

Dinamica dei sistemi di punti materiali.

Obiettivo: l'estensione delle leggi e dei principi della Dinamica del punto materiale ai sistemi di particelle.

NB: Abbiamo visto che per il punto materiale:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}, \quad d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}_R = \sum_1^k \mathbf{F}_i$$

$$E_k = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2, \quad \Delta E_{k,A,B} = W_{A,B}$$

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p} \quad d\mathbf{L}_O/dt = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F}_R$$

Generalizzazione dei risultati relativi alla dinamica di una particella ai sistemi con un numero finito N di punti in termini delle grandezze dinamiche collettive del sistema di particelle.

Sistema discreto: $S = \{ m_i, i = 1 \dots N \}$

Massa totale di un sistema di particelle $M_S = \sum_1^N m_i$ (S discreto)

Grandezze dinamiche collettive = riferite a tutto S :

$$\mathbf{P}_S = \sum_1^N \mathbf{p}_i = \sum_1^N (m_i \mathbf{v}_i)$$

$$E_{k,S} = \sum_1^N E_{k,i} = \sum_1^N \frac{1}{2}m_i \mathbf{v}_i^2$$

$$\mathbf{L}_{O,S} = \sum_1^N \mathbf{L}_{O,i} = \sum_1^N \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{p}_i$$

Analogamente al caso del punto materiale, cercheremo di dare un senso alle relazioni seguenti:

$$d\mathbf{P}_S/dt = ?$$

$$\Delta E_{k,S} = ?$$

$$d\mathbf{L}_O/dt = ?$$

Quindi, usando le grandezze collettive di cui sopra si otterrà una descrizione del moto del sistema nel suo insieme, piuttosto che del moto delle singole particelle che formano il sistema.

Per capire cosa succede partiamo dall'equazione del moto della particella i-ma di S in un sistema di riferimento inerziale $Oxyz,t$:

Equazione del moto della particella i-ma (legge di Newton):

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i^{(R)} = \mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)} \quad (1)$$

Forza risultante $\mathbf{F}_i^{(R)}$ agente sulla particella i-ma come somma delle forze interne $\mathbf{F}_i^{(I)}$ e delle forze esterne $\mathbf{F}_i^{(E)}$ al sistema S.

Forze esterne e forze interne: $\mathbf{F}_i^{(R)} = \mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)}$,

$$\mathbf{F}_i^{(I)} = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{ij}^{(i)} \quad [\text{N.B.: } \mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji},]$$

$$\mathbf{F}_i^{(E)} = \sum_{k=1}^R \mathbf{F}_{ik}^{(e)} \quad [\text{N.B.: } \mathbf{F}_{ik} = -\mathbf{F}_{ki},]$$

Vale il principio di azione/reazione, per cui per ogni coppia di particelle appartenenti al sistema si avrà $\mathbf{F}_{ij}^{(i)} = -\mathbf{F}_{ji}^{(i)}$.

In generale, l'equazione del moto della singola particella i-ma è un'equazione differenziale che dipende da $(N\mathbf{r}_i + N\mathbf{v}_i + t)$ variabili:

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i^{(R)} = \mathbf{F}_i^{(E)} + \mathbf{F}_i^{(I)} = \mathbf{F}^{(E)}(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i, t) + \mathbf{F}^{(I)}(\mathbf{r}_{ij}, \mathbf{v}_{ij}, t)$$

E quindi per un sistema di N particelle si ottiene un sistema di N equazioni vettoriali di Newton, che danno origine a 3N equazioni scalari di Newton in $6N+1$ incognite $(N\mathbf{r}_i + N\mathbf{v}_i + t)$.

Impossibilità di risolvere sistemi di 3N equazioni di Newton in $6N+1$ incognite $(N\mathbf{r}_i + N\mathbf{v}_i + t)$. Il problema è senza soluzione perché indeterminato.

Cosa si può fare con i sistemi di punti materiali?
Cosa si sa fare con i sistemi di punti materiali?

Cercare di ottenere una descrizione del moto del sistema in termini delle grandezze dinamiche collettive di cui sopra. In tale modo, come già anticipato si otterrà una descrizione del moto del sistema nel suo insieme, piuttosto che delle singole particelle.

E dato che il moto è dovuto all'azione combinata di tutte le forze agenti, la prima grandezza collettiva da definire è sicuramente la risultante di tutte le forze, interne ed esterne, agenti su tutte le particelle del sistema:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(R)} = \sum_{i=1}^N [\mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)}] = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(I)} + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(E)} = \mathbf{F}^{(INT)} + \mathbf{F}^{(EXT)}$$

Calcolo della risultante di tutte le forze, interne ed esterne, agenti sul sistema S, a partire dall'equazione del moto (1):

Infatti da:

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i^{(R)} = \mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)} \quad (1),$$

sommando sulle N-particelle del sistema si ottiene:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i &= \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(R)} = \sum_{i=1}^N [\mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)}] = \\ \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i &= \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(I)} + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(E)} = \mathbf{F}^{(INT)} + \mathbf{F}^{(EXT)} \end{aligned}$$

Ma a causa del principio di azione–reazione ($\mathbf{F}_{ij}^{(i)} = -\mathbf{F}_{ji}^{(i)}$) si avrà che $\mathbf{F}^{(INT)} = 0$ Infatti: $\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(I)} = \sum_{i=1}^N [\sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{ij}] = \sum_{ij}^N \mathbf{F}_{ij} = 0$.

In conclusione sarà:

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}^{(EXT)} \quad (2)$$

Per un sistema di due particelle: $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$ si ha infatti:

$$\sum_{ij}^2 \mathbf{F}_{ij} = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = \mathbf{F}_{12} + (-\mathbf{F}_{12}) = \mathbf{F}_{12} - \mathbf{F}_{12} = \mathbf{0}.$$

Per un sistema di tre particelle: $\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}$ si ha infatti:

$$\sum_{ij (j \neq i)}^3 \mathbf{F}_{ij} = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23} + \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32} = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + (-\mathbf{F}_{12}) + \mathbf{F}_{23} + (-\mathbf{F}_{13}) + (-\mathbf{F}_{23}) = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} - \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{23} - \mathbf{F}_{13} - \mathbf{F}_{23} = \mathbf{0}.$$

E così via per $N = 4, 5, 6, \dots$

In definitiva la risultante di tutte le forze agenti sul sistema:

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^N [\mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)}] = \sum_i \mathbf{F}_i^{(I)} + \sum_i \mathbf{F}_i^{(E)} = \mathbf{F}^{(EXT)} = \mathbf{F}_S^{(R)}$$

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_S^{(R)}$$

La risultante delle forze esterne che agiscono su un sistema di particelle è formalmente identica ($\mathbf{F}_S^{(R)}$) alla risultante di un sistema di forze agenti su una particella, per cui vale la legge di Newton. E' pensabile di trattare il sistema S come una super particella per cui si possa scrivere l'equivalente della II legge della dinamica che abbiamo derivato per il punto materiale ($m\mathbf{a} = \mathbf{F}_R$)?

Per la massa del sistema non c'è problema: $M_S = \sum_{i=1}^N m_i$.

Per l'accelerazione a bisogna fare riferimento all'accelerazione \mathbf{a}_S del sistema data, come vedremo fra un po', dalla media ponderata delle accelerazioni delle singole particelle

Centro di massa di un sistema di particelle.

Definizione e proprietà: Posizione del CM

$$\mathbf{r}_{CM} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i / \sum_{i=1}^N m_i$$

In pratica, per i sistemi discreti: $M_S \mathbf{r}_{CM} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i$.

In termini di componenti cartesiane sarà:

$$x_{CM} = \sum_{i=1}^N m_i x_i / \sum_{i=1}^N m_i$$

$$y_{CM} = \sum_{i=1}^{N_1} m_i y_i / \sum_{i=1}^{N_1} m_i$$

$$z_{CM} = \sum_{i=1}^{N_1} m_i z_i / \sum_{i=1}^{N_1} m_i$$

N.B. Il CM è una proprietà intrinseca del sistema. La sua posizione quindi è indipendente da Oxyz, mentre le sue coordinate dipendono dalla scelta del sistema Oxyz:

Esempio: Caso di due particelle a distanza d l'uno dall'altra:

Sistema O'x' tale che m_1 si trovi in O' e m_2 in $x_2 = 0 + d$

$$x'_{CM} = [m_1 \cdot 0 + m_2 d] / [m_1 + m_2] = m_2 d / [m_1 + m_2]$$

Sistema Ox tale che m_1 si trovi in x_1 e m_2 in $x_2 = x_1 + d$:

$$\begin{aligned} x_{CM} &= [m_1 x_1 + m_2 x_2] / [m_1 + m_2] = \\ &= [m_1 x_1 + m_2 (x_1 + d)] / [m_1 + m_2] = \\ &= x_1 + m_2 d / (m_1 + m_2) = \\ &= x_1 + x'_{CM} \end{aligned}$$

E quindi in notazione vettoriale: $\mathbf{r}_{CM} = \mathbf{r}_{O'} + \mathbf{r}'_{CM}$

Proprietà distributiva del CM:

Caso di due sistemi $S = \{m_i, i = 1 \dots N_1\}$ e $S' = \{m_j, j = 1 \dots N_2\}$

Il centro di massa di due sistemi di particelle $S = \{m_i, i = 1 \dots N_1\}$ e $S' = \{m_j, j = 1 \dots N_2\}$ corrisponde al CM di due particelle aventi massa uguale alle masse totali $M_1 = \sum_{i=1}^{N_1} m_i$ e $M_2 = \sum_{k=1}^{N_2} m_k$ dei due sistemi e poste nel centro di massa di ciascun sistema:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{CM} &= \sum_{i=1}^{N_1+N_2} m_i \mathbf{r}_i / \sum_{i=1}^{N_1+N_2} m_i \\ &= [\sum_{j=1}^{N_1} m_j \mathbf{r}_j + \sum_{k=1}^{N_2} m_k \mathbf{r}_k] / [\sum_{j=1}^{N_1} m_j + \sum_{k=1}^{N_2} m_k] = \\ &= [M_1 \mathbf{r}_{CM,1} + M_2 \mathbf{r}_{CM,2}] / [M_1 + M_2] \end{aligned}$$

Velocità e accelerazione del CM:

$$1) \quad \mathbf{v}_{CM} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i / \sum_{i=1}^N m_i \quad (v_{X,CM} = \sum_i m_i v_{xi} / \sum_i m_i, \text{ etc.})$$

$$2) \quad \mathbf{a}_{CM} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i / \sum_{i=1}^N m_i \quad (a_{X,CM} = \sum_i m_i a_{xi} / \sum_i m_i, \text{ etc.})$$

In alternativa \mathbf{v}_{CM} e \mathbf{a}_{CM} si ottengono da $M \mathbf{r}_{CM} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i$:

$$1') \quad M \mathbf{v}_{CM} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \text{ direttamente da } M d\mathbf{r}_{CM}/dt = \sum_i m_i (d\mathbf{r}_i/dt)$$

$$2') \quad M \mathbf{a}_{CM} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i \text{ direttamente da } M d\mathbf{v}_{CM}/dt = \sum_i m_i (d\mathbf{v}_i/dt)$$

Pertanto quella che abbiamo chiamato l'accelerazione di S \mathbf{a}_S non è altro che la media ponderata \mathbf{a}_{CM} delle accelerazioni \mathbf{a}_i delle singole particelle:

$$\mathbf{a}_{CM} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i / \sum_{i=1}^N m_i$$

E quindi per un Sistema di particelle, dato che $\sum_{i=1}^N m_i = M_S$, si avrà:

$$M \mathbf{a}_{CM} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_S^{(R)} = \mathbf{F}^{(EXT)}$$

La relazione costituisce la I legge cardinale della dinamica dei sistemi di particelle (che sono sistemi discreti di punti materiali).

Essa è formalmente la legge di Newton di una super-particella avente la massa totale M_S del sistema S che si muove con l'accelerazione \mathbf{a}_{CM} del centro di massa del sistema S essendo soggetta all'azione della risultante $\mathbf{F}_S^{(R)}$ delle forze ottenuta sommando tra di loro le sole forze esterne agenti sulle particelle del sistema S di punti materiali.

Centro di massa di sistemi continui.

Definizione di sistema continuo:

$$S = \int_M dm = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV, \text{ essendo } \rho(\mathbf{r}) = dm/dV$$

Massa totale del sistema continuo $M_S = \int_V \rho(r) dV$

Definizione: Vettore posizione del CM di un sistema continuo:

$$\mathbf{r}_{CM} = \int_M \mathbf{r} dm / \int_M dm$$

In pratica: $M_S \mathbf{r}_{CM} = \int_M \mathbf{r} dm$, dove $M_S = \int_M dm$

In termini di densità di massa $\rho(r)$, dato che $dm = \rho(r)dV$, si avrà che il vettore posizione del centro di massa di un sistema continuo:

$$\mathbf{r}_{CM} = \int_V \mathbf{r} \rho(r) dV / \int_V \rho(r) dV$$

Nel caso di un sistema omogeneo, per il, quale $\rho(r) = \rho_0$, si avrà:

$$\mathbf{r}_{CM} = \rho_0 \int_V \mathbf{r} dV / [\rho_0 \int_V dV] = \int_V \mathbf{r} dV / \int_V dV$$

che corrisponde al calcolo del baricentro della figura geometrica.

In conclusione: il CM di un sistema continuo e omogeneo avente forma geometrica regolare coincide con il baricentro della figura.

N.B.: Utilità della proprietà distributiva nel calcolo del CM di un sistema continuo formato da due figure geometriche regolari.

Le componenti cartesiane del vettore \mathbf{r}_{CM} di un sistema continuo:

$$x_{CM} = \int_V x dV / \int_V dV$$

$$y_{CM} = \int_V y dV / \int_V dV$$

$$z_{CM} = \int_V z dV / \int_V dV$$

Calcolo del centro di massa di alcuni sistemi discreti e continui:

Esempi di calcolo: semi–disco, semi–sfera e semi–anello.

$$\text{Semi–disco: } y_{\text{CM}} = 4R/3\pi;$$

$$\text{Semi–sfera: } z_{\text{CM}} = 3R/8;$$

$$\text{Semi–anello: } y_{\text{CM}} = 2R/\pi;$$

$$\text{Guscio semi–sferico: } z_{\text{CM}} = R/3;$$

$$\text{Cono: } z_{\text{CM}} = h/4 \text{ (distanza misurata dalla base).}$$

Precisazione sulla I Legge Cardinale della dinamica dei sistemi:

$$\mathbf{M} \mathbf{a}_{\text{CM}} = \mathbf{F}_S^{(\text{R})}$$

Come si ricavata questa legge?

I passo: Si è partiti dalla legge di Newton

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i^{(\text{R})} = \mathbf{F}_i^{(\text{I})} + \mathbf{F}_i^{(\text{E})} \quad (1),$$

e sommando sulle N-particelle del sistema si è ottenuto:

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(\text{R})} = \sum_{i=1}^N [\mathbf{F}_i^{(\text{I})} + \mathbf{F}_i^{(\text{E})}] = \mathbf{F}_S^{(\text{R})}$$

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(\text{I})} + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(\text{E})} = \mathbf{F}^{(\text{INT})} + \mathbf{F}^{(\text{EXT})} = \mathbf{F}_S^{(\text{R})}$$

II passo: Sfruttando il principio di azione–reazione ($\mathbf{F}^{(i)}_{ij} = -\mathbf{F}^{(i)}_{ji}$) si era visto che $\mathbf{F}^{(\text{INT})} = 0$, per cui $\mathbf{F}_S^{(\text{R})} = \mathbf{F}^{(\text{EXT})}$.

Infatti: $\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(\text{I})} = \sum_{i=1}^N [\sum_{j=1}^N \mathbf{F}^{(i)}_{ij}] = \sum_{ij} \mathbf{F}^{(i)}_{ij} = 0$.

III passo: In conclusione si era arrivati a scrivere:

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}^{(\text{EXT})} \quad (2)$$

D'altra parte, partendo dalla definizione di CM del sistema S, si è ricavato per derivazione successiva l'accelerazione del CM del sistema:

$$\mathbf{a}_{\text{CM}} = \sum_1^N m_i \mathbf{a}_i / \sum_1^N m_i$$

da cui, dato che $M_S = \sum_1^N m_i$, si è ottenuto: $M_S \mathbf{a}_{\text{CM}} = \sum_1^N m_i \mathbf{a}_i$

Infine, ricordando che $\mathbf{F}_S^{(R)} = \mathbf{F}^{(\text{EXT})}$, la (2), diventa:

$$M_S \mathbf{a}_{\text{CM}} = \mathbf{F}_S^{(R)}$$

Applicazioni della I Legge cardinale della dinamica dei sistemi.

In virtù delle proprietà del CM del sistema, la legge $M_S \mathbf{a}_{\text{CM}} = \mathbf{F}_S^{(R)}$ può essere espressa come:

$$d\mathbf{P}_S / dt = \mathbf{F}_S^{(R)}$$

Sistema isolato: (non agiscono forze esterne: $\Rightarrow \mathbf{F}^{(e)}_{ik} = 0$)

$\Rightarrow \mathbf{F}^{(\text{EXT})} = 0$. E dato che $\mathbf{F}^{(\text{INT})} = 0$, si avrà anche $\mathbf{F}_S^{(R)} = 0$, da cui

$$d\mathbf{P}_S / dt = \mathbf{0}$$

e quindi:

$$\mathbf{P}_S = \text{costante}$$

N.B.: La conservazione della quantità di moto di un sistema di particelle isolato è un fatto sperimentale, mai violato in natura.

Conseguenze: Conservazione della quantità di moto di un sistema

$$\mathbf{P}_S = \text{costante} \Rightarrow \mathbf{P}_S = \sum_i \mathbf{p}_i = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = M \mathbf{v}_{\text{CM}} \Rightarrow \mathbf{v}_{\text{CM}} = \text{costante}$$

La conservazione della quantità di moto totale di un sistema isolato (sul quale non agiscono forze esterne) implica che il centro di massa del sistema si muove come una particella libera:

$$M \mathbf{v}_{\text{CM}} = \mathbf{P}_S = \text{costante.}$$

Esempio di conservazione della quantità di moto di un sistema di particelle libero dall'azione di forze esterne:

Sistema astronauta-navicella spaziale che galleggia liberamente nel vuoto si muove di moto rettilineo uniforme con \mathbf{v}_{CM} costante:

$$\mathbf{P}_S = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \text{costante.}$$

$$d\mathbf{p}_1/dt + d\mathbf{p}_2/dt = 0 \quad \Rightarrow \mathbf{F}_{12}^{(i)} = -\mathbf{F}_{21}^{(i)} \quad \Rightarrow \text{Principio A/R}$$

N.B.: Precisazione relativa alla definizione di sistema isolato:

- quando tutte le forze esterne sono nulle (cioè: $\mathbf{F}_{ik} = \mathbf{0}$),
- quando la risultante delle forze esterne agenti sulla singola particella è nulla ($\mathbf{F}_i^{(E)} = \mathbf{0}$), il sistema si comporta come se fosse isolato.

Esempio di sistema che si comportano come se fosse isolato:

- granata appoggiata a un piano orizzontale che esplode e genera una serie di frammenti sparati in varie direzioni;

Caso particolarmente interessante per le applicazioni: quello in cui una componente della quantità di moto totale \mathbf{P}_S si conserva!

Quando le forze esterne non agiscono lungo la direzione x si ha la conservazione della componente $P_{S,x}$ della quantità di moto totale del sistema di punti materiali, quindi si può scrivere:

$$P_{S,x} = Mv_{CM,x} = \text{costante!}$$

In tali casi si ha la conservazione della componente $v_{CM,x}$ della velocità del centro di massa del sistema.

I casi in cui si conserva una sola componente:

- rinculo di un cannone di massa M appoggiato al suolo durante lo sparo in direzione orizzontale di un proiettile di massa m ;

- moto di massa m che si sposta con velocità relativa \mathbf{v}' su un carrello di massa M appoggiato su un piano orizzontale liscio:
 - a) con sistema inizialmente in quiete, i.e. $\mathbf{v}_{CM} = \mathbf{0}$;
 - b) con sistema inizialmente in moto con $\mathbf{v}_{CM} = \mathbf{V}_0$;
- moto di un insetto di massa m che si muove partendo da un'estremità con velocità assoluta \mathbf{v} lungo un'asta di massa M e lunghezza L , appoggiata a un piano orizzontale liscio, con calcolo del tempo impiegato a raggiungere l'altra estremità;
- moto di un corpo di massa m su un cuneo (piano inclinato o profilo circolare) di massa M appoggiato a un piano orizzontale liscio: $(M+m) \mathbf{0} = m \mathbf{v}_x + M \mathbf{V}_x$;
- moto di due corpi di massa m_1 e m_2 appoggiati ai capi di una molla compressa che viene improvvisamente fatta espandere.

Sistema di punti materiali non-isolato: $\mathbf{F}_{ik} \neq 0 \Rightarrow \mathbf{F}_i^{(E)} \neq 0$

$M\mathbf{v}_{CM} = \mathbf{P}_S =$ non è costante, ma varia nel tempo: $\mathbf{P}_S(t)$

Relazione la derivata rispetto al tempo della quantità di moto totale del sistema e la risultante delle forze agenti sulle particelle del sistema.

$$\begin{aligned} d\mathbf{P}_S/dt &= d(\sum_i \mathbf{p}_i)/dt = \sum_i (d\mathbf{p}_i/dt) = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(R)} \\ &= \sum_{i=1}^N [\mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)}] = \mathbf{F}^{(INT)} + \mathbf{F}^{(EXT)} = \mathbf{F}^{(EXT)} \end{aligned}$$

essendo $\mathbf{F}^{(INT)} = 0$ per il principio di azione–reazione.

Quindi: $d\mathbf{P}_S/dt = \sum_i \mathbf{F}_i^{(E)}$

I^a Legge cardinale della dinamica dei sistemi in un sistema di riferimento inerziale $Oxyz,t$ detto anche sistema del laboratorio (sistema L).

Tale legge si può anche scrivere come: $M\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{F}^{(EXT)}$, nota anche come teorema del centro di massa del sistema, dato che dalla (2):

$$\sum_1^N m_i \mathbf{a}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^{(E)} \quad \text{o equivalentemente} \quad \Rightarrow \quad M \mathbf{a}_{CM} = \mathbf{F}^{(EXT)}$$

II^a legge cardinale della dinamica dei sistemi:

Esiste una seconda legge cardinale) della dinamica di sistemi di particelle che correla la derivata del momento della quantità di moto totale del sistema S, rispetto al polo O, origine del sistema di riferimento di laboratorio (sistema L), al momento delle forze esterne riferito al medesimo polo O:

$$d\mathbf{L}_{O,S} / dt = d(\sum_1^N \mathbf{L}_{O,i}) / dt = \sum_1^N \boldsymbol{\tau}_{O,i}^{(E)} = \boldsymbol{\tau}_O^{(EXT)}$$

Si tratta di fatto il teorema del momento della quantità di moto scritto per un sistema di punti materiali che viene impropriamente chiamata Legge di Newton per il moto rotazionale del sistema.

1) Sistema isolato: Analogamente a quanto accade per un punto materiale libero il cui momento della quantità di moto si conserva nel tempo, nel caso di un sistema di particelle solato, cioè non soggetto all'azione di alcuna forza esterna, il momento angolare totale del sistema $\mathbf{L}_{O,S}$ si conserva nel tempo:

$$\mathbf{L}_{O,S} = \text{costante} \Rightarrow \mathbf{L}_{O,S} = \sum_1^N \mathbf{L}_{O,i} = \sum_i \mathbf{r}_i \wedge m_i \mathbf{v}_i = \text{costante!}$$

N.B.: Anche la conservazione del momento della quantità di moto di un sistema di particelle isolato è un fatto sperimentalmente verificato, mai violato in natura.

In tal caso, il teorema del momento angolare dà $d\mathbf{L}_{O,S} / dt = \mathbf{0}$.

$$d\mathbf{L}_{O,S} / dt = \sum_1^N d\mathbf{L}_{O,i} / dt = \sum_i \boldsymbol{\tau}_{O,i} = \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{(R)} = \sum_i \mathbf{r}_i \wedge (\mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)})$$

ma non essendoci forze esterne $\mathbf{F}_{ik} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{F}_i^{(E)} = \mathbf{0}$, si avrà pure:

$$\mathbf{0} = d\mathbf{L}_{O,S} / dt = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{(I)} = \sum_i \boldsymbol{\tau}_{O_i}^{(I)} \quad \Rightarrow \boldsymbol{\tau}_O^{(INT)} = \mathbf{0} \Rightarrow$$

\Rightarrow Sistema isolato: risultante dei momenti delle forze interne = $\mathbf{0}$,

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{(I)} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \wedge \sum_{j(j \neq i)} \mathbf{F}_{ij}^{(I)} = \frac{1}{2} \sum_{i,j(j \neq i)} \mathbf{r}_{ij} \wedge \mathbf{F}_{ij}^{(I)} = \mathbf{0}$$

Verifica della relazione per un sistema di due particelle:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{(I)} &= \sum_{i=1}^2 \mathbf{r}_i \wedge \sum_{j(j \neq i)} \mathbf{F}_{ij}^{(I)} = \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{F}_{21} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \wedge \mathbf{F}_{12} \\ &= \mathbf{r}_{12} \wedge \mathbf{F}_{12} = \frac{1}{2} [\mathbf{r}_{12} \wedge \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_{21} \wedge \mathbf{F}_{21}] = \frac{1}{2} \sum_{i,j(j \neq i)} \mathbf{r}_{ij} \wedge \mathbf{F}_{ij}^{(I)} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

mentre, per un sistema di tre particelle si avrà:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{(I)} &= \sum_{i=1}^3 \mathbf{r}_i \wedge \sum_{j(j \neq i)} \mathbf{F}_{ij}^{(I)} = \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{F}_{13} + \mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{F}_{21} + \\ &+ \mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{F}_{23} + \mathbf{r}_3 \wedge \mathbf{F}_{31} + \mathbf{r}_3 \wedge \mathbf{F}_{32} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \wedge \mathbf{F}_{12} + (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) \wedge \mathbf{F}_{13} + (\mathbf{r}_2 - \\ &+ \mathbf{r}_3) \wedge \mathbf{F}_{23} = \mathbf{r}_{12} \wedge \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_{13} \wedge \mathbf{F}_{13} + \mathbf{r}_{23} \wedge \mathbf{F}_{23} = \frac{1}{2} [\mathbf{r}_{12} \wedge \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_{21} \wedge \mathbf{F}_{21} + \\ &+ \mathbf{r}_{13} \wedge \mathbf{F}_{13} + \mathbf{r}_{31} \wedge \mathbf{F}_{31} + \mathbf{r}_{23} \wedge \mathbf{F}_{23} + \mathbf{r}_{32} \wedge \mathbf{F}_{32}] = \frac{1}{2} \sum_{i,j(j \neq i)} \mathbf{r}_{ij} \wedge \mathbf{F}_{ij}^{(I)} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

E così via per $N = 4, 5, 6, \dots$

Principio di azione–reazione per i sistemi di punti materiali:

Le due leggi cardinali della dinamica sanciscono che, indipendentemente dal fatto che il sistema S sia isolato oppure no, la risultante delle forze interne $\mathbf{F}^{(INT)} = \mathbf{0}$ e il momento risultante dei momenti delle forze interne $\boldsymbol{\tau}_O^{(EXT)} = \mathbf{0}$. Cioè:

$$\mathbf{F}^{(INT)} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(I)} = \mathbf{0}; \quad \boldsymbol{\tau}_O^{(EXT)} = \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\tau}_{O_i}^{(I)} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{(I)} = \mathbf{0}.$$

2) Se il sistema non è isolato allora $d\mathbf{L}_{O,S} / dt \neq \mathbf{0}$, e si ha che:

$$\begin{aligned} d\mathbf{L}_O / dt &= d(\sum_{i=1}^N \mathbf{L}_{O,i}) / dt = \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \wedge (\mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)}) \\ &= \sum_i \boldsymbol{\tau}_{O_i}^{(I)} + \sum_i \boldsymbol{\tau}_{O_i}^{(E)} = \boldsymbol{\tau}_O^{(EXT)} \end{aligned}$$

essendo, come abbiamo visto $\sum_{i=1}^N \boldsymbol{\tau}_{O_i}^{(I)} = \mathbf{0}$.

$$d\mathbf{L}_O / dt = d(\sum_1^N \mathbf{L}_{O,i}) / dt = \sum_1^N \boldsymbol{\tau}_{O,i}^{(E)} = \boldsymbol{\tau}_O^{(EXT)}$$

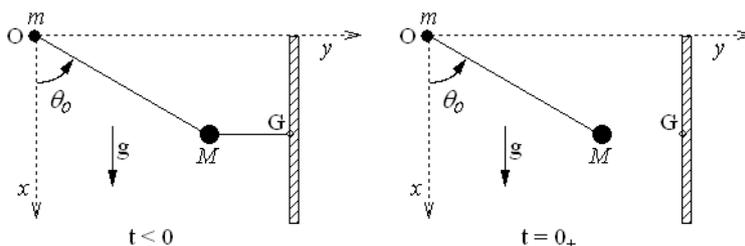
Applicazioni delle leggi della dinamica dei sistemi a casi di equilibrio roto-traslazionale: la condizione di equilibrio roto-traslazione di un sistema impone che: $\sum_1^N \mathbf{F}_i^{(E)} = \mathbf{0}$ e $\sum_1^N \boldsymbol{\tau}_{O,i}^{(E)} = \mathbf{0}$

Esercizi sulla dinamica di sistemi variamente vincolati a muoversi nel piano verticale attorno ad un asse orizzontale fisso passante per un punto O, non coincidente con il CM del sistema.

- Caso del bi-pendolo rigido ancorato ad un punto O, distinto dal CM, e mantenuto in equilibrio roto-traslazionale da una fune tirata lateralmente e disposta orizzontalmente;

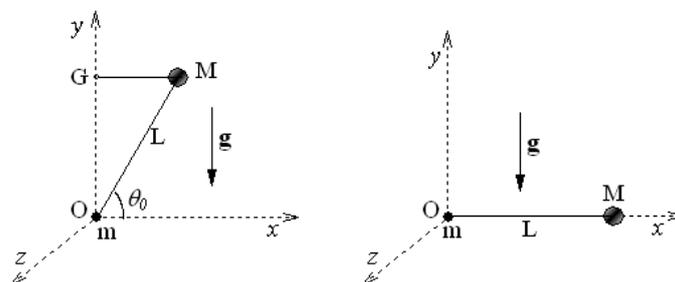
Problema: Un manubrio costituito da due masse $m = 1.5 \text{ kg}$ e $M = 3 \text{ kg}$ collegata da un'asta rigida, di massa trascurabile e di lunghezza $L = 0.9 \text{ m}$ è sospeso dalla parte della massa m al soffitto di una stanza tramite una cerniera liscia O, mentre l'altra massa M è tirata lateralmente da una fune disposta orizzontalmente e fissata al punto G di una parete verticale. In configurazione di equilibrio, il manubrio forma un angolo $\theta_0 = \pi/3 \text{ rad}$ con la direzione verticale. Calcolare:

- la tensione \mathbf{T} della fune;
 - il modulo e la direzione della forza esercitata sul manubrio dalla cerniera O.
- Supponendo che all'istante $t = 0$ la fune improvvisamente si spezzi, determinare con riferimento al moto successivo del manubrio nel piano verticale:
- la velocità angolare di rotazione del manubrio attorno all'asse orizzontale passante per il punto O quando il sistema raggiunge la configurazione verticale.



Problema n. 3: Due corpi puntiformi, di massa $m = 2 \text{ kg}$ e $M = 4 \text{ kg}$ rispettivamente, sono fissati alle estremità di un'asta sottile, rigida di lunghezza $L = 0.6 \text{ m}$ e di massa trascurabile, formando un manubrio asimmetrico. Il corpo di massa m è incernierato al punto O di un asse orizzontale fisso, perpendicolare al manubrio, attorno al quale il manubrio può ruotare senza incontrare attrito alcuno. Inizialmente il manubrio viene mantenuto in equilibrio in configurazione tale che l'asta formi un angolo $\theta = \pi/3 \text{ rad}$ con l'asse orizzontale tramite una fune ideale, di massa trascurabile, disposta orizzontalmente, che collega la massa M ad un gancio fisso G di una parete verticale passante per O. All'istante $t = 0$ la fune si spezza e il manubrio si mette in rotazione nel piano verticale. Calcolare nel sistema di riferimento Oxy:

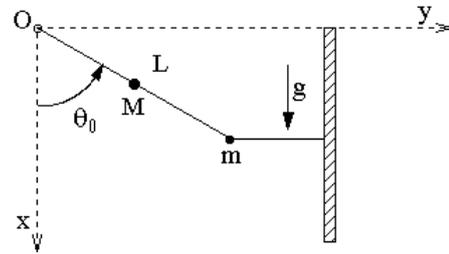
- la tensione iniziale \mathbf{T} della fune;
- la reazione iniziale \mathbf{R}_O sviluppata dalla perno in O;
- la velocità angolare del manubrio nell'istante in cui raggiunge la configurazione orizzontale.



— Caso del manubrio asimmetrico vincolato ad un asse verticale passante per un punto fisso O diverso dal CM.

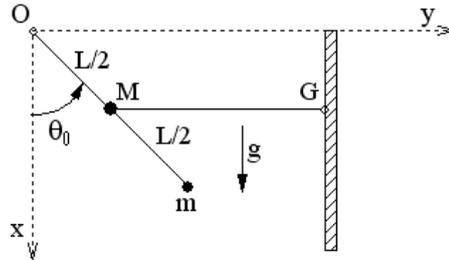
Problema: Un corpo puntiforme di massa $m = 2.4 \text{ kg}$ è attaccato all'estremità di un'asta rigida, sottile, avente massa trascurabile e lunghezza $L = 1.2 \text{ m}$ avente l'altra estremità una cerniera liscia. Un secondo corpo puntiforme di massa $M = 2m$ è fissato all'asta nel suo punto di mezzo. Il corpo fissato all'estremità inferiore dell'asta è tirato lateralmente da una corda in configurazione orizzontale in modo tale che l'asta formi un angolo $\theta_0 = \pi/3 \text{ rad}$ con la verticale. Calcolare:

- la tensione \mathbf{T} della corda; [$T = 4mg$]
- la reazione \mathbf{R} esercitata dalla cerniera in O; [$R_x = -3mg$; $R_y = -4mg$]
- nell'ipotesi che la corda improvvisamente si spezzi, la velocità angolare di rotazione del sistema quando l'asta raggiunge la configurazione verticale.



Problema: Un corpo puntiforme di massa $m = 1.2 \text{ kg}$ è attaccato all'estremità di un'asta rigida, sottile, avente massa trascurabile e lunghezza $L = 1.6 \text{ m}$ avente l'altra estremità agganciata ad una cerniera liscia O. Un secondo corpo puntiforme di massa $M = 2m$ è fissato all'asta nel suo punto di mezzo. Il sistema è tirato lateralmente da una corda disposta in configurazione orizzontale essendo attaccata da un lato al corpo di massa M e dall'altro ad un gancio fisso G, in modo tale che l'asta formi un angolo $\theta_0 = \pi/4 \text{ rad}$ con la verticale. Calcolare nel sistema di riferimento indicato in figura:

- la tensione \mathbf{T} della corda;
- la reazione \mathbf{R} esercitata dalla cerniera sull'asta nel punto di sospensione,
- nell'ipotesi che la corda improvvisamente si spezzi, la velocità angolare di rotazione del sistema quando l'asta raggiunge la configurazione verticale



Abbiamo enunciato la II legge della dinamica dei sistemi di particelle riferendoci al polo O origine di un sistema di riferimento $Oxyz, t$ in cui abbiamo derivato la I legge cardinale partendo dalla legge di Newton, che vale solo nei sistemi di riferimento inerziali, come è il sistema di riferimento del Laboratorio (Sistema L).

Cosa succede della II legge Cardinale della dinamica dei sistemi nel caso in cui si assumesse un polo O' diverso da O,

Il teorema del momento angolare vale anche in questo caso?

Nel caso di un polo O' diverso da O il teorema del momento della quantità di moto diventa:

$$\begin{aligned}
d\mathbf{L}_{O',S}/dt &= d(\sum_1^N \mathbf{L}_{O',i})/dt = \sum_1^N d(\mathbf{r}'_i \wedge m_i \mathbf{v}_i)/dt = \\
&= \sum_1^N (\mathbf{v}'_i \wedge m_i \mathbf{v}_i + \mathbf{r}'_i \wedge m_i \mathbf{a}_i) = \sum_1^N [(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{O'}) \wedge m_i \mathbf{v}_i + \mathbf{r}'_i \wedge (\mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)})] \\
&= \sum_1^N [\mathbf{v}_i \wedge m_i \mathbf{v}_i] - [\mathbf{v}_{O'} \wedge (\sum_1^N m_i \mathbf{v}_i)] + \sum_1^N \mathbf{r}'_i \wedge \mathbf{F}_i^{(I)} + \sum_1^N \mathbf{r}'_i \wedge \mathbf{F}_i^{(E)} \\
&= \mathbf{0} - \mathbf{v}_{O'} \wedge M_S \mathbf{v}_{CM} + \mathbf{0} + \sum_1^N \boldsymbol{\tau}_{O',i}^{(E)}
\end{aligned}$$

Assumendo come polo O' si ha quindi:

$$d\mathbf{L}_{O',S}/dt = -\mathbf{v}_{O'} \wedge M_S \mathbf{v}_{CM} + \sum_1^N \boldsymbol{\tau}_{O',i}^{(E)}$$

per cui se O' è un punto fisso ($\mathbf{v}_{O'} = 0$):

$$d\mathbf{L}_{O',S}/dt = \sum_1^N \boldsymbol{\tau}_{O',i}^{(E)}$$

vale ancora il teorema del momento angolare; mentre se O' NON è un punto fisso il teorema del momento angolare NON vale!

– Cosa succede se il polo O' coincide con il CM del sistema?

Nel caso in cui O' coincide con il CM allora si ottiene:

$$d\mathbf{L}_{CM,S}/dt = -\mathbf{v}_{CM} \wedge M_S \mathbf{v}_{CM} + \sum_1^N \boldsymbol{\tau}_{CM,i}^{(E)}$$

$$d\mathbf{L}_{CM,S}/dt = \sum_1^N \boldsymbol{\tau}_{CM,i}^{(E)}$$

Quindi se il polo O' coincide col CM del sistema, il teorema del momento angolare vale, anche quando il CM NON è fisso.

In conclusione, la II legge cardinale delle dinamica dei sistemi di particelle o, altrimenti detto, il teorema del momento angolare per i sistemi di punti materiali vale nei casi seguenti:

- a) rispetto al polo O , origine del sistema di riferimento $Oxyz$;
- b) rispetto ad un polo O' , diverso da O , purché O' sia fisso;
- c) rispetto al CM del sistema assunto come polo di riferimento, indipendentemente dal fatto che il CM sia fisso o si muova!!!

Sistema L: Leggi cardinali della dinamica dei sistemi:

I^a Legge cardinale della dinamica dei sistemi:

$$d\mathbf{P}_S/dt = \sum_i \mathbf{F}_i^{(E)};$$

equivalente a:

$$\mathbf{M} \mathbf{a}_{CM} = \mathbf{F}^{(EXT)}$$

II^a legge cardinale della dinamica dei sistemi:

$$d\mathbf{L}_{O,S} /dt = d(\sum_{i=1}^N \mathbf{L}_{O,i})/dt = \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\tau}_{0,i}^{(E)} = \boldsymbol{\tau}_0^{(EXT)}.$$

$$d\mathbf{L}_{CM,S}/dt = d(\sum_{i=1}^N \mathbf{L}_{CM,i})/dt = \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\tau}_{CM,i}^{(E)} = \boldsymbol{\tau}_{CM}^{(EXT)}.$$

Le leggi ricavate più sopra valgono nel sistema $Oxyz,t$ (L).

NB: La seconda legge vale, come abbiamo visto prima, anche se come polo di riferimento si assume il CM del sistema di particelle:

$$d\mathbf{L}_{CM,S}/dt = d(\sum_{i=1}^N \mathbf{L}_{CM,i})/dt = \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\tau}_{CM,i}^{(E)} = \boldsymbol{\tau}_{CM}^{(EXT)}.$$

Questo notevole risultato, insieme alla I legge cardinale:

$$\mathbf{M} \mathbf{a}_{CM} = \sum_i m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_S^{(R)} = \mathbf{F}^{(EXT)}$$

spiega l'importanza di aver introdotto il concetto di centro di massa di un sistema di punti materiali, con le relative proprietà.

Sistema C: Leggi cardinali della dinamica dei sistemi

Sistema C è il sistema di riferimento del centro di massa.

Si tratta di un sistema CMxyz, ancorato al CM del sistema S e avente gli assi paralleli agli assi x,y,z di Oxyz.

Il sistema C è un sistema di riferimento in cui alcune delle grandezze cinematiche dinamiche collettive del sistema di PM risultano = 0.

Calcolo della quantità: $\mathbf{r}'_{CM} \Rightarrow \sum_i m_i \mathbf{r}'_i = M\mathbf{r}'_{CM} = \mathbf{0}$;

Calcolo della quantità: $\mathbf{v}'_{CM} \Rightarrow \sum_i m_i \mathbf{v}'_i = M\mathbf{v}'_{CM} = \mathbf{0}$;

Calcolo della quantità: $\mathbf{a}'_{CM} \Rightarrow \sum_i m_i \mathbf{a}'_i = M\mathbf{a}'_{CM} = \mathbf{0}$.

Calcolo delle grandezze dinamiche: \mathbf{P}'_S , $E'_{S,k}$ e \mathbf{L}'_{CM} .

$$\mathbf{P}'_S = \sum_1^N \mathbf{p}'_i = \sum_1^N m_i \mathbf{v}'_i = M\mathbf{v}'_{CM} = \mathbf{0};$$

$$E'_{k,S} = \sum_1^N E'_{k,i} = \frac{1}{2} \sum_1^N m_i v_i'^2 = \frac{1}{2} \sum_1^N (p_i'^2/m_i)$$

$$\mathbf{L}'_{CM,S} = \sum_1^N \mathbf{L}'_{CM,i} = \sum_1^N \mathbf{r}'_i \wedge m_i \mathbf{v}'_i$$

Sistema C = sistema di riferimento a quantità di moto totale nulla:

$$\mathbf{P}'_S = 0 \text{ (con dimostrazione).}$$

Leggi cardinali della dinamica nel sistema C:

– I^a legge cardinale: $M\mathbf{a}'_{CM} = 0$, ma ...

$$d\mathbf{P}'_S/dt = \sum_i \mathbf{F}_i^{(E)} - M\mathbf{a}_{CM} = 0$$

– II^a legge cardinale: $d\mathbf{L}'_{CM,S}/dt = \sum_i \boldsymbol{\tau}_{CM,i}^{(E)} = \boldsymbol{\tau}_{CM}^{(EXT)}$.

$$d\mathbf{L}'_{CM,S}/dt = d(\sum_1^N \mathbf{L}'_{CM,i})/dt = \sum_1^N \boldsymbol{\tau}_{CM,i}^{(E)} = \boldsymbol{\tau}_{CM}^{(EXT)}.$$

N.B.: Vale il teorema del momento angolare rispetto al CM assunto come polo (anche se CM è in moto non uniforme).

Riassumendo: Le leggi cardinali della dinamica dei sistemi di punti materiali con riferimento a:

Sistema L:

I^a Legge cardinale della dinamica dei sistemi:

$$d\mathbf{P}_S/dt = \sum_1^N \mathbf{F}_i^{(E)}; \text{ equivalente a: } M \mathbf{a}_{CM} = \mathbf{F}^{(EXT)}$$

II^a legge cardinale della dinamica dei sistemi:

$$d\mathbf{L}_{O,S} /dt = d(\sum_1^N \mathbf{L}_{O,i})/dt = \sum_1^N \mathbf{\tau}_{0,i}^{(E)} = \mathbf{\tau}_0^{(EXT)}.$$

Sistema C:

I^a legge cardinale: $M\mathbf{a}'_{CM} = 0$, ma ...

$$d\mathbf{P}'_S/dt = \sum_1^N \mathbf{F}_i^{(E)} - M\mathbf{a}_{CM} = 0$$

– II^a legge cardinale:

$$d\mathbf{L}'_{CM,S}/dt = \sum_1^N \mathbf{\tau}_{CM,i}^{(E)} = \mathbf{\tau}_{CM}^{(EXT)}.$$

Dinamica dei sistemi di punti materiali. (Continuazione).

Teoremi di Konig: Relazioni fra le grandezze dinamiche collettive (quantità di moto, momento delle quantità di moto, energia cinetica) calcolate nel sistema L e nel sistema C:

Teorema di Konig della quantità di moto, del momento della quantità di moto, e dell'energia cinetica.

– quantità di moto: $\mathbf{P}_S = M\mathbf{v}_{CM} + \mathbf{P}'_S = M\mathbf{v}_{CM}$.

N.B.: Dimostrazione:

$$\mathbf{P}_S = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{v}_{CM} + \mathbf{v}'_i) = (\sum_{i=1}^N m_i) \mathbf{v}_{CM} + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}'_i$$

Ma siccome $\mathbf{P}'_S = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}'_i = \mathbf{0}$, sarà: $\mathbf{P}_S = M \mathbf{v}_{CM}$

– momento angolare: $\mathbf{L}_{O,S} = \mathbf{r}_{CM} \wedge M \mathbf{v}_{CM} + \mathbf{L}'_{CM,S}$

N.B.: Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{O,S} &= \sum_{i=1}^N \mathbf{L}_{O,i} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \wedge m_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_{CM} + \mathbf{r}'_i) \wedge m_i (\mathbf{v}_{CM} + \mathbf{v}'_i) = \\ &= \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_{CM} \wedge m_i \mathbf{v}_{CM} + \sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i \wedge m_i \mathbf{v}_{CM} + \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_{CM} \wedge m_i \mathbf{v}'_i + \sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i \\ &\wedge m_i \mathbf{v}'_i = \mathbf{r}_{CM} \wedge (\sum_{i=1}^N m_i) \mathbf{v}_{CM} + \sum_{i=1}^N \mathbf{L}'_{CM,i} = \mathbf{r}_{CM} \wedge M \mathbf{v}_{CM} + \mathbf{L}'_{CM,S} \end{aligned}$$

dato che: $\sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i \wedge m_i \mathbf{v}_{CM} = (\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i) \wedge \mathbf{v}_{CM} = \mathbf{0}$ e così pure: $\sum_{i=1}^N \mathbf{r}_{CM} \wedge m_i \mathbf{v}'_i = \mathbf{r}_{CM} \wedge (\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}'_i) = \mathbf{0}$.

– dell'energia cinetica: $E_{k,S} = \frac{1}{2} M \mathbf{v}_{CM}^2 + E'_{k,S} = E_{k,CM} + E_{k,INT}$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} E_{k,S} &= \sum_{i=1}^N E_{k,i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \\ &(\mathbf{v}_{CM} + \mathbf{v}'_i) \cdot (\mathbf{v}_{CM} + \mathbf{v}'_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_{CM}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}_{CM} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \\ &m_i \mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}_{CM} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i'^2 \end{aligned}$$

Ed essendo $\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}'_i = \mathbf{0}$, si avrà:

$$E_{k,S} = \frac{1}{2} M \mathbf{v}_{CM}^2 + E'_{k,S}$$

Teoremi di Konig: Consentono di scomporre il moto di un sistema di particelle in due moti: un moto orbitale, i.e. quello del centro di massa del sistema dove è concentrata la massa totale M_S del sistema, e un moto interno, i.e. quello di tutta le particelle del sistema rispetto al suo centro di massa.

Esempi: moto della luna attorno alla terra = moto orbitale di un punto materiale di massa M con velocità \mathbf{v}_{CM} + moto intrinseco,

proprio del sistema e indipendente dal sistema di riferimento usato per l'osservazione.

Energia meccanica di un sistema di punti materiali

Il teorema dell'energia cinetica vale anche per i sistemi di punti materiali e mette in relazione la variazione di energia cinetica del sistema di particelle con il lavoro di tutte le forze agenti su di esse.

Definizioni di Energia cinetica di un sistema S:

$$E_{k,S} = \sum_1^N E_{k,i} = \sum_1^N \frac{1}{2} m_i v_i^2. \text{ (nel sistema L, ancorato in O)}$$

$$E'_{k,S} = \sum_1^N E'_{k,i} = \sum_1^N \frac{1}{2} m_i v_i'^2 \text{ (nel sistema C, ancorato a CM)}$$

$E'_{k,S}$ è detta anche energia cinetica interna $E_{k,S}^{\text{INT}}$

Lavoro elementare delle forze agenti su un sistema di particelle:

$$- \text{lavoro delle forze esterne: } dW^{\text{INT}} = \sum_1^N dW_i^{(I)} = \sum_1^N \mathbf{F}_i^{(I)} \cdot d\mathbf{r}_i$$

$$- \text{lavoro delle forze esterne: } dW^{\text{EXT}} = \sum_1^N dW_i^{(E)} = \sum_1^N \mathbf{F}_i^{(E)} \cdot d\mathbf{r}_i$$

Il teorema dell'energia di un sistema di particelle:

$$dE_{k,S} = dW^{\text{INT}} + dW^{\text{EXT}}$$

$$\Delta E_{k,S} = E_{k,S,B} - E_{k,S,A} = W^{\text{EXT}} + W^{\text{INT}}.$$

Se le forze interne $\mathbf{F}^{(i)}(r_{ij})$ sono conservative, allora si può definire una funzione energia potenziale E_P^{INT} delle forze interne:

$$dE_P^{\text{INT}} = - dW^{\text{INT}}$$

$$\text{Ma } dE_P^{\text{INT}} = - \sum_1^N dW_i^{(i)} = - \sum_1^N \mathbf{F}_i^{(I)} \cdot d\mathbf{r}_i = - \frac{1}{2} \sum_{i,j}^{(i \neq j)} \mathbf{F}^{(i)}(r_{ij}) \cdot d\mathbf{r}_{ij},$$

e quindi:
$$\Delta E_P^{INT} = -W^{INT}$$

Pertanto il teorema dell'energia cinetica per un sistemi di P.M.:

$$dE_{k,S} = dW^{INT} + dW^{EXT} \text{ o in termini finiti: } \Delta E_{k,S} = W^{EXT} + W^{INT}.$$

diventa nel caso di forze interne conservative:

$$\Delta E_{k,S} = E_{k,S,B} - E_{k,S,A} = W^{EXT} - \Delta E_P^{INT},$$

$$\Delta E_{k,S} + \Delta E_P^{INT} = W^{EXT}$$

Def. di Energia propria del sistema: $U_S = E_{k,S} + E_P^{INT}$.

Vale la relazione $\Delta(E_{k,S} + E_P^{INT}) = W^{EXT}$, ossia $\Delta U_S = W^{EXT}$

Se poi anche le forze esterne $\mathbf{F}_{ik}^{(e)}$ sono conservative, si potrà definire un'energia potenziale E_P^{EXT} delle forze esterne:

$$dE_P^{EXT} = -dW^{EXT} = -\sum_1^N dW_i^{(E)} = -\sum_i \mathbf{F}_i^{(E)} \cdot d\mathbf{r}_i$$

per cui si potrà scrivere $\Delta U_S = W^{EXT}$ come: $\Delta U_S = -\Delta E_P^{EXT}$.

E quindi $\Delta(U_S + E_P^{EXT}) = 0$, cioè:

$$\Delta E_{T,S} = 0,$$

dove $E_{T,S} = E_{k,S} + E_P^{INT} + E_P^{EXT}$ è l'energia meccanica totale del sistema di particelle.

In conclusione, nei casi in cui tutte le forze, i.e. interne ed esterne, agenti sul sistema siano conservative si avrà la conservazione dell'energia meccanica totale del sistema e si potrà enunciare il principio di conservazione dell'energia dei sistemi di particelle.

Conservazione dell' Energia totale meccanica $E_{T,S}$ di un sistema S di particelle soggette all'azione di forze interne ed esterne conservative:

$$E_{T,S} = E_{k,S} + E_P^{INT} + E_p^{EXT} = \text{costante del moto.}$$

N.B.: Dipendenza di $E_{k,S}$ dal sistema di riferimento scelto e indipendenza di E_P^{INT} dal sistema scelto.

Pertanto il valore dell'energia totale meccanica dipende dal sistema di riferimento usato per descrivere il moto del sistema. Infatti, nel sistema C, ancorato al CM:

$$E'_{k,S} = \sum_i^N E'_{k,i} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$

$E'_{k,S}$ è detta anche energia cinetica interna $E_{k,S}^{INT}$

Mentre la somma $E_{k,S}^{INT} + E_P^{INT}$ è detta energia interna U_S^{INT} :

$$U_S^{INT} = (E_{k,S} + E_P)^{INT}$$

In virtù del teorema di Konig per l'energia cinetica si avrà:

$$E_{k,S} = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + E_{k,S}^{INT} = E_{k,CM} + E_{k,S}^{INT}$$

E quindi in principio di conservazione dell'energia si potrà esprimere come:

$$E_{T,S} = E_{k,CM} + E_{k,S}^{INT} + E_P^{INT} + E_p^{(EXT)} = E_{k,CM} + U_S^{INT} + E_p^{EXT}$$

N.B.: Per un sistema di punti materiale soggetto all'azione di forze interne ed esterne conservative, si conserva l'energia totale meccanica del sistema ma, in generale, ma NON l'energia propria.

Esempio di sistema per cui si conserva l'energia meccanica totale:

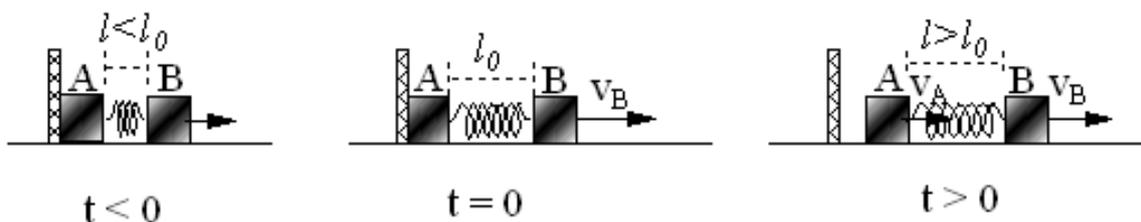
Due corpi puntiformi, collegati fra loro da una molla e soggetti quindi all'azione della forza elastica della molla (forza interna conservativa!), in moto nel piano verticale e soggetti all'azione della forza gravitazionale della terra (forza esterna conservativa!).

Esempi di sistemi in cui si conserva l'energia propria:

- Sistema di due corpi attaccati alla estremità di una molla completamente compressa da una fune in tiro, posto in quiete sul piano orizzontale con uno dei due corpi appoggiato a una staffa fissa verticale. Improvvisamente la fune si spezza e il sistema si mette in moto lungo il piano orizzontale.
- Sistema terra-luna in moto sotto l'azione della forza di attrazione gravitazionale mutua.

Problema: Due blocchi A e B, assimilabili a corpi puntiformi, entrambi di massa $m = 5 \text{ kg}$ sono appoggiati su un piano orizzontale perfettamente liscio, essendo fissati alle estremità opposte di una molla avente lunghezza a riposo $l_0 = 0.8 \text{ m}$ e costante elastica $k = 225 \text{ Nm}^{-1}$. Inizialmente il sistema è in quiete con il blocco A in contatto con una parete verticale fissa e la molla è compressa tramite un filo, coassiale con l'asse di simmetria principale della molla e che mantiene i due corpi A e B a distanza fissa $l_0/2$. Ad un certo istante il filo si rompe e la molla si espande mettendo in moto il corpo B lungo il piano orizzontale. Assumendo che il contatto tra la parete verticale e il blocco A venga meno nell'istante in cui la molla ha raggiunto la sua lunghezza di riposo l_0 e che questo coincida con l'istante $t = 0$, determinare:

- la tensione iniziale del filo;
- l'energia meccanica totale iniziale del sistema dei due blocchi;
- la velocità assoluta dei due corpi all'istante $t = 0_+$;
- la velocità del centro di massa del sistema all'istante $t = 0_+$;
- l'energia cinetica interna del sistema dei due corpi all'istante $t = 0_+$;
- il valore massimo dell'energia cinetica del sistema dei due corpi nel sistema di riferimento del laboratorio (Sistema L);
- il valore minimo dell'energia cinetica del sistema dei due punti materiali nel sistema di riferimento del laboratorio (Sistema L);
- il valore massimo dell'energia cinetica del sistema dei due punti materiali nel sistema di riferimento del centro di massa (Sistema C).



Problema dei due corpi

Sistemi a due corpi: sono i più semplici sistemi di particelle

Problema dei due corpi: studio del moto relativo di due corpi supposti puntiformi sotto l'azione della forza di interazione mutua.

Esempio: moto (relativo) di due corpi celesti sotto l'azione della forza gravitazionale moto di un pianeta relativo al sole, moto della luna rispetto alla terra, moto dell'elettrone rispetto al protone dell'atomo di idrogeno, ma anche il moto (relativo) di una coppia di punti materiali collegati tra loro da una molla

Le grandezze cinematiche (posizione velocità e accelerazione) del centro di massa del sistema dei due corpi nel sistema L e C:

Vettori \mathbf{r}_{CM} , \mathbf{v}_{CM} , \mathbf{a}_{CM} del centro di massa nel sistema L:

$$\mathbf{r}_{CM} = \sum_{i=1}^2 m_i \mathbf{r}_i / \sum_{i=1}^2 m_i = (m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2) / (m_1 + m_2)$$

$$\mathbf{v}_{CM} = \sum_{i=1}^2 m_i \mathbf{v}_i / \sum_{i=1}^2 m_i = (m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2) / (m_1 + m_2)$$

$$\mathbf{a}_{CM} = \sum_{i=1}^2 m_i \mathbf{a}_i / \sum_{i=1}^2 m_i = (m_1 \mathbf{a}_1 + m_2 \mathbf{a}_2) / (m_1 + m_2)$$

Vettori \mathbf{r}'_{CM} , \mathbf{v}'_{CM} , \mathbf{a}'_{CM} del centro di massa nel sistema C:

$$\mathbf{r}'_{CM} = \sum_{i=1}^2 m_i \mathbf{r}'_i / \sum_{i=1}^2 m_i = (m_1 \mathbf{r}'_1 + m_2 \mathbf{r}'_2) / (m_1 + m_2) = 0$$

$$\mathbf{v}'_{CM} = \sum_{i=1}^2 m_i \mathbf{v}'_i / \sum_{i=1}^2 m_i = (m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2) / (m_1 + m_2) = 0$$

$$\mathbf{a}'_{CM} = \sum_{i=1}^2 m_i \mathbf{a}'_i / \sum_{i=1}^2 m_i = (m_1 \mathbf{a}'_1 + m_2 \mathbf{a}'_2) / (m_1 + m_2) = 0$$

Grandezze cinematiche relative: (L) \mathbf{r}_{12} , \mathbf{v}_{12} , \mathbf{a}_{12} e (C) \mathbf{r}'_{12} , \mathbf{v}'_{12} , \mathbf{a}'_{12}

N.B.: Il vettore posizione, velocità e accelerazione relativa dei due corpi non devono dipendere dal sistema di riferimento L o C che sia. Infatti:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}'_{12} & \text{e} \quad \mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}'_{21}, \\ \mathbf{v}_{12} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}'_{12} & \text{e} \quad \mathbf{v}_{21} = \mathbf{v}'_{21}, \\ \mathbf{a}_{12} = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}'_{12} & \text{e} \quad \mathbf{a}_{21} = \mathbf{a}'_{21} \end{array}$$

Vogliamo trovare le relazioni che legano le grandezze cinematiche (posizione velocità e accelerazione) individuali dei due corpi in termini delle corrispondenti grandezze relative nel sistema L e nel sistema C:

Vettore posizione della particella m_i nel sistema C:

$$\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{CM}$$

$$\begin{array}{ll} \mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{CM} = m_2 \mathbf{r}_{12} / (m_1 + m_2) & \mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}'_{12} \\ \mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_{CM} = m_1 \mathbf{r}_{21} / (m_1 + m_2) & \mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}'_{21} \end{array}$$

Vettore velocità della particella m_i in C:

$$\mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{CM}$$

$$\begin{array}{ll} \mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{CM} = m_2 \mathbf{v}_{12} / (m_1 + m_2) & \mathbf{v}_{12} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_{CM} = m_1 \mathbf{v}_{21} / (m_1 + m_2) & \mathbf{v}_{21} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 \end{array}$$

Vettore accelerazione della particella m_i nel sistema C:

$$\mathbf{a}'_i = \mathbf{a}_i - \mathbf{a}_{CM}$$

$$\begin{array}{ll} \mathbf{a}'_1 = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_{CM} = m_2 \mathbf{a}_{12} / (m_1 + m_2) & \mathbf{a}_{12} = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}'_2 = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_{CM} = m_1 \mathbf{a}_{21} / (m_1 + m_2) & \mathbf{a}_{21} = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1 \end{array}$$

N.B.: Nel caso in cui il sistema delle due particelle sia isolato (i.e.: quando non $\exists \mathbf{F}_{ik}^{(e)}$ e quindi $\mathbf{F}_i^{(E)} = 0$, per $i = 1, 2$), per cui quindi $\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{0}$, si ha che l'accelerazione relativa \mathbf{a}'_i e l'accelerazione assoluta \mathbf{a}_i di ciascuna particella coincidono e sono legate all'accelerazione relative \mathbf{a}_{ij} :

$$\mathbf{a}'_1 = \mathbf{a}_1 = m_2 \mathbf{a}_{12}/(m_1+m_2) \quad \mathbf{a}'_2 = \mathbf{a}_2 = m_1 \mathbf{a}_{21}/(m_1+m_2)$$

Problema dei due corpi: massa ridotta.

Studio del moto relativo di due corpi supposti puntiformi sotto l'azione della forza di interazione mutua $\mathbf{F}_{12} = \mathbf{F}(r_{12})$

Esempi: Forza mutua gravitazionale: $\mathbf{F}_G(r_{12}) = \gamma Mm \mathbf{r}_{12}/r_{12}^3$;
 Forza mutua elastica: $\mathbf{F}_{el}(x_{12}) = -k [(x_2-x_1) - l_0] \mathbf{i}$

Equazione del moto di ognuno dei due PM espressa dalla legge di Newton: $m\mathbf{a} = \mathbf{F}(r_{12})$:

$$\begin{aligned} m_1 \mathbf{a}_1 &= \mathbf{F}_{12} \\ m_2 \mathbf{a}_2 &= -\mathbf{F}_{12} \end{aligned}$$

Accelerazione relativa della particella 1 rispetto alla particella 2:

$$\mathbf{a}_{12} = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = \mathbf{F}_{12}(1/m_1 + 1/m_2)$$

In termini di massa ridotta $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$: $1/\mu = [1/m_1 + 1/m_2]$

Si avrà:

$$\mathbf{a}_{12} = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = \mathbf{F}_{12}/\mu$$

Questa relazione esprime il moto relativo delle 2 particelle, soggette unicamente alla loro mutua interazione, che è stata ottenuta partendo dall'equazione del moto delle 2 particelle,

può essere scritta anche così:

$$\mu \mathbf{a}_{12} = \mathbf{F}_{12}$$

Essa è l'equazione del moto in un SRI (Sistema L) di una particella di massa μ soggetta all'azione di una forza \mathbf{F}_{12} .

Ora $\mathbf{a}_{12} = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}'_1 - \mathbf{a}'_2 = \mathbf{a}'_{12}$ (perché sistema isolato).

Quindi sarà pure:

$$\mu \mathbf{a}'_{12} = \mathbf{F}_{12}$$

Questa è l'equazione del moto nel Sistema C (ancorato al CM del sistema) di una particella di massa μ soggetta all'azione di una forza \mathbf{F}_{12} .

N.B.: Il moto relativo di due particelle nel sistema di riferimento L è equivalente al moto di una particella di massa μ (massa efficace del sistema) soggetta all'azione di una forza uguale alla forze di interazione mutua \mathbf{F}_{12} studiato nel sistema C (che è un sistema di riferimento inerziale!)

N.B.: A rigore, lo studio del moto relativo in un SRI di due corpi celesti soggetti all'azione della forza di attrazione gravitazionale è ricondotto allo studio, nel sistema di riferimento C, del moto di un corpo di massa μ che si muove sotto l'azione di \mathbf{F}_G . Tuttavia

Cosa succede quando $m_1 \gg m_2$ (sistemi sole-pianeta, pianeta-satellite, come ad esempio il sistema terra-luna: massa terra \gg massa luna; etc. o nel caso dell'atomo di idrogeno: massa protone \gg massa elettrone).

La massa ridotta $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2) = m_2 / (1 + m_2 / m_1) \cong m_2$ mentre la posizione del CM del sistema "coincide" con m_1

e questo giustifica l'approssimazione usata nell'espressione della legge di gravitazione universale fatta da noi finora e l'adozione del sistema di riferimento con origine O ancorato alla massa m_2 .

In generale, se le due masse sono confrontabili, si deve studiare il moto, nel sistema C, in termini della massa ridotta μ .

Esempio: Caso del moto roto-traslatorio su un piano orizzontale perfettamente liscio di manubrio costituito da 2 corpi puntiformi ancorati alle estremità di un'asta rigida lunga L e priva di massa. Calcolo della tensione della asta:

$$\begin{aligned}m_1 \mathbf{a}_1 &= \mathbf{T}_1 \\ m_2 \mathbf{a}_2 &= \mathbf{T}_2\end{aligned}$$

Per il principio di A/R: $\mathbf{T}_2 = -\mathbf{T}_1$, ma $T_2 = T_1$

$$T = \mu v_{12}^2 / r_{12} = \mu v_{12}^2 / L.$$

N.B.: Il modulo T dipende dalla velocità di rotazione ω del manubrio, atteso che $v_{12} = L\omega$, che, quindi, deve essere nota.

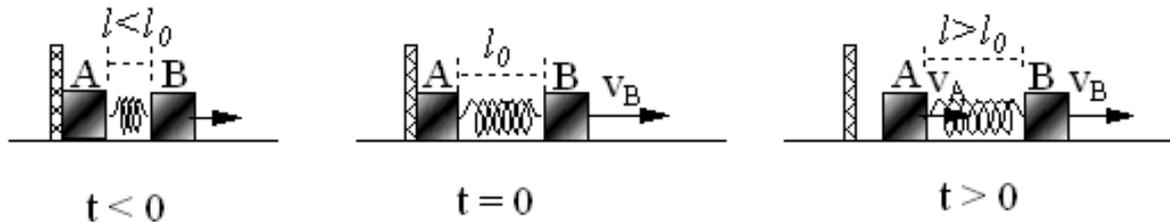
Esercizio: Coppia di PM fissati all'estremità di un'asta rigida ideale (manubrio) posti in quiete su un piano orizzontale perfettamente liscio. A $t = 0$ viene applicato un impulso \mathbf{J}_0 a uno dei due corpo in direzione perpendicolare al manubrio. Studiare il moto roto-traslazionale del sistema dopo l'applicazione dell'impulso e, specificatamente, il moto relativo dei due PM.

Problemi sui sistemi a due corpi:

1) Due blocchi di massa m_1 e m_2 , posti su piano orizzontale liscio, sono attaccati alle estremità di una molla ideale di costante elastica k e di lunghezza a riposo l_0 , con l'asse di simmetria lungo l'asse x. Inizialmente il sistema è mantenuto in quiete con la massa m_1 appoggiata alla base di una parete verticale fissa con la molla completamente compressa tramite una fine ancorata alla due masse. All'istante la molla viene lasciata espandere, e nell'istante $t = 0$ in cui la molla raggiunge la

sua lunghezza di riposo, la massa m_1 si stacca dalla parete. Studiare il moto del sistema, calcolando espressamente nel sistema di riferimento del laboratorio (Sistema L):

- l'accelerazione del CM del sistema all'istante $t = 0_+$;
- la legge oraria del moto del CM dopo che il blocco di massa m_1 ha abbandonato la parete verticale (i.e.: $t > 0$);
- l'equazione del moto relativo del sistema dei due corpi per $t > 0$;
- la legge oraria del moto relativo dei due blocchi per $t > 0$;
- le leggi orarie del moto di ciascuno dei due blocchi nel sistema di riferimento solidale al piano orizzontale (Sistema L).



2) Due blocchi di massa m_1 e m_2 , inizialmente in quiete su un piano orizzontale liscio, sono attaccati alle estremità di una molla ideale di costante elastica k e di lunghezza a riposo l_0 , avente l'asse di principale simmetria disposto lungo l'asse x . All'istante $t = 0$ viene applicato al blocco di massa m_1 un impulso $\mathbf{J}_0 = J_0 \mathbf{i}$. Studiare il moto del sistema, determinando in particolare:

- la posizione iniziale del CM, prima dell'applicazione dell'impulso;
- la legge oraria del moto del CM per $t > 0$;
- l'equazione del moto relativo dei due blocchi per $t > 0$;
- la legge oraria del moto relativo dei due blocchi per $t > 0$;
- la legge oraria del moto di ciascuno dei due blocchi nel sistema di riferimento del centro di massa del sistema (Sistema C).

Espressione delle grandezze collettive nel sistema C e delle relazioni di König per un sistema a due corpi.

Quantità di moto:

$$\mathbf{P}_S' = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = \mathbf{0},$$

da cui $\mathbf{p}'_1 = -\mathbf{p}'_2$, e ricordando che $\mathbf{v}'_1 = m_2 \mathbf{v}_{12} / (m_1 + m_2)$,

Si avrà anche:

$$\mathbf{p}'_1 = m_1 \mathbf{v}'_1 = m_1 m_2 \mathbf{v}_{12} / (m_1 + m_2) = \mu \mathbf{v}_{12}$$

$$\mathbf{p}'_2 = m_2 \mathbf{v}'_2 = m_2 m_1 \mathbf{v}_{21} / (m_1 + m_2) = \mu \mathbf{v}_{21} = -\mu \mathbf{v}_{12}.$$

Quindi: $\mathbf{p}'_1 = \mathbf{p}'_2 = \mu \mathbf{v}_{12} = \mathbf{p}'$

N.B.: Il modulo della quantità di moto di ognuna delle due particelle, nel sistema C, equivale al modulo della quantità di moto di una particella di massa μ che si muove con la velocità relativa delle due particelle.

Ovviamente:

$$\mathbf{P}'_S = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = \mu \mathbf{v}_{12} - \mu \mathbf{v}_{21} = \mathbf{0},$$

Energia cinetica interna: E_k^{INT}

$$E_k^{\text{INT}} = \frac{1}{2} \mu v_{12}^2 = p'^2 / 2\mu$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} E_k^{\text{INT}} &= \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \\ &= \frac{1}{2} m_1 [m_2 \mathbf{v}_{12} / (m_1 + m_2)]^2 + \frac{1}{2} m_2 [m_1 \mathbf{v}_{21} / (m_1 + m_2)]^2 = \\ &= \frac{1}{2} m_1 m_2^2 v_{12}^2 / (m_1 + m_2)^2 + \frac{1}{2} m_2 m_1^2 v_{21}^2 / (m_1 + m_2)^2 = \\ &= \frac{1}{2} m_1 m_2 (m_1 + m_2) v_{12}^2 / (m_1 + m_2)^2 = \frac{1}{2} m_1 m_2 v_{12}^2 / (m_1 + m_2) = \\ &= \frac{1}{2} \mu v_{12}^2 \end{aligned}$$

N.B.: L'energia cinetica interna di un sistema di 2 particelle equivale all'energia cinetica di una particella di massa μ che si muove con la velocità relativa delle due particelle.

Momento angolare interno o intrinseco: $\mathbf{L}_{\text{CM}}^{\text{INT}}$

$$\mathbf{L}_{\text{CM}}^{\text{INT}} = \mathbf{r}_{12} \wedge \mu \mathbf{v}_{12}.$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\text{CM}}^{\text{INT}} &= \mathbf{r}'_1 \wedge m_1 \mathbf{v}'_1 + \mathbf{r}'_2 \wedge m_2 \mathbf{v}'_2 = \\ &= m_2 \mathbf{r}_{12} / (m_1 + m_2) \wedge m_1 [m_2 \mathbf{v}_{12} / (m_1 + m_2)] + m_1 \mathbf{r}_{21} / (m_1 + m_2) \wedge m_2 \\ & \quad [m_1 \mathbf{v}_{21} / (m_1 + m_2)] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= m_2 \mathbf{r}_{12} / (m_1 + m_2) \wedge m_1 [m_2 \mathbf{v}_{12} / (m_1 + m_2)] + [-m_1 \mathbf{r}_{12} / (m_1 + m_2)] \wedge m_2 \\
&[-m_1 \mathbf{v}_{12} / (m_1 + m_2)] = \\
&= \mathbf{r}_{12} \wedge m_1 m_2^2 \mathbf{v}_{12} / (m_1 + m_2)^2 + \mathbf{r}_{12} \wedge m_1^2 m_2 \mathbf{v}_{12} / (m_1 + m_2)^2 = \\
&= \mathbf{r}_{12} \wedge [m_1 m_2^2 / (m_1 + m_2)^2 + m_1^2 m_2 / (m_1 + m_2)^2] \mathbf{v}_{12} = \\
&= \mathbf{r}_{12} \wedge [m_1 m_2 (m_1 + m_2) / (m_1 + m_2)^2] \mathbf{v}_{12} = \mathbf{r}_{12} \wedge \mu \mathbf{v}_{12}
\end{aligned}$$

N.B.: Il momento angolare intrinseco \mathbf{L}_{CM}^{INT} (riferito al CM) di un sistema di 2 particelle equivale al momento della quantità di moto (riferito ad un punto O) di una particella di massa μ che si trova nel punto individuato dal raggio vettore posizione relativa \mathbf{r}_{12} che si muove con la velocità relativa delle due particelle \mathbf{v}_{12} .

Teoremi di Konig per un sistema due corpi

N.B.: La velocità \mathbf{v}_{CM} di un sistema isolato è costante:

Usando le grandezze calcolate nel sistema C si avrà:

$$\mathbf{P}_S = M \mathbf{v}_{CM} + \mathbf{P}'_S = M \mathbf{v}_{CM}$$

$$E_{k,S} = E_{k,CM} + E_k^{INT} = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} \mu v_{12}^2$$

$$\mathbf{L}_{O,S} = \mathbf{L}_{O,CM} + \mathbf{L}'_{CM,S} = \mathbf{r}_{CM} \wedge M \mathbf{v}_{CM} + \mathbf{r}_{12} \wedge \mu \mathbf{v}_{12}$$

Risoluzione di alcuni problemi di dinamica dei sistemi a 2 corpi.