Correzione appello di Algebra Lineare 11/12/06

T1)

Teorema. Sia $f : V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali e sia V finitamente generato. Allora $Im(f)$ è finitamente generato e

$$\dim V = \dim N(f) + \dim Im(f)$$

(1) Affermare che f è iniettiva equivale a dire che $\dim N(f) = 0$, per cui dal teorema nullità+rango $\dim V = \dim Im(f)$, e quindi, poiché $Im(f) \subseteq V$, si conclude che $Im(f) = V$, cioè f è suriettiva.
Viceversa se f è suriettiva, $V = Im(f)$, quindi $\dim V = \dim Im(f)$ e quindi $\dim N(f) = 0$, cioè f è iniettiva.

(2) Se f è iniettiva allora $\dim N(f) = 0$, cioè, per il teorema nullità+rango $\dim V = \dim Im(f) \neq \dim W$, quindi f non è suriettiva.

T2)

Definizione. Sia $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$.
(1) Uno scalare $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che esista $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ per cui $\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}$ si dice *autovalore* della matrice $\mathbf{A}$.
(2) Se $\lambda \in \mathbb{C}$ è un autovalore di $\mathbf{A}$, ogni vettore $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ per cui si ha $\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}$ si dice *autovettore di* $\mathbf{A}$ *relativo* a λ.

Per la dimostrazione, in cui si procede per induzione sul numero di autovettori relativi a autovalori distinti, si veda il testo (Teorema 4.3 e Corollario 4.4, pag. 202).

E1)

Consideriamo la matrice A_α,

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & \alpha-2 & 2-\alpha & 1 & 0 \\ 2-\alpha & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & \alpha-2 & 0 & 1 & 0 \\ 2-\alpha & 1 & 0 & 2-\alpha & -1 \end{pmatrix}$$

Se $\alpha \neq \mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{3}$ possiamo considerare la decomposizione LU di A_α senza effettuare scambi di righe:

$$A_\alpha \longrightarrow U_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2-\alpha & \alpha-2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & (\alpha-1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -(\alpha-3)^{-1} \end{pmatrix}$$

in cui $U_\alpha = L_\alpha^{-1} A_\alpha$ e

$$\begin{aligned} L_\alpha^{-1} = & E_{44}((\alpha-3)^{-1}) \, E_{43}(-1) \, E_{33}((\alpha-2)^{-1}) \, E_{42}((\alpha-2)^2-1) \\ & E_{22}((\alpha-1)^{-1}(3-\alpha)^{-1}) \, E_{41}(\alpha-2) \, E_{31}(1) \, E_{21}(\alpha-2) \, E_{11}(-1) \end{aligned}$$

Da cui

$$L = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2-\alpha & (\alpha-1)(3-\alpha)) & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \alpha-2 & 0 \\ 2-\alpha & -(\alpha-2)^2+1 & 1 & \alpha-3 \end{pmatrix}$$

Notiamo, inoltre che il $\mathrm{rk} A_\alpha = 4$ e una base per $Col(A_\alpha)$ è dato dalle prime 4 colonne di A_α.

Lo spazio nullo di A_α ha dimensione 1, e una base si ottiene risolvendo il sistema lineare omogeneo associato alla matrice U_α, che ammette infinite soluzioni dipendenti da un parametro (x_5).
Pensando alla matrice A_α come ad una matrice completa associata ad un sistema lineare si ha che tale sistema ammette un'unica soluzione.

Per $\alpha = 1, 2, 3$ invece, si debbono effettuare degli scambi di riga, dobbiamo quindi determinare delle decomposizioni $P^T LU$ di A_α, $\alpha = 1, 2, 3$.

Caso $\alpha = 1$.

Per $\alpha = 1$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Scambiamo la seconda riga con la quarta:

$$A_1 \xrightarrow{E_{42}} P_1 A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ora applichiamo la decomposizione LU a $P_1 A_1$

$$P_1 A_1 \longrightarrow U_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$A_1 = P_1^T L_1 U_1$$

in cui

$$L_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

e $P_1 = E_{42}$. Notiamo che $rk\, A_1 = 4$ e una base per $Col(A_1)$ è data dalla prima e la terza, la quarta e la quinta colonna di A_1.
Lo spazio nullo di A_1 ha dimensione 1, e una base si ottiene risolvendo il sistema lineare omogeneo associato alla matrice U_1, che ammette infinite soluzioni dipendenti da un parametro (x_2).
Pensando alla matrice A_1 come ad una matrice completa associata ad un sistema lineare, si ha che tale sistema non ammette soluzioni in quanto la colonna dei termini noti è dominante.

Caso $\alpha = 2$.

Per $\alpha = 2$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Scambiamo la terza con la quarta riga

$$A_2 \xrightarrow{E_{34}} P_2A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ora applichiamo la decomposizione LU a P_2A_2

$$P_2A_2 \longrightarrow U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$A_2 = P_2^T L_2U_2$$

dove

$$L_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e $P_2 = E_{34}$.
Notiamo che $rk\, A_2 = 3$, quindi una base per $Col(A_2)$ è data dalle prime tre colonne di U_2.
Lo spazio nullo di A_2 ha dimensione 2, e una base si ottiene risolvendo il sistema lineare omogeneo associato alla matrice U_2, che ammette infinite soluzioni dipendenti da due parametri (x_2 e x_5).
In questo caso pensando alla matrice A_2 come ad una matrice completa associata ad un sistema lineare si ha che tale sistema ammette infinite soluzioni dipendenti da un parametro.

Caso $\alpha = 3$.

Per $\alpha = 3$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Scambiamo la seconda riga con la quarta:

$$A_3 \xrightarrow{E_{42}} P_3A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ora applichiamo la decomposizione LU a P_3A_3

$$P_3A_3 \longrightarrow U_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$A_3 = P_3^T L_3U_3$$

$$L_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e $P_3 = E_{24}$.

Notiamo che $rk\, A_3 = 3$, e una base per $Col(A_3)$ è data dalla prima, la terza e la quarta colonna di A_3.
Lo spazio nullo di A_3 ha dimensione 2, e una base si ottiene risolvendo il sistema lineare omogeneo associato alla matrice U_3, che ammette infinite soluzioni dipendenti da due parametri (x_2 e x_5).
Pensando alla matrice A_3 come ad una matrice completa associata ad un sistema lineare, si ha che tale sistema ammette infinite soluzioni dipendenti da un parametro.

E2)

Consideriamo la matrice C_U che ha per colonne i generatori del sottospazio vettoriale U. Applichiamo l'eliminazione di Gauss (EG) a C_U per determinare la dimensione di U.

$$C_U \xrightarrow{EG} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si nota che la quarta colonna è non dominante, quindi il vettore $\mathbf{v}_4$ è linearmente dipendente dagli altri tre (in effetti era semplice notare che $\mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_3$).
Applichiamo ora l'algoritmo di Gram-Schmidt (GS) ai vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$. Poniamo $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$, quindi:

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_2)}{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)}\,\mathbf{u}_1 = \frac{1}{7}(4 \quad 3 \quad -1 \quad -3)^t$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_3)}{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)}\,\mathbf{u}_1 - \frac{(\mathbf{u}_2|\mathbf{v}_3)}{(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2)}\,\mathbf{u}_2 = \frac{1}{5}(1 \quad 2 \quad 1 \quad 3)^t$$

Completiamo ora la base $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ ad una base ortonormale di $\mathbb{C}^4$. Ricordiamo che $\mathbb{C}^4 = Col(A) \oplus N(A^H)$, in cui A è la matrice che ha per colonne i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$. Inoltre sappiamo che $N(A^H)$ è il complemento ortogonale di $Col(A)$. Sia ha che $N(A^H) =< \mathbf{w} = (1, -1, 1, 0)^t >$. Quindi $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{w}$ formano una base ortogonale di $\mathbb{C}^4$.
Calcoliamo ora la proiezione $P_U(\mathbf{v})$ di $\mathbf{v}$ su U.

$$P_U(\mathbf{v}) = \frac{(\mathbf{u}_1|\mathbf{v})}{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)}\mathbf{u}_1 + \frac{(\mathbf{u}_2|\mathbf{v})}{(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2)}\mathbf{u}_2 + \frac{(\mathbf{u}_3|\mathbf{v})}{(\mathbf{u}_3|\mathbf{u}_3)}\mathbf{u}_3 = \frac{1}{3}(-2+i \quad -1+2i \quad 1+i \quad 0)^t$$

E3)

Il polinomio caratteristico della matrice B_β è

$$p_{B_\beta}(x) = x^2\,(x-4)\,(x-2\beta)$$

Basta sviluppare il determinate della matrice $B_\beta - x\,\mathrm{Id}_{4\times 4}$, ad esempio, rispetto alla quarta riga ottenendo, $-4\,[(\beta-x)^2 - \beta^2] + (2-x)\,(2-x)\,[(\beta-x)^2 - \beta^2]$ e poi raccogliendo il fattore $(\beta-x)^2 - \beta^2$.

Caso $\beta \neq 0, 2$.

Per $\beta \neq 0, 2$, B_β è diagonalizzabile se e solo se $m_a(0) = m_g(0) = 2$. Calcoliamo la molteplicità geometrica dell'autovalore 0. $m_g(0) = \dim(N(B_\beta - 0\,\mathrm{Id}_{4\times 4})) = 4 - rk(B_\beta - 0\,\mathrm{Id}_{4\times 4}))$.
Si verifica che il rango della matrice B_β è sempre 2, indipendentemente da β.
Quindi $\dim(N(B_\beta - 0Id_{4\times 4})) = \dim(N(B_\beta)) = 2$ e perciò $m_g(0) = 2 = m_a(0)$ e B_β è diagonalizzabile.

Caso $\beta = 0$.

Da quanto detto in precedenza si ha che B_0 non è diagonalizzabile, infatti lo sarebbe se e solo se $m_a(0) = m_g(0)$. Però $m_a(0) = 3$, mentre $m_g(0) = \dim(N(B_0 - 0\,\mathrm{Id}_{4\times 4})) = 4 - rk(B_0) = 2$, poichè il rango di B_β è 2 per ogni β.

Caso $\beta = 2$.
Per $\beta = 2$, da quanto detto in precedenza si ha che B_2 è diagonalizzabile se e solo se $m_a(4) = m_g(4)$. Ora, $m_a(4) = 2$; calcoliamo allora $m_g(2) = 4 - rk(B_2 - 4\,\mathrm{Id}_{4\times 4})$. Il rango della matrice $B_2 - 4\,\mathrm{Id}_{4\times 4}$ è 2, quindi $m_g(4) = 2 = m_a(4)$ e quindi B_2 è diagonalizzabile.

Determiniamo una base di $\mathbb{C}^4$ composta da autovettori nel caso in cui $\beta = 1$. Determiniamo l'autovettore $\mathbf{v}_4$ relativo all'autovalore 4. Dobbiamo cioè determinare un generatore di $N(B_1 - 4\,\mathrm{Id}_{4\times 4})$. Si ha che $\mathbf{v}_4 = (0, 0, 2, 1)^t$. Analogamente per l'autovalore 2, $\mathbf{v}_2 = (1 \quad 1 \quad 0 \quad 0)^t$. L'autospazio relativo all'autovalore 0 ha dimensione due, quindi avremo due generatori di tale autospazio, che si ottengo scrivfendo un insieme di generatori di $N(B_1)$. Essi sono $\mathbf{v}_{0,1} = (0 \quad 0 \quad -2 \quad 1)^t$ e $\mathbf{v}_{0,2} = (-1 \quad 1 \quad 0 \quad 0)^t$. Quindi $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_{0,1}, \mathbf{v}_{0,2}\}$ formano una base di autovettori per $\mathbb{C}^4$.

Scriviamo la matrice del cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica $\mathcal{E}$, $\mathcal{M}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}$ e la sua inversa $\mathcal{M}^{-1}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}$.

$$\mathcal{M}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}^{-1}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Di conseguenza la matrice associata all'applicazione f con la base canonica su dominio e codominio è $A_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}} = \mathcal{M}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}\, B_1\, \mathcal{M}^{-1}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}$, cioè

$$A_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 1 \\ 5 & -3 & -\frac{3}{2} & -1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Correzione del compito di Algebra Lineare ed elementi di Geometria del 21 Marzo 2007

T1) Si diano le definizioni di rango e di inversa destra e sinistra di una matrice. Si enunci e si dimostri una condizione necessaria e sufficiente affinché una matrice $\mathbf{A}$ di forma $m \times n$ abbia inversa sinistra.

T2) Si diano le definizioni di autovalore e autovettore per una matrice e si giustifichi il fatto che gli autovalori sono le radici del polinomio caratteristico.

Si dimostri che, se λ_1, λ_2, λ_3 sono autovalori distinti di una matrice $\mathbf{A}$ con autovettori rispettivamente $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, allora l'insieme $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$ è linearmente indipendente.

E1) Sia $\alpha \in \mathbf{C}$ e si consideri la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} i & 0 & -2i & i \\ \alpha & \alpha & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & -\alpha & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se ne calcoli una decomposizione LU e, per i valori di α per i quali non è possibile, una decomposizione $P^T LU$. Si calcolino anche basi dello spazio delle colonne e dello spazio nullo di $\mathbf{A}_\alpha$, per ogni $\alpha \in \mathbf{C}$.

Interpretando la matrice come matrice completa di un sistema lineare, per quali valori di α esso ha soluzione?

Sol.
Sia $\alpha \neq 0, 1$, allora

$$\mathbf{A}_\alpha = \mathbf{L}_\alpha \, \mathbf{U}_\alpha$$

in cui

$$\mathbf{L}_\alpha = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 & 0 \\ 2 & -1 & \frac{\alpha-1}{\alpha} & 0 \\ 0 & -\alpha & -2+2\alpha & \alpha \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{U}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2\alpha-1}{\alpha} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\alpha}{1-\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se $\alpha = 0$ scambiamo la seconda con la terza riga e poi procediamo con la riduzione LU, da cui $\mathbf{A}_0 = P^T \mathbf{L}_0 \, \mathbf{U}_0$ in cui

$$P^T = E_{23}$$

$$\mathbf{L}_0 = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{U}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se $\alpha = 1$ non occorre effettuare scambi di righe: $\mathbf{A}_1 = \mathbf{L}_1 \, \mathbf{U}_1$ in cui

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{U}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se $\alpha \neq 0, 1$ allora la matrice $\mathbf{A}_\alpha$ ha rango 4, quindi lo spazio nullo di $\mathbf{A}_\alpha$ è costituito dal solo vettore nullo e una base per lo spazio delle colonne è data dalle quattro colonne di $\mathbf{A}_\alpha$.

Se $\alpha = 0$, allora

$$Col(\mathbf{A}_0) =< (i \quad 0 \quad 2 \quad 0)^t,\ (0 \quad 0 \quad -1 \quad 0)^t,\ (-2i \quad -1 \quad -5 \quad -1)^t >$$

$$N(\mathbf{A}_0) =< (-1 \quad 0 \quad 0 \quad 1)^t >$$

Se $\alpha = 1$ allora

$$Col(\mathbf{A}_1) =< (i \quad 0 \quad 2 \quad 0)^t,\ (0 \quad 0 \quad -1 \quad 0)^t,\ (i \quad 0 \quad 2 \quad 0)^t >$$

$$N(\mathbf{A}_{-1}) =< (2 \quad -1 \quad 1 \quad 0)^t >$$

Se interpretiamo la matrice $\mathbf{A}_\alpha$ come matrice completa di un sistema lineare, questo ammette soluzione solamente per $\alpha = 0, 1$, cioè quando la colonna dei termini noti non è dominante.

E2) Sia $f\colon \mathbf{C}^4 \to \mathbf{C}^4$ una trasformazione lineare e si supponga che la matrice associata a f rispetto alla base ordinata $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_4; \mathbf{e}_3; \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3\}$ su dominio e codominio ($\mathbf{e}_i$ sono i vettori della base canonica di $\mathbf{C}^4$) sia

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Si determini la matrice $\mathbf{B}$ associata a f rispetto alle basi canoniche.
(b) Si calcoli la dimensione dell'immagine di f.
(c) Si dica se la matrice $\mathbf{B}$ è diagonalizzabile.

Sol.
Scriviamo le due matrici del cambiamento di base

$$\mathcal{M}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{M}^{-1}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi la matrice associata a f rispetto alle basi caniche sul dominio e codominio è

$$B_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}} = \mathcal{M}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} A_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}} \mathcal{M}^{-1}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La dimensione dell'immagine di f è data dal rango della matrice $B_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}}$ che è 2.

La matrice $B_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}}$ non è diagnalizzazbile poichè l'autovalore 1 ha molteplicità geometrica e algebrica diverse.
Osserviamo che anche la matrice $A_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}$ non è diagonalizzabile, essendo simile alla matrice $B_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}}$.

E3) Verificare che per nessun valore del parametro $\beta \in \mathbf{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} 0 & \beta & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile. Esiste una base di $\mathbf{C}^4$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_\beta$, per qualche valore di β?

Per $\beta = 1$, si trovi un insieme ortogonale $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$ di autovettori di $\mathbf{B}_1$ e lo si completi a una base ortogonale di $\mathbf{C}^4$.

Sol.
Il polinomio caratteristico di $\mathbf{B}_\beta$ è

$$P_\beta(\lambda) = (\lambda - \beta)(\lambda + \beta)(\lambda - 1)^2$$

• SIa $\beta \neq 1, -1$ e mostriamo che $\mathbf{B}_\beta$ non è diagonalizzabile, mostrando che la molteplicità algebrica dell'autovalore $\lambda = 1$ è diversa dalla molteplicità geometrica. $m_a(1) = 2$, mentre $m_g(1) = 4 - \dim[N(\mathbf{B}_\beta - Id_{4\times 4})] = 1$. Di conseguenza non esiste una base di $\mathbf{C}^4$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_\beta$.
• Se $\beta = 1$, la matrice $\mathbf{B}_1$ non è comunque diagonalizzabile, infatti, l'autovalore 1 ha molteplicità algebrica 3 e geometrica 2.
• Analogamente, se $\beta = -1$, la matrice $\mathbf{B}_1$ non è comunque diagonalizzabile, infatti, l'autovalore 1 ha molteplicità algebrica 3 e geometrica 2.

Poniamo ora $\beta = 1$, ottenendo la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Gli autovettori sono $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \{(-1 \quad 1 \quad 0 \quad 0)^t,\ (1 \quad 1 \quad 0 \quad 0)^t\ (0 \quad 0 \quad -1 \quad 1)^t\}$. Un vettore ortogonale a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ è $\mathbf{v}_4 = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 1)^t$, quindi $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ è una base ortogonale di $\mathbf{C}^4$.

E4) Si consideri la conica di equazione $13x^2 - 10xy + 13y^2 - 36x + 6\alpha y - 36 = 0$. Si calcoli per quali valori di α essa è degenere e si trovino le rette in cui si spezza.

Posto $\alpha = 6$, si determini la natura della conica e se ne calcolino gli eventuali assi, centro, vertici e asintoti.

Sol.
La matrice $\mathbf{D}$ della conica è

$$\mathbf{D}_\alpha = \begin{bmatrix} 13 & -5 & -18 \\ -5 & 13 & 3\alpha \\ -18 & 3\alpha & -36 \end{bmatrix}$$

Il determinante di $\mathbf{D} - \alpha$ è $-117\alpha^2 + 540\alpha - 9396$, che è sempre diverso da zero (il discriminante è negativo), quindi la conica non si spezza in due rette (reali), per alcun valore di α.

Poniamo ora $\alpha = 6$, ottenendo

$$\mathbf{D}_\alpha = \begin{bmatrix} 13 & -5 & -18 \\ -5 & 13 & 18 \\ -18 & 18 & -36 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathbf{D}_{33}$ è

$$\mathbf{D}_\alpha = \begin{bmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 13 \end{bmatrix}$$

ed ha determinante diverso da zero, quindi la conica è a centro, inoltre è positivo e quindi la conica è un'ellisse. Il centro è dato dalla (unica) soluzione del sistema

$$\begin{bmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ -18 \end{bmatrix}$$

Il centro, quindi, ha coordinate $(1, -1)$. Gli assi hanno equazioni paramentriche

$$a_1 = \begin{cases} x = -t + 1 \\ y = t - 1 \end{cases}$$

$$a_1 = \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t - 1 \end{cases}$$

il vertice è dato dall'intersezione dei due assi.