Programma ufficiale del corso di GEOMETRIA
Universita' degli Studi di Verona
Facolta' di Scienze MM. FF. NN.
Corso di Laurea in Matematica Applicata
Anno accademico 2007-2008
Prof. Mauro Spera
Dipartimento di Informatica

1. Elementi di topologia generale

I. Spazi topologici, insiemi chiusi. Topologia relativa, sottospazi topologici. Funzioni continue, omeomorfismi. Applicazioni aperte.
Spazi metrici e loro topologia. Proprieta' di Hausdorff.
Topologia prodotto. Topologia quoziente. Spazi di identificazione.
Esempi di spazi topologici: R^n, sfere, spazi proiettivi, toro, bottiglia di Klein...
Esempio di spazio localmente euclideo ma non di Hausdorff.
Continuita' negli spazi metrici ed equivalenza
con la definizione generale (con cenno di dimostrazione).
In R^n: punti di accumulazione, chiusura.

II. Spazi topologici compatti. In R^n, un sottoinsieme e' compatto se e solo se e' chiuso e limitato e se e
solo se vale la proprieta' di Bolzano-Weierstrass.
Immagini continue di insiemi compatti sono compatte. La nozione di compattezza e' topologica. Teorema di Weierstrass.
Compattezza negli spazi di Hausdorff: sottoinsiemi chiusi di spazi
compatti sono compatti. Sottoinsiemi compatti sono chiusi.
X compatto, Y Hausdorff, f:X -> Y continua e iniettiva => f omeomorfismo. Esempi vari (v.lezione II, dispense). Cenno alla curva di Peano.

III. Connessione. Connessione per archi, locale connessione
per archi. Immagini continue di connessi sono connesse.
Le nozioni di connessione sono topologiche.
Caratterizzazione degli intervalli come gli unici sottoinsiemi connessi della retta reale (dim: I intervallo => I connesso).
La chiusura di un insieme connesso e' connessa (senza dim.).
Esempi vari, il pettine ecc.
X connesso per archi => X connesso, il viceversa vale se X e' localmente
connesso per archi (dimostrazione). Esempi vari.
Cenno alla non orientabilita': il nastro di Moebius, il piano proiettivo reale.
Digressione sul gruppo ortogonale speciale SO(3). Teorema di Eulero.
Sottogruppi ad un parametro di SO(3) e loro generatori infinitesimali
(matrici antisimmetriche (i.e. l'"algebra di Lie" di SO(3) (cenni).

2. Geometria differenziale delle curve nel piano e nello spazio

IV. Curve parametriche regolari. Lunghezza d'arco. Curve piane: lunghezza d'arco in coordinate polari. Lunghezza dell'arco ellittico.

V. Curve piane: curvatura (con segno), raggio di curvatura e cerchio osculatore e sua caratterizzazione come limite dei cerchi tangenti alla curva in un punto e passanti per un altro punto della curva. Formula generale per la curvatura, formalismo complesso e formalismo "misto". Ricostruzione di una curva piana a partire dalla sua curvatura a meno di un movimento rigido (teorema fondamentale per le curve piane), formula esplicita.
Esempi: rette, coniche e altre curve classiche (cicloide, trattrice, clotoide ecc.). Evoluta ed evolvente. L'evoluta di una cicloide e' una cicloide. Raggio di curvatura di una cicloide. L'evoluta di una trattrice e' una catenaria.

VI. Curve spaziali: curvatura, biregolarita', triedro principale,
torsione, formule di Fre'net-Se'rret.
Una curva e' piana se e solo se ha torsione nulla.
Teorema fondamentale (curvatura e torsione caratterizzano una curva
biregolare a meno di uno spostamento rigido), con idea della dimostrazione.
Formule generali per la curvatura e la torsione.
Studio locale di una curva (biregolare) tramite il triedro di Fre'net.
Sfera osculatrice (teorema di de Saint Venant, cenno di dimostrazione).
Esempi: cubica gobba, eliche, curve sferiche, finestra di Viviani...

3. Geometria differenziale delle superficie

VII. Richiami di calcolo vettoriale (fine disp. VI).
Superficie parametriche regolari. Prima forma fondamentale (metrica).
Carta di Mercator. Proiezione stereografica (e proprieta' di quest'ultima di
inviare cerchi in cerchi). Metrica sulle superficie di rivoluzione;
la pseudosfera di Beltrami.

VIII. L'applicazione di Gauss e relativo operatore di forma.
Seconda forma fondamentale e sue interpretazioni geometriche (teorema di Meusnier; scostamento dal piano tangente)
curvature principali, linee asintotiche, linee di curvatura e teorema di
Rodrigues. Teorema di Eulero. Indicatrice di Dupin.
Curvatura gaussiana e curvatura media e loro formule di calcolo. La seconda forma fondamentale per le superficie di rivoluzione. Curvature principali e loro significato geometrico (curvatura del meridiano e grannormale).
Curvatura della pseudosfera. Esempi vari (elicoide, catenoide...).

IX. Formule di Weingarten. Il Theorema Egregium e di Codazzi-Mainardi (schema generale della dimostrazione). Formule varie per la curvatura. Derivata

covariante e sua interpretazione geometrica (Levi-Civita). Simboli di Christoffel.
Dimostrazione del Theorema Egregium.
[Teorema fondamentale della teoria delle superficie (cenno).]
Trasporto parallelo e suo significato geometrico. Formula di Levi-Civita. Trasporto parallelo sulla sfera.

X (e XI) Prologo: principio di azione stazionaria ed equazioni di Lagrange, coordinate cicliche e relative grandezze conservate (integrali primi).
Geodetiche e loro proprietà intrinseche ed estrinseche:
curve autoparallele, cammini critici dei funzionali energia e lunghezza
(se si usa l'ascissa curvilinea, in quest'ultimo caso), curve di curvatura geodetica nulla (def. di curvatura geodetica e suo significato geometrico, con dim.).
Deteminazione delle geodetiche in alcuni esempi: piano euclideo,
sfera, piano iperbolico, superficie di rivoluzione (teorema di Clairaut).
Formula di Gauss per i triangoli geodetici. Applicazione alle geometrie non euclidee: sfera, piano proiettivo (ellittico), piano iperbolico.
Teorema di Gauss-Bonnet.

Cenni su: applicazione esponenziale, coordinate normali e polari,
cerchi geodetici, lemma di Gauss e caratterizzazioni intrinseche della curvatura (formula di Bertrand e Puiseux), teorema di Minding.

XII. Esempi, esercizi e complementi vari, tecniche di calcolo:
quadriche, superficie sviluppabili, rigate, superficie minime e loro caratterizzazione variazionale (elicoide, catenoide...).

Gli argomenti si intendono corredati delle relative dimostrazioni
(o idee di queste), salvo avviso contrario.
Il programma del corso e' interamente contenuto (come sottoinsieme
proprio!) nelle dispense del docente (I-XII), scaricabili dalla pagina
ufficiale del corso.
Una copia cartacea sara' in futuro disponibile in biblioteca.

Alcuni riferimenti bibliografici
(disponibili presso la Biblioteca "Bruno Forte", Ca' Vignal 2)

M.ABATE, F.TOVENA Curve e superfici, Springer, Milano, 2006.

C.DE FABRITIIS, C.PETRONIO Esercizi svolti e complementi di geometria
e topologia Bollati-Boringhieri, Torino, 1997.

M.DO CARMO Differential Geometry of Curves and Surfaces,
Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.

J.GALLIER Geometric Methods and Applications for Computer Science and
Engineering, Springer, Berlin, 2000.

A.GRAY, E.ABBENA, S.SALAMON Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica, CRC Press, Boca Raton, 2006.

D.HILBERT, S.COHN-VOSSEN Geometria intuitiva, Boringhieri, Torino, 1972.

M.LIPSCHUTZ Geometria differenziale Schaum, Etas Libri, 1984.

S.LIPSCHUTZ General Topology, Schaum, 1965

D.MARSH Applied Geometry for Computer Graphics and CAD,
Springer, London, 2005.

A.PRESSLEY Elementary Differential Geometry, UTM Springer, New York, 2000.

E.SERNESI Geometria 2 Bollati Boringhieri, Torino, 1994.

Mauro Spera