Schema di prova scritta per il corso di Matematica di Base 2004–2005

(1) Che cosa significa dire che una formula è valida?

(2) Mostrare che esistono classi che non sono insiemi indicandone una e giustificando perché non può essere un insieme.

(3) Perché l'insieme dei sottoinsiemi di un insieme infinito X non è equinumeroso all'insieme X dato?

(4) Sia X l'insieme di coppie ordinate

$$X = \{\, (m, n) : m \text{ e } n \text{ sono numeri naturali maggiori di } 0 \,\}.$$

Si consideri la seguente relazione binaria su X:

$$R = \{\, \big((r, s), (u, v)\big) : r \cdot s < u \cdot v, \text{ oppure } r \cdot s = u \cdot v \text{ e } s < v \,\}.$$

Dire se si tratta di una relazione di tipo noto, motivando la risposta. Quanti sono gli elementi (x, y) di X tali che $\big((x, y), (6, 1)\big)$?

(5) Mostrare che l'insieme

$$R = \{(f, e), (f, d), (f, c), (f, b), (f, a), (e, c), (e, b), (e, a), (d, c), (d, b), (d, a), (c, b), (c, a)\}$$

è una relazione d'ordine stretto su $\{a, b, c, d, e, f\}$. Determinare inoltre se ci sono e quali sono i maggioranti, i minoranti, i massimali, i minimali, il massimo, il minimo, l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme $\{e, d\}$.

(6) Dato l'insieme di coppie ordinate

$$\begin{aligned} g = &\{(x^2, 1 - x) : x \in \mathbf{N} \text{ e } x^4 < 14\} \cup \\ &\cup \{(x, 1) : x \in \mathbf{N} \text{ e } 3 < x \leq 5\} \cup \\ &\cup \{(x, x - 4) : x \in \mathbf{N} \text{ e } 5 \leq x\} \cup \{(2, 5)\} \end{aligned}$$

motivare perché g è una funzione da $\mathbf{N}$ in $\mathbf{N}$ (dove $\mathbf{N}$ indica l'insieme dei numeri naturali), precisando se è totale, iniettiva, suriettiva o biiettiva, giustificando le risposte.
Data poi la funzione $f = \{(2, 1), (0, 3), (5, 5)\}$, scrivere quali sono le funzioni $h = f(g)$ e $k = g(f)$. Di ciascuna delle funzioni h e k precisare insieme di definizione e insieme immagina e se sono iniettive.

(7) In un linguaggio in cui il solo simbolo non logico è il simbolo di relazione unario P, si scriva un enunciato che sia vero in una struttura se e solo se in quella struttura il simbolo di relazione è interpretato in una relazione unaria R (cioè un sottoinsieme dell'universo) così fatta: ci sono almeno tre elementi fra loro diversi che non appartengono a R, e ogni altro elemento appartiene a R.

(8) Si consideri la struttura

$$\mathfrak{N} = (\mathbf{N}, \{\equiv, \prec\}, \{\oplus, \otimes\}, \{\mathit{0}, \mathit{1}\}),$$

dove $\mathbf{N}$ rappresenta l'insieme dei numeri naturali; $\equiv$ la relazione binaria di essere lo stesso numero, $\prec$ l'usuale relazione d'ordine tra numeri naturali; $\oplus$ l'addizione e $\otimes$ la moltiplicazione tra numeri naturali; $\mathit{0}$ e $\mathit{1}$ i numeri naturali zero e uno.
Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio adeguato alla struttura $\mathfrak{N}$ i cui simboli propri siano $=$, $<$, $+$, $\times$, 0, 1 (con le interpretazioni date nell'ordine come sopra).
Si scriva nel linguaggio $\mathcal{L}$ una formula $\varphi(v_0, v_1)$ con le due variabili libere v_0 e v_1 tale che $\mathfrak{N} \models \varphi(v_0, v_1)[a, b]$ se e solo se a e b sono maggiori di zero e la somma di a e b è un multiplo di quattro.

(9) Dire quali sono le strutture in cui è vero l'enunciato

$$\exists v_0 \exists v_1 \exists v_2 \exists v_3 \exists v_4 (\neg(v_1 = v_3) \lor \neg(v_0 = v_2)).$$

(10) Si dimostri per induzione che, per ogni numero naturale n, se $n > 6$ allora $3^n < n!$
Si diano per note le proprietà di addizione e moltiplicazione; $n!$ è definito induttivamente da

$$0! = 1, \qquad (\mathrm{succ}(n))! = n! \times (\mathrm{succ}(n)).$$