,d\xi \right) \equiv \int_0^s e^{i\frac{\xi^2}{2}}\,d\xi$$

$$\lim_{s\to+\infty} \alpha(s) = \int_0^{+\infty} e^{i\frac{\xi^2}{2}}\,d\xi$$ esiste, finito (integrali di Fresnel)

; si noti che i due integrali non convergono assolutamente

$$\int_0^{\infty} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(t^2)\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

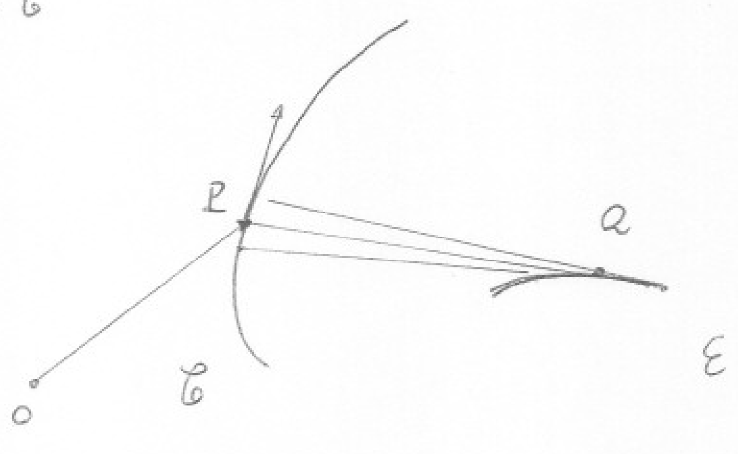
$\downarrow$ si dimostra tramite l'analisi complessa

utile nella progettazione di raccordi stradali, in ottica (teoria della diffrazione)

☆ <u>Evoluta</u> di una curva: luogo dei <u>centri</u> di <u>curvatura</u>
(centri dei <u>cerchi</u> <u>osculatori</u> nei vari pti della curva)

$\mathcal{E}$ evoluta di $\mathcal{C}$

$\mathcal{C}$ <u>evolvente</u> <u>di $\mathcal{E}$</u>



Impieghiamo la notazione "classica": $P = P(t) \equiv \vec{OP}$ etc.

$\dot{} = \frac{d}{dt}$ $\quad {}' = \frac{d}{ds}$ lunghezza d'arco

$$Q = P + \underset{\underset{\kappa^{-1}}{\shortparallel}}{\rho}\, \underline{n}$$

raggio del cerchio osculatore in P
($\equiv$ raggio di <u>curvatura</u>)

$$\left(\underline{\beta} = \underline{\alpha} + \rho\, \underline{n} \right) \quad \kappa \neq 0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \langle \underline{n}, \underline{t} \rangle \equiv 0 \quad \langle \underline{n}'\underline{t} \rangle + \langle \underline{n}, \underline{t}' \rangle = 0 \\ \langle \underline{n}', \underline{t} \rangle = -\kappa \\ \text{ma } \underline{n}' \parallel \underline{t} \\ \text{poiché } \langle \underline{n}', \underline{n}' \rangle = 0 \\ \Rightarrow \underline{n}' = -\kappa\, \underline{t} \end{array}}$$

$$Q' = \frac{dQ}{ds} = P' + \rho' \underline{n} + \rho\, \underline{n}' =$$

$$= \underline{t} + \frac{-\kappa'}{\kappa^2} \underline{n} - \underbrace{\rho\, \kappa}_{\underset{1}{\shortparallel}} \underline{t} = -\frac{\kappa'}{\kappa^2} \underline{n}$$

in definitiva $\qquad (= \rho' \underline{n})$

$$(\diamond) \quad Q' = \rho' \underline{n}$$: la <u>normale</u> in P è <u>tangente</u> ad $\mathcal{E}$ nel <u>pto</u> <u>corrispondente</u> Q

$$d\tilde{s} = |\rho'|\, ds$$

l. d'arco su $\mathcal{E}$

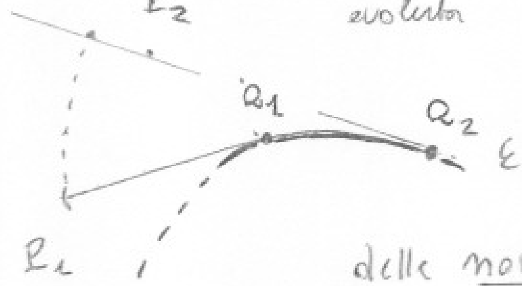
poniamo, per fissare le idee

$$\kappa' < 0 \quad (\rho' > 0)$$

v. figura

$$d\hat{s} = \frac{d\rho}{ds}\, ds$$

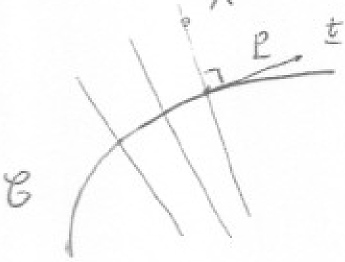
$$\Rightarrow \boxed{\underset{\text{arco di evoluta}}{\ell(Q_1,Q_2)} = \rho_2 - \rho_1}$$ ★ (di immediata interpretazione...,



$\mathcal{E}$ è anche l'inviluppo delle normali di $\mathcal{C}$ (cf (✧))

Ciò è chiaro dalla discussione precedente, ma è istruttivo verificarlo secondo i dettami della teoria degli inviluppi

★ Descriviamo la famiglia delle normali a $\mathcal{C}$



$$(*) \quad \langle X - P, \underline{t} \rangle = 0 \rightarrow F(x,y,s) = 0$$

parametro: s

$$\frac{\partial F}{\partial s} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial s}\langle X - P, \underline{t} \rangle = 0$$

$$\overbrace{\langle -\underset{\underset{\underline{t}}{\shortparallel}}{P'}, \underline{t} \rangle}^{-1} + \langle X - P, \underset{\underset{\kappa \underline{n}}{\shortparallel}}{\underline{t}'} \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle X - P, \underline{n} \rangle = \frac{1}{\kappa}$$

$(**)$

Inciso:

famiglia di curve: $F(x,y,C) = 0$

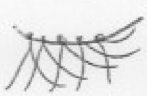
★ inviluppo: curva tangente (cfr. Huygens) in ogni pto ad un membro della famiglia

Si deve imporre $\frac{\partial F}{\partial C} = 0$

(altrimenti (Dini), ho una famiglia di curve di livello

$\Downarrow$ si arriva al C-discriminante $\begin{cases} F = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial C} = 0 \end{cases}$

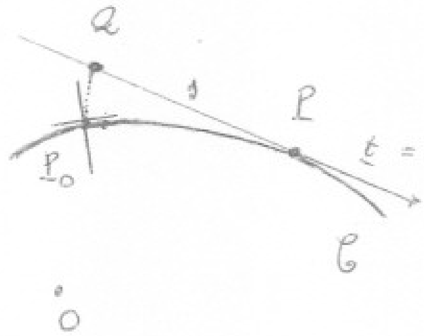
in ogni pto va imposto $\nabla F \neq \underline{0}$

per evitare  : luogo di pti singolari.

(*) e (**) porgono

$$X - P = \frac{1}{k}\, \underline{n} = \rho\, \underline{n} \qquad \text{c.v.d.}$$

☆ Equazione dell'evolvente (involuta) $\mathcal{Q}$ di una curva $\mathcal{C}$ (a partire da $P_0 \in \mathcal{C}$, $\overset{\shortparallel}{s=0}$)



$$' = \frac{d}{ds}$$

$$Q = P + (Q-P)$$
$$= P - s\underline{t}$$
$$= P - sP'$$

$$Q' = P' - P' - sP''$$
$$= -sP'' = -s\cdot k\, \underbrace{iP'}_{\underline{n}}$$

[Q' è $\parallel$ $\underline{n}$, come è giusto che sia ; è anche

$$iQ' = -sk\, i\underline{n}$$
$$= +sk\, \underline{t}$$

[la normale all'evolvente in Q è la tangente in P alla curva originaria]

Esempio : l'evolvente del cerchio

a partire da $P_0 = (1,0)$ $\quad \begin{cases} x = \cos\varphi \\ y = \sin\varphi \end{cases}$

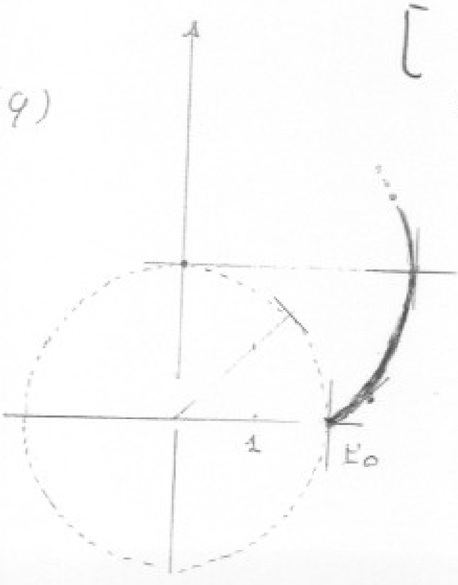
$t: \ s = \varphi$

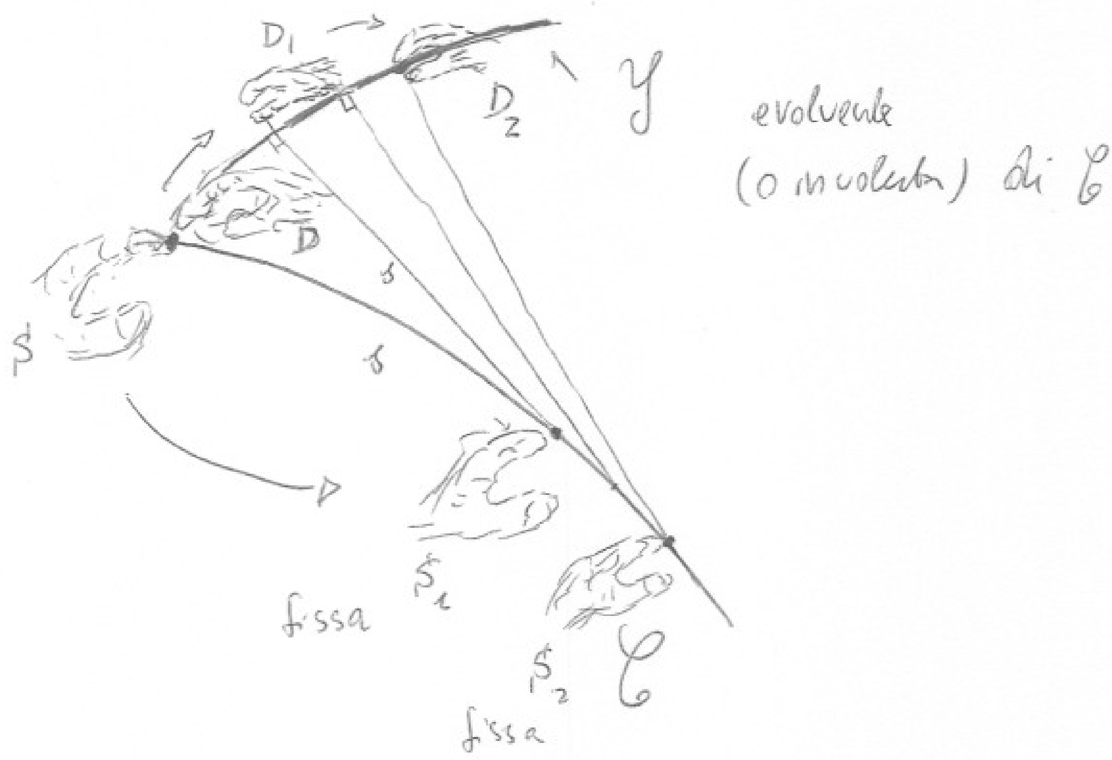
$$\underset{z}{\overset{\shortparallel}{Q}} = \underset{e^{i\varphi} - \varphi\, i e^{i\varphi}}{\overset{\shortparallel}{P}} - s P'$$

formalismo complesso

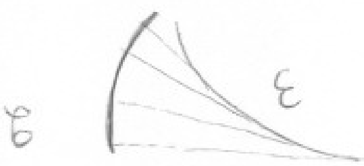
$$= e^{i\varphi}(1 - i\varphi) =$$
$$= (\cos\varphi + i\sin\varphi)(1 - i\varphi)$$
$$= \overbrace{(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi)}^{x} + i\underbrace{(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi)}_{y}$$

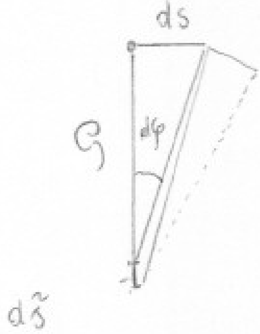
$$\begin{cases} x = \cos\varphi + \varphi\sin\varphi \\ y = \sin\varphi - \varphi\cos\varphi \end{cases}$$




D1
D2
D
γ
evolvente
(o involuta) di 𝒞
s
s
S
S1
fissa
S2
fissa
𝒞

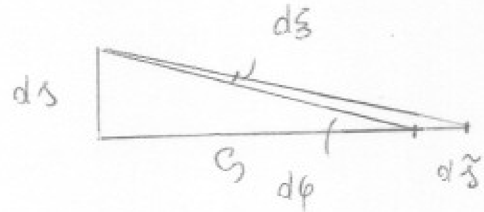
Commento: Si consideri l'evoluta di $\mathcal{C}$





$$\rho = \frac{1}{k}$$

$$k\,ds = k \cdot \rho\, d\varphi = d\varphi$$



$d\xi$: infinitesimo di ordine sup. a $d\tilde{\xi}$ (a sua volta dello stesso ordine di ds e $d\varphi$ se $\rho' \neq 0$...

$$\frac{d\xi}{d\tilde{\xi}} = \frac{\sin(\pi - d\varphi)}{\sqrt{\rho^2 + d\tilde{\xi}^2}} = \frac{\sin d\varphi}{\sqrt{\rho^2 + d\tilde{\xi}^2}} \sim 0$$

segue da pag. V.14

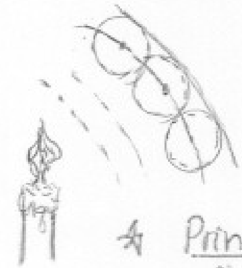
$$\mathcal{F}(x,y,c) = 0$$

$$\mathcal{F}_x^0(x-x_0) + \mathcal{F}_y^0(y-y_0) = 0$$

$\mathcal{F}_c^0 = 0$

retta tangente comune a $\mathcal{F}(x,y,c_0)=0$ e all'inviluppo

* Ancora sugli inviluppi: caustiche di riflessione (e rifrazione) (ex: arcobaleno... si ottengono da un'evoluta con un movimento rigido...



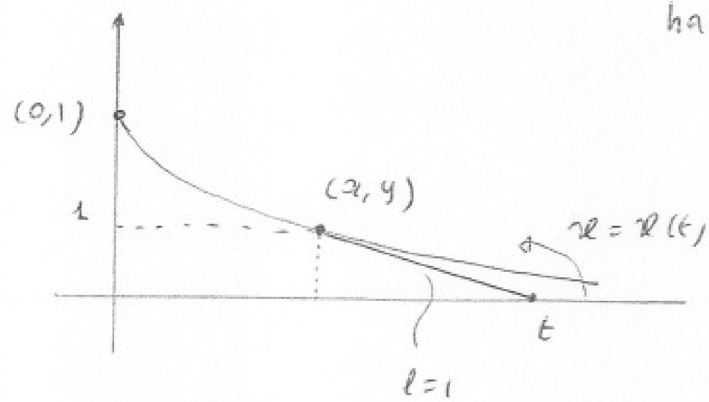
* Principio di Huygens

ogni pto di un fronte d'onda diviene a sua volta sorgente di onde sferiche; l'inviluppo di queste in un istante successivo dà il nuovo fronte d'onda...

◇ La trattrice

"curva dei forzati"

proprietà caratteristica: il segmento di tangente compreso tra la curva e l'asse x ha lunghezza costante $(=1)$



☆ fondamentale per il seguito...

$$x = x(t) = t + \cos\vartheta(t) \qquad t \geq 0$$

$$y = y(t) = \sin\vartheta(t)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - \sin\vartheta\,\dot\vartheta \\ \dot{y} = \cos\vartheta\,\dot\vartheta \end{cases}$$

si ha subito

$$\tan\vartheta(t) = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{\cos\vartheta\,\dot\vartheta}{1 - \sin\vartheta\,\dot\vartheta}$$

e, successivamente

$$\tan\vartheta\,(1 - \sin\vartheta\,\dot\vartheta) - \cos\vartheta\,\dot\vartheta = 0$$

$$\tan\vartheta = (\tan\vartheta\,\sin\vartheta + \cos\vartheta)\,\dot\vartheta \qquad \cos\vartheta \neq 0$$

$$\frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta} = \left(\frac{\sin^2\vartheta}{\cos\vartheta} + \cos\vartheta\right)\dot\vartheta$$

$$\boxed{\sin\vartheta = \dot\vartheta = \frac{d\vartheta}{dt}}$$

$$\int \frac{d\vartheta}{\sin\vartheta} = t$$

poniamo $\quad \xi = \tan\frac{\vartheta}{2} \qquad\qquad \frac{\vartheta}{2} = \arctan\xi$

$\sin\vartheta = \dfrac{2\xi}{1+\xi^2} \qquad\qquad \vartheta = 2\arctan\xi$

$\qquad\qquad\qquad\qquad d\vartheta = 2\,\dfrac{1}{1+\xi^2}\,d\xi$

$$\int \frac{d\vartheta}{\sin\vartheta} = \int \frac{2}{1+\xi^2}\cdot\frac{1+\xi^2}{2\xi}\,d\xi = \int\frac{d\xi}{\xi} = \log|\xi| + c$$

$$t = \log \underbrace{\tan\frac{\vartheta}{2}}_{>0} + c$$

$t=0 \Rightarrow \vartheta = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \frac{\vartheta}{2} = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \log \underbrace{\tan\frac{\pi}{4}}_{1} = 0$

$\Rightarrow c = 0$

$\underline{\alpha} = \underline{\alpha}(\vartheta)$

$\underline{r} = \underline{r}(\vartheta)$

$$\begin{cases} x = x(\vartheta) = \log\tan\frac{\vartheta}{2} + \cos\vartheta \\ y = y(\vartheta) = \sin\vartheta \end{cases}$$

$\frac{\pi}{2} \le \vartheta < \pi$

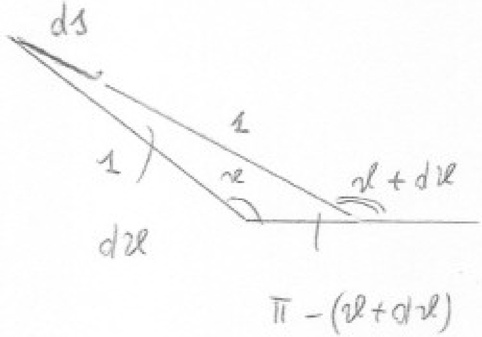
oppure: $\quad e^t = \tan\frac{\vartheta}{2}$

$$\sin\vartheta = 2\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2} = 2\,\frac{e^t}{1+e^{2t}} = \frac{2}{e^t+e^{-t}} = \operatorname{sech} t$$

$$\cos\vartheta = \frac{1-\tan^2\frac{\vartheta}{2}}{1+\tan^2\frac{\vartheta}{2}} = \frac{1-e^{2t}}{1+e^{2t}} = \frac{e^{-t}-e^t}{e^{-t}+e^t} = -\tanh t$$

$\Rightarrow \quad \underline{\beta} = \underline{\beta}(t) \quad (\underline{r} = \underline{r}(t)) \quad \rightsquigarrow \begin{cases} x(t) = t - \tanh t \\ y(t) = \operatorname{sech} t \end{cases}$

Calcoliamo la curvatura della trattrice: il calcolo è standard ... tuttavia procediamo nel modo seguente; "all'antica" consideriamo la figura seguente (cf. la proprietà caratteristica della trattrice



Applichiamo il teorema dei seni al "triangolo infinitesimo"

$$\frac{1}{\sin(\pi - (\vartheta + d\vartheta))} = \frac{1 + ds}{\sin\vartheta}$$

$$\Rightarrow \quad ds = \frac{\sin\vartheta}{\sin(\vartheta + d\vartheta)} - 1 = \frac{\sin\vartheta - \sin(\vartheta + d\vartheta)}{\sin(\vartheta + d\vartheta)}$$

$$\sim \frac{-\cos\vartheta \, d\vartheta}{\sin\vartheta} = -\cot\text{an}\,\vartheta \, d\vartheta$$

[★ integrando otteniamo un'espressione per la lunghezza d'arco]

$$\Rightarrow \quad \kappa = \frac{d\vartheta}{ds} = -\tan\vartheta$$

$$-\int \frac{1}{\tan\vartheta} d\vartheta = -\log|\sin\vartheta| + c$$

$(\sin\vartheta = t \ldots)$

$$\boxed{\kappa = -\tan\vartheta}$$