Geometria

Ingegneria Gestionale

Prova scritta del 2 settembre 2002: V.O. e I° canale N.O.

Tema I.4

I.4.E1. Nello spazio vettoriale euclideo $(\mathbb{R}^4, < \mid >)$ (prodotto scalare standard), si consideri il sottospazio U generato dai vettori u_i, $i = 1, \dots, 4$ seguenti:

$$u_1 = (1,0,1,0)^t \quad u_2 = (0,1,0,-1)^t \quad u_3 = (1,0,0,0)^t \quad u_4 = (1,1,1,-1)^t$$

i) Se ne determini la dimensione e una base ortonormale.
ii) Si stabilisca un sistema di equazioni cartesiane per $U^\perp$ e se ne determini una base ortonormale.

I.4.E2. i) Nel piano euclideo reale $\mathbb{E}^2$, in cui sia fissato un riferimento cartesiano (e ampliato proiettivamente) determinare la conica $\mathcal{C}$ tangente a $r_1 : 2x - y - 4 = 0$ in $A : (1,-2)$ e ad $r_2 : 2x + y + 4 = 0$ in $B : (-1,-2)$ e alla retta $s : y = 0$.
ii) Determinarne il tipo affine, il tipo metrico (solo N.O.), il centro e gli assi, abbozzandone il grafico.

I.4.T1. i) Dato uno spazio vettoriale (V, K), si definisca la nozione di sottospazio vettoriale.
ii) Si definisca la nozione di somma e somma diretta di due sottospazi.
iii) Si enunci il teorema della base incompleta, dandone una duplice interpretazione.
iv) Si enunci il teorema di Grassmann, fornendone, possibilmente, uno schizzo di dimostrazione (dimostrazione dettagliata per il V.O.)

I.4.T2.N.O. i) Definire, nel piano, la nozione di forma differenziale chiusa, esatta, e la relazione intercorrente tra le due.
ii) Enunciare e dimostrare il teorema fondamentale del calcolo generalizzato.
iii) Enunciare il teorema di Stokes.
iv) Mostrare che la circuitazione di un campo irrotazionale lungo una curva chiusa è nulla.

I.4.T2.V.O. i) Cosa si intende per dimensione di uno spazio vettoriale?
ii) Cosa si intende per isomorfismo di spazi vettoriali?
iii) Dimostrare che la dimensione è un invariante completo per isomorfismi.

Tempo a disposizione 2h
Le risposte vanno adeguatamente giustificate

Geometria 2/9/2002

$\boxed{\begin{array}{l} \text{I.1 E1} \\ \text{I.2.E1} \end{array}}$ in $\mathbb{R}^4$ $U : \langle \underset{u_1}{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}}, \underset{u_2}{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}}, \underset{u_3}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}}, \underset{u_4}{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}} \rangle$

Determiniamo dim U e una base

Ovviamente, osserviamo che $u_1 + u_2 = u_4$

inoltre i vettori u_2 e u_3 sono indip e u_1 non può essere loro combinazione lineare [la 3ª comp di u_1 e u_3 è nulla quella di u_2 è 1]

$\Rightarrow U = \langle \underbrace{u_1, u_2, u_3}_{\text{base}} \rangle$

ortonormalizziamola. Facciamolo .. a mano

$\langle u_1, u_3 \rangle = \langle f_1, u_3 \rangle$ con $f_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$

base orton. di $\langle u_1, u_3 \rangle$

$$U = \langle \underset{f_1}{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}}, \underset{\substack{\frac{u_2}{\sqrt{2}} = f_2}}{\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}}, \underset{\substack{u_3 = f_3}}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}} \rangle$$

base ortonormale

$U^\perp$: ... Dirett.

$U^\perp = \langle \begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \rangle$

equazioni di $U^\perp$

$U^\perp$: $\langle v \mid f_1 \rangle = 0 \Rightarrow z = 0$

$v = \begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}$ $\langle v \mid u_2 \rangle = 0 \Rightarrow y + w = 0 \quad w = -y$

$\langle v \mid u_3 \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$

I.3.E1
I.4.E1

$$U : \left\langle \underset{u_1}{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}}, \underset{u_2}{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}}, \underset{u_3}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}}, \underset{u_4}{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}} \right\rangle$$

$$u_4 = u_1 + u_2$$

u_2 e u_3 sono lin. indip e u_1 non è loro comb. lineare

$$U = \langle \underbrace{u_1, u_2, u_3}_{\text{base}} \rangle$$

$$U = \left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\boxed{\underset{f_1}{} \quad \underset{f_2}{} \quad \underset{f_3}{} \quad \text{base orto}}$$

$$U^\perp : \quad \langle v \mid f_i \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \\ y - w = 0 \end{cases}$$

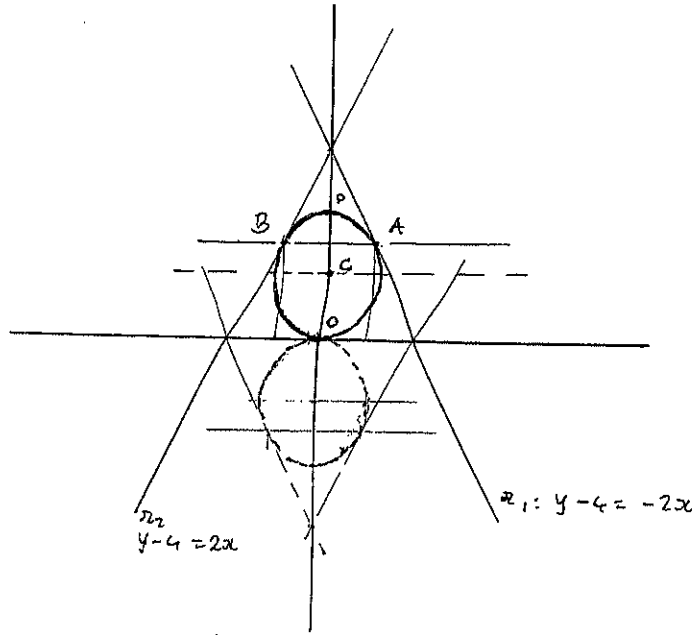
$$U^\perp = \left\langle \begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \right\rangle$$

I.1.E2
I.2.E2

conica tangente in $A:(1,2)$, $B:(-1,2)$

a $r_1: y - 4 + 2x = 0$
$r_2\ y - 4 - 2x = 0$

e alla retta $s: y = 0$



fascio di coniche bitangenti $\quad r_1 r_2 + \lambda \underbrace{(AB)^2}_{y-2=0} = 0$

$$(y-4+2x)(y-4-2x) + \lambda(y-2)^2 = 0$$

intersechiamo con l'asse x $(s: y=0)$ e imponiamo un'intersezione doppia

$$(2x-4)(-2x-4)+4\lambda=0$$

$$(-4)^2-4x^2+4\lambda=0$$

$$16-4x^2+4\lambda=0$$

$$4-x^2+\lambda=0$$

$$x^2-(4+\lambda)=0$$

Deve essere $\lambda=-4 \Rightarrow x=0$ (doppia)

$$(y-4+2x)(y-4-2x)-4(y-2)^2=0$$

$$(y-4)^2-4x^2-4(y-2)^2=0$$

$$y^2-8y+16-4x^2-4(y^2-4y+4)=0$$

$$y^2-8y+16-4x^2-4y^2+16y-16=0$$

$$-4x^2-3y^2+8y=0$$

$$4x_1^2+3x_2^2-8x_2x_0=0$$

$$A:\begin{pmatrix}0&0&-4\\0&4&0\\-4&0&3\end{pmatrix}$$

polare di $[0,1,0]$ $\quad (1\ x\ y)\begin{pmatrix}0&0&-4\\0&4&0\\-4&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=0$

$(1\ x\ y)\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}=0 \qquad 4x=0 \qquad \boxed{x=0}$

polare di $[0,0,1]$: $(1\ x\ y)\begin{pmatrix}-4\\0\\3\end{pmatrix}$ $\quad -4+3y=0$ $\quad \boxed{y=\frac{4}{3}}$

$\Rightarrow C_1:\left(0,\frac{4}{3}\right)$ $\qquad$ $\boxed{\text{assi: } x=0 \text{ e } y=\frac{4}{3}}$ (A_{00} è già diagonale...)

inciso riconosciamo C_1 anche con la seguente cons. di bisettrice C_1 è sull'asse y, per determinarlo troviamo [illegible]

verifica.. $(y-4)^2-4(y-2)^2=0$

$$(y-4-2(y-2))(y-4+2(y-2))=0$$

$$(y-4-2y+4)(y-4+2y-4)=0$$

$$(-y)(3y-8)=0$$

$\Rightarrow y=0 \Rightarrow 0$, $y=\frac{8}{3}$ $\Rightarrow C_1=\frac{0+P}{2}=\left(0,\frac{4}{3}\right)$

calcoliamo direttamente i semiassi. $\longrightarrow \boxed{a=\frac{4}{3}}$

intersechiamo $\mathcal{C}$ con $\{y=\frac{4}{3}\}$

$$4x^2+3y^2-8y=0$$

$$4x^2+3\frac{16}{9}-8\frac{4}{3}=0$$

$$4x^2+\frac{16}{3}-\frac{32}{3}=0 \qquad 4x^2-\frac{16}{3}=0$$

$$x^2=\frac{16}{12}=\frac{4}{3} \qquad x=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$\boxed{b=\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{2}{\sqrt{3}}}$

in effetti $a/b=\frac{2}{\sqrt{3}}>1$

I·3·E2
I·4·E2

conica tangente in $A:(1,-2)$
$B:(-1,-2)$

a $\quad r_1: -y-4+2x=0$

$y+4-2x=0$

$y=2x-4$

$r_2: -y-4-2x=0 \qquad y+4+2x=0$

$y=-2x-4$

e a $s: y=0$

Stesso metodo, stessi assi e simmetrici, v. figura tratteggiata (si ottiene dall'altra tramite la simmetria $x \mapsto -x$, $y \mapsto -y$)

Commento: in questo caso il calcolo degli assi era banale, ma molti sono rimasti perplessi..

$$(1 \quad m)\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-m\\ 1\end{pmatrix}=0$$

$$\Rightarrow (1 \quad m)\begin{pmatrix}-4m\\ 3\end{pmatrix} = -4m+3m=-m=0$$

$$\Rightarrow m=0$$

si trova una sola radice!

$$\Downarrow$$

$$y=\frac{4}{3}$$

Ovviamente, l'altro asse è l'asse y : $x=0$

lo abbiamo "preso" poiché abbiamo disomogeneizzato un fascio diretto!

☆ Si doveva ragionare, più correttamente, così:

$$(l \quad m)\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-m\\ l\end{pmatrix}=0 \qquad \begin{pmatrix}l\\ m\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$(l \quad m)\begin{pmatrix}-4m\\ 3l\end{pmatrix}=0$$

$$-4ml+3ml=0 \Rightarrow -ml=0$$

$$\Rightarrow ml=0 \Rightarrow \begin{cases} m=0 \\ l=0\end{cases}$$

($l\neq 0$ perché altrimenti $l=0$)

$$\boxed{\begin{matrix} m=0 & \text{direzione dell'asse } x \\ l=0 & \text{" " " } y\end{matrix}}$$

($\Rightarrow$ per es. $m=1$)

$[0,1,0]$

$[0,0,1]$

proiettivamente

e ritroviamo la soluzione "persa"!

Geometria

Ingegneria Gestionale

Prova scritta del 2 settembre 2002: II° canale N.O.

Tema II.1

II.1.E1. i) Determinare il vettore $w_4 = (x, y)^t \in \mathbf{R}^2$ tale che esista $T \in Hom(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^2)$ in modo che

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \mapsto w_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mapsto w_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto w_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \mapsto w_4 := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

L'omomorfismo T è unico?
ii) Determinare $T^{-1}\{(0,1)^t\}$.

II.1.E2. i) Nel piano euclideo reale $\mathbf{E}^2$, in cui sia fissato un riferimento cartesiano (e ampliato proiettivamente) determinare la conica C passante per $A_1 : [0,1,1]$, $A_2 : [0,1,2]$, $P : [1,0,2]$ e con centro $C : [1,0,1]$.
ii) Determinarne il tipo affine, il tipo metrico e gli assi, abbozzandone il grafico.

II.1.T1. i) Dare la definizione generale di spazio affine e fornire possibilmente almeno due esempi.
ii) Dare la definizione di sottospazio affine, e dire che cosa si intende con l'affermare che due sottospazi affini sono 1) incidenti, 2) paralleli.
iii) Enunciare e dimostrare, sia in forma geometrica (vettoriale) che in forma matriciale, il *teorema di Rouchè-Capelli.*

II.1.T2. *i) Dare la definizione di forma bilineare simmetrica su uno spazio vettoriale (di dimensione finita) e definire la nozione di ortogonalità rispetto a tale forma.*
ii) Dare la definizione di vettore isotropo.
iii) Dare la definizione di congruenza per matrici simmetriche, e collegarla alle forme bilineari simmetriche.
iv) Enunciare il teorema di diagonalizzazione per forme bilineari simmetriche in generale e interpretarlo in termini di congruenze.
v) Quale invariante completo per congruenza si ha nel caso reale?
vi) Discutere, nel caso $n = 3$, l'interpretazione geometrica della teoria.

Tempo a disposizione 2h
Le risposte vanno adeguatamente giustificate

Geometria

Ingegneria Gestionale

Prova scritta del 2 settembre 2002: II° canale N.O.

Tema II.2

II.2.E1. i) Determinare il vettore $w_4 = (x, y)^t \in \mathbf{R}^2$ tale che esista $T \in Hom(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^2)$ in modo che

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \mapsto w_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mapsto w_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto w_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \mapsto w_4 := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

L'omomorfismo T è unico?
ii) Determinare $T^{-1}\{(0,1)^t\}$.

II.2.E2. i) Nel piano euclideo reale $\mathbf{E}^2$, in cui sia fissato un riferimento cartesiano (e ampliato proiettivamente) determinare la conica C passante per $A_1 : [0,1,1]$, $A_2 : [0,1,2]$, $P : [1,0,2]$ e con centro $C : [1,0,1]$.
ii) Determinarne il tipo affine, il tipo metrico e gli assi, abbozzandone il grafico.

II.2.T1. i) Si specifichino le proprietà caratterizzanti del determinante di una matrice quadrata $A \in M_n(K)$, dandone (in dimensione 2 o 3) un'interpretazione geometrica.
ii) Si dimostri che $A \in M_n(K)$ è invertibile se e solo se $detA \neq 0$.
iii) Definire il concetto di minore di una matrice qualsiasi, enunciare il teorema dei minori orlati.

II.2.T2. i) Data una conica irriducibile C in $\mathbf{P}^2$ (in cui è fissato un riferimento proiettivo),
i) si definisca analiticamente la polare di un punto rispetto a C.
ii) Si enunci e si dimostri il *teorema di reciprocità.*
iii) Si dia l'interpretazione geometrica della polare, giustificandola tramite ii).
iv) Dare la definizione di triangolo autopolare, fornendone poi un'interpretazione algebrica.
v) Sia dia la definizione conica a centro, di diametro di una tale conica e di diametro ad esso coniugato.
Nel piano affine, si accenni a una costruzione geometrica di quest'ultimo.

Tempo a disposizione 2h
Le risposte vanno adeguatamente giustificate

Geometria

Ingegneria Gestionale

Prova scritta del 2 settembre 2002: II^0 canale N.O.

Tema II.3

II.3.E1. i) Determinare il vettore $w_4 = (x, y)^t \in \mathbf{R}^2$ tale che esista $T \in Hom(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^2)$ in modo che

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \mapsto w_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mapsto w_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto w_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \mapsto w_4 := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

L'omomorfismo T è unico?
ii) Determinare $T^{-1}\{(1,1)^t\}$.

II.3.E2. i) Nel piano euclideo reale $\mathbf{E}^2$, in cui sia fissato un riferimento cartesiano (e ampliato proiettivamente) determinare la conica C passante per $A_1 : [0,1,1]$, $A_2 : [0,2,1]$, $P : [1,2,0]$ e con centro $C : [1,1,0]$.
ii) Determinarne il tipo affine, il tipo metrico e gli assi, abbozzandone il grafico.

II.3.T1. i) Cosa si intende per spazio vettoriale euclideo?
ii) Dare la definizione di base ortonormale.
iii) Enunciare e dimostrare il teorema di Pitagora.
iv) Enunciare il teorema della proiezione ortogonale.
v) Definire il gruppo ortogonale e precisarne il ruolo nel teorema spettrale.

II.3.T2. i) Enunciare e dimostrare il teorema di Green.
ii) Enunciare il teorema della divergenza.
iii) Mostrare che il flusso di un campo solenoidale attraverso una superficie chiusa è nullo.

Tempo a disposizione 2h
Le risposte vanno adeguatamente giustificate

Geometria

Ingegneria Gestionale

Prova scritta del 2 settembre 2002: II^0 canale N.O.

Tema II.4

II.4.E1. i) Determinare il vettore $w_4 = (x, y)^t \in \mathbf{R}^2$ tale che esista $T \in Hom(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^2)$ in modo che

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \mapsto w_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mapsto w_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto w_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \mapsto w_4 := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

L'omomorfismo T è unico?
ii) Determinare $T^{-1}\{(1,1)^t\}$.

II.4.E2. i) Nel piano euclideo reale $\mathbf{E}^2$, in cui sia fissato un riferimento cartesiano (e ampliato proiettivamente) determinare la conica C passante per $A_1 : [0,1,1]$, $A_2 : [0,2,1]$, $P : [1,2,0]$ e con centro $C : [1,1,0]$.
ii) Determinarne il tipo affine, il tipo metrico e gli assi, abbozzandone il grafico.

II.4.T1. Sia dato uno spazio vettoriale (V, K).
i) Che cosa si intende col dire: "i vettori $v_1, v_2, \ldots v_k$ generano V"?
ii) Che cosa si intende per base di uno spazio vettoriale (finitamente generato)?
iii) Enunciare il teorema dello scambio.
iv) Dimostrare che tutte le basi hanno lo stesso numero di vettori.
v) Definire il concetto di dimensione di uno spazio vettoriale.
vi) Se in V troviamo k vettori linearmente indipendenti, cosa si può affermare su $dimV$?

II.4.T2. i) Definire, nel piano, la nozione di forma differenziale chiusa, esatta, e la relazione intercorrente tra le due.
ii) Enunciare e dimostrare il teorema fondamentale del calcolo generalizzato.
ii) Enunciare il teorema di Stokes.
iii) Mostrare che la circuitazione di un campo irrotazionale lungo una curva chiusa è nulla.

Tempo a disposizione 2h
Le risposte vanno adeguatamente giustificate

Lezio 2/9/2002

II.1.E1

II.2.E1

Dat. $w_4 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

tale che esista $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

in modo che

$$v_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \longmapsto w_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_2 : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \longmapsto w_2 : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_3 : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto w_3 : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_4 : \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \longmapsto w_4 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Sol: formiamo la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & x & y \end{array}\right) \overset{r_{-3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & x & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & x & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \boxed{x = 0}$ $\boxed{y = -2}$ 67

$\Rightarrow$ T esiste se $x = 0$, $y = -2$

in tal caso, trovate la base $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

è descritto così:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{T}$$

osservare

Determiniamo $T^{-1}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

Si ha: $v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in T^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (sol. particolare)

basta determinare il nucleo di T.

Sia $x'\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + y'\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + z'\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker T$:

per definizione, si ha:

$$T(\quad) = x'\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y'\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z'\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = 0 \\ x' + z' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x' = 0 \\ y' = y' \\ z' = 0 \end{array}$$

$\Rightarrow \ker T = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$ (attenzione!)

$\Rightarrow T^{-1}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$ 68

$T^{-1}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1+2t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$

II · 3 · E1
II · 4 · E1

Stesso problema ....

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & x & y \end{array}\right) \xrightarrow{2\cdot} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & x & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & x & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} x=0 \\ y=3 \end{array}$$

$$\text{base} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \text{calc. } T^{-1}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Si ha $v_0 = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \in T^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

Ker T

$$x'\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + y'\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + z'\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x'=0 \\ x'+z'=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x'=0 \\ y'=y' \\ z'=0 \end{array}$$

$\Rightarrow \text{Ker } T = \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \right\rangle$ (attenzione!)

$$T^{-1}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix}1\\2+t\\2+2t\end{pmatrix} \,/\, t\in\mathbb{R} \right\}$$

$\boxed{69}$

Descriviamo altre due varianti (lemi II.1,2 per gli altri sono analoghe)

1ª (elegante): Osserviamo che $\rho(T) = 2$ $(= \max)$

$$\Rightarrow \nu(T) = \dim \text{Ker } T = \underset{(N+R)}{3-2} = 1$$

ma $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \in \text{Ker } T \Rightarrow$

$$\text{Ker } T = \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \right\rangle.$$

2ª Procuriamoci $m_{fe}(T)$

base canonica di $\mathbb{R}^2$ — base canonica di $\mathbb{R}^3$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow m_{fe}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Risolviamo $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x=0 \\ -x-2y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ z-2y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=y \\ z=1+2y \end{cases} \quad \text{ok}$$

$\boxed{70}$

II.1.E2
II.2.E2

Conica $\mathcal{C}$ passante per
$A_1: [0,1,1]$ $A_2: [0,1,2]$
$P: [1,0,2]$ con centro in $C: [1,0,1]$

det. assi e forma canonica metrica

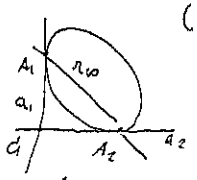
Sol: A_1 e A_2 dànno le direzioni degli asintoti;
le loro rispettive equazioni sono (dovendo passare per C)

$$a_1: \begin{cases} x = t \\ y = 1+t \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} y = x+1 \\ a_1: x-y+1=0 \end{array}$$

$$a_2: \begin{cases} x = t \\ y = 1+2t \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} y = 2x+1 \\ a_2 \quad 2x-y+1=0 \end{array}$$

$\Rightarrow \mathcal{C}$ appartiene al fascio di coniche bitangenti:

$$a_1 a_2 + \lambda r_\infty^2 = 0 \qquad \leftarrow \text{forma non omogenea}$$



$$(x-y+1)(2x-y+1) + \lambda = 0$$

(descr. affine)

Imponendo il passaggio per P si ha:

$$\overbrace{(-2+1)}^{-1}\overbrace{(-2+1)}^{-1} + \lambda = 0$$

$$\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$

$$\mathcal{C}: (x-y+1)(2x-y+1) - 1 = 0$$

$$2x^2 + y^2 - 2xy - xy + 2x - y + x - y + 1 - 1 = 0$$

$$2x^2 + y^2 - 3xy + 3x - 2y = 0$$

$$\Rightarrow \underset{\text{matrice di } \mathcal{C}}{A}: \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ \frac{3}{2} & 2 & -\frac{3}{2} \\ -1 & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

oppure $A: \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

$$\mathfrak{a} = 18 + 18 - 16 - 18 = 2$$

$$\mathfrak{a}_{00} = 8 - 9 = -1 < 0 \quad \text{(iperbole)}$$

... come era da attendersi!

$$\mathfrak{y} = 6$$

$$t^2 + \frac{\mathfrak{a}_{00}\,\mathfrak{y}}{\mathfrak{a}} t + \frac{\mathfrak{a}_{00}^3}{\mathfrak{a}^2} = 0$$

$$t^2 - 3t - \frac{1}{4} = 0 \qquad 4t^2 - 12t - 1 = 0$$

$$t = \frac{6 \pm \sqrt{36+4}}{4} = \frac{6 \pm \sqrt{40}}{4} = \frac{6 \pm 2\sqrt{10}}{4} =$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{10}}{2} \qquad \frac{1}{\alpha} = \frac{3+\sqrt{10}}{2} > 0 \qquad a = \sqrt{\frac{2}{3+\sqrt{10}}}$$

$$\frac{1}{\beta} = \frac{3-\sqrt{10}}{2} < 0 \qquad b = \sqrt{\frac{2}{-3+\sqrt{10}}}$$

Gli assi si possono ottenere come bisettrici degli asintoti

$$a_1: \quad x - y + 1 = 0$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}(x - y + 1) = 0$$

$$a_2: \quad \frac{1}{\sqrt{5}}(2x - y + 1) = 0$$

assi:
$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)x - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)y + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 0$$

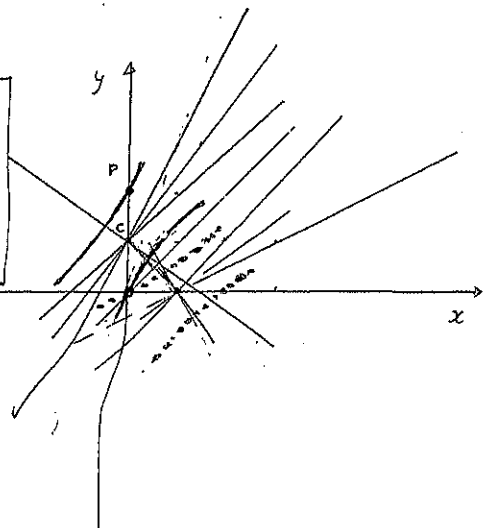
$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)x + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)y + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 0$$

I.1.E2 —
I.2.E2

I.3.E2 ...
I.4.E2

$A_1: [0,1,1]$
$A_2: [0,2,1]$
$P: [1,2,0]$
$C: [1,1,0]$

$x \leftrightarrow y$ simmetrica di — rispetto a $y = x$



Nella forma canonica metrica

$$(\sqrt{5} + 2\sqrt{2})x - (\sqrt{2} + \sqrt{5})y + (\sqrt{2} + \sqrt{5}) = 0$$

asse trasverso

coeff. angolare = (v. p. successiva)(*)
$\frac{1+\sqrt{10}}{3} = m_1$

$$(\sqrt{5} - 2\sqrt{2})x + (-\sqrt{5} + \sqrt{2})y + (\sqrt{5} - \sqrt{2}) = 0$$

asse focale

$m_2 = \frac{1-\sqrt{10}}{3}$

Anche in altro modo

Diametri coniugati ortogonali:

$$\begin{pmatrix} 1 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -m \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4m - 3 \\ 3m + 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$-4m - 3 + m(3m + 2) = 0$$

$$-4m - 3 + 3m^2 + 2m = 0$$

$$3m^2 - 2m - 3 = 0$$

$$m_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1+9}}{3} = \frac{1 \pm \sqrt{10}}{3} \qquad m_+ > 0 \quad m_- < 0$$

(Check: $\frac{1+\sqrt{10}}{3} \cdot \frac{1-\sqrt{10}}{3} = \frac{1-10}{9} = -1$)

Assi

$$y = 1 + m_\pm x$$ asse trasverso / asse focale

(*) controllo ulteriore con il calcolo precedente

asse trasverso: $\frac{\sqrt{5} + 2\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{5} + 2\sqrt{2})(\sqrt{2} - \sqrt{5})}{\underbrace{2 - 5}_{-3}} =$

$$= \frac{\sqrt{10} + 4 - 5 - 2\sqrt{10}}{-3} = \frac{-\sqrt{10} - 1}{-3} = \frac{1 + \sqrt{10}}{3} \quad \text{OK}$$

analogo discorso per l'asse focale ...

Geometria

Ingegneria Gestionale

Prova scritta del 16 settembre 2002: V.O. e I° canale N.O.

Tema I.1

I.1.E1. i) Verificare la seguente famiglia di endomorfismi $T_\lambda \in End(\mathbb{R}^3)$ (per $\lambda \in \mathbb{R}$) è ben definita e determinarne la matrice rappresentativa $m_{ee}(T_\lambda)$, dove $e = (e_1, e_2, e_3)$ denota la base canonica di $\mathbf{R}^3$:

$$e_1' := \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \mapsto w_1 := \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad e_2' := \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \mapsto w_2 := \begin{pmatrix}0\\1\\\lambda\end{pmatrix}, \quad e_3' := \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \mapsto w_3 := \begin{pmatrix}0\\\lambda\\1\end{pmatrix}.$$

ii) Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$, dimensioni e basi di $KerT_\lambda$ e di ImT_λ, rispettivamente.

I.1.E2. i) Nel piano euclideo reale $\mathbf{E}^2$, in cui sia fissato un riferimento cartesiano (e ampliato proiettivamente) determinare la conica C tangente a $r : 2y - x - 2 = 0$ in $A : (2,2)$, con centro in $O : (0,0)$ e passante anche per $P : (1,0)$.

ii) Determinare gli assi, la forma canonica metrica (solo N.O.) di C e se ne abbozzi il grafico. (Sugg. Si ricordi che il centro di una conica è centro di simmetria, e che le tangenti in due punti simmetrici...)

I.1.T1. Sia dato uno spazio vettoriale (V, K).
i) Che cosa si intende col dire: "i vettori $v_1, v_2, \ldots v_k$ generano V"?
ii) Che cosa si intende per base di uno spazio vettoriale (finitamente generato)?
iii) Enunciare (e dimostrare, solo V.O.) il teorema dello scambio.
iv) Dimostrare che tutte le basi hanno lo stesso numero di vettori.
v) Definire il concetto di dimensione di uno spazio vettoriale.
vi) Se in V troviamo k vettori linearmente indipendenti, cosa si può affermare su $dimV$?

I.1.T2. Data una conica irriducibile C in $\mathbf{P}^2$ (in cui è fissato un riferimento proiettivo),
i) si definisca analiticamente la polare di un punto rispetto a C.
ii) Si enunci e si dimostri il teorema di reciprocità.
iii) Si dia l'interpretazione geometrica della polare, giustificandola tramite ii).
iv) Dare la definizione di triangolo autopolare, fornendone poi un'interpretazione algebrica.
v) Sia dia la definizione conica a centro, di diametro di una tale conica e di diametro ad esso coniugato. Nel piano affine, si accenni a una costruzione geometrica di quest'ultimo.

Tempo a disposizione 2h
Le risposte vanno adeguatamente giustificate

Geometria

Ingegneria Gestionale

Prova scritta del 16 settembre 2002: V.O. e I° canale N.O.

Tema I.2

I.2.E1. i) Verificare la seguente famiglia di endomorfismi $T_\lambda \in End(\mathbb{R}^3)$ (per $\lambda \in \mathbb{R}$) è ben definita e determinarne la matrice rappresentativa $m_{ee}(T_\lambda)$, dove $e = (e_1, e_2, e_3)$ denota la base canonica di $\mathbf{R}^3$:

$$e_1' := \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \mapsto w_1 := \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad e_2' := \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \mapsto w_2 := \begin{pmatrix}0\\1\\\lambda\end{pmatrix}, \quad e_3' := \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \mapsto w_3 := \begin{pmatrix}0\\\lambda\\1\end{pmatrix}.$$

ii) Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$, dimensioni e basi di $KerT_\lambda$ e di ImT_λ, rispettivamente.

I.2.E2. i) Nel piano euclideo reale $\mathbf{E}^2$, in cui sia fissato un riferimento cartesiano (e ampliato proiettivamente) determinare la conica C tangente a $r : 2y - x - 2 = 0$ in $A : (2,2)$, con centro in $O : (0,0)$ e passante anche per $P : (1,0)$.

ii) Determinare gli assi, la forma canonica metrica (solo N.O.) di C e se ne abbozzi il grafico. (Sugg. Si ricordi che il centro di una conica è centro di simmetria, e che le tangenti in due punti simmetrici...)

I.2.T1. i) Dare la definizione generale di spazio affine e fornire almeno due esempi.
ii) Dare la definizione di sottospazio affine, e dire che cosa si intende con l'affermare che due sottospazi affini sono 1) incidenti, 2) paralleli, 3) sghembi. Fare esempi.
iii) Enunciare e dimostrare il teorema XI.3 di Euclide (solo V.O.).
iv) Enunciare e dimostrare, sia in forma geometrica (vettoriale) che in forma matriciale, il *teorema di Rouché-Capelli.*

I.2.T2. i) Cosa si intende per spazio vettoriale euclideo?
ii) Dare la definizione di base ortonormale.
iii) Enunciare e dimostrare il teorema di Pitagora.
iv) Enunciare il teorema della proiezione ortogonale.
v) Definire il gruppo ortogonale e precisarne il ruolo nel teorema spettrale.

Tempo a disposizione 2h
Le risposte vanno adeguatamente giustificate