ESERCIZI DI ALGEBRA LINEARE
E
COMPLEMENTI DI GEOMETRIA

Foglio 2*

Esempio 1. Determinare le soluzioni del sistema lineare $Ax = B$, in cui

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & -2 \\ 3 & 6 & 0 & -6 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Sol. Consideriamo la matrice aumentata

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & -2 & 6 \\ 3 & 6 & 0 & -6 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

e applichiamo ad essa l'eliminazione di Gauss. In primo luogo moltiplichiamo la prima riga per $\frac{1}{2}$ (moltiplichiamo, cioè, la matrice C per la matrice elementare $E_{11}(2^{-1})$, ottendo così una matrice ad essa equivalente):

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 6 & 0 & -6 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Quindi alla precedente matrice effettuiamo le seguenti operazioni elementari: (1) sostituiamo la seconda riga con la seconda riga meno tre volte la prima, (2) sostituiamo alla terza riga la terza meno la prima e (3) sostituiamo la quarta riga con la quarta meno la prima, ottenendo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ora moltiplichiamo la seconda riga per $-\frac{1}{3}$ ottenendo la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Infine sostituiamo alla terza riga la terza meno la seconda ottenendo una forma ridotta della matrice C:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice U possiede due colonne dominanti e tre colonne libere, inoltre la colonna dei termini noti è libera, quindi il sistema ammette infinite soluzioni dipendenti da due paramentri.

*Sono a grato a quanti mi indicheranno i molti errori presenti in questi fogli, al fine di fornire uno strumento migliore a quanti lo riterranno utile, e-mail: nicola.sansonetto@univr.it

Le soluzioni sono

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

dove $h, k \in \mathbb{C}$

Esercizio 2. Determinare le soluzioni del sistema di matrice aumentata

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & i & -i \\ 1 & -1 & 1-i & i & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2+i & 1-i & 0 & 1 \\ i & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esempio 3. Determinare la forma ridotta, le colonne dominanti, le colonne libere e il rango, al variare di $\alpha \in \mathbb{C}$ della matrice

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} i & 0 & -i & i\alpha \\ 1 & \alpha^2+4 & 0 & \alpha \\ 1 & \alpha^2+4 & 0 & 2\alpha \end{bmatrix}$$

Sol. Effettuiamo operazioni elementari sulla matrice A_α, mettendole in evidenza mediante le moltiplicazioni per matrici elemntari.

$$A'_\alpha = E_{11}(-i)A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 1 & \alpha^2+4 & 0 & \alpha \\ 1 & \alpha^2+4 & 0 & 2\alpha \end{bmatrix}$$

$$A''_\alpha = E_{21}(-1)E_{31}(-1)A'_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & \alpha^2+4 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha^2+4 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$$

Sia ora $\alpha^2 + 4 \neq 0$, allora

$$A'''_\alpha = E_{22}((\alpha^2+4)^{-1})A''_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 1 & (\alpha^2+4)^{-1} & 0 \\ 0 & \alpha^2+4 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$$

$$A''''_\alpha = E_{32}(-(\alpha^2+4))A'''_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 1 & (\alpha^2+4)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

Se inoltre $\alpha \neq 0$ dividiamo l'ultima riga per α, otteniamo una forma ridotta di A_α per $\alpha \neq 0,\ 2i,\ -2i$

$$U_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 1 & (\alpha^2+4)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se $\alpha = 2i,\ -2i$, allora

$$U_{\pm 2i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \pm 2i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mp 2i \end{bmatrix}$$

Se, infine, $\alpha = 0$

$$U_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Riassumendo e pensando alla matrice A_α come alla matrice aumentata di un sistema lineare:

- se $\alpha \neq 0,\ \pm 2i$, allora la prima, seconda e quarta colonna sono dominanti, mentre la terza è libera. Il rango di A_α è 3. Il sistema associato, essendo la matrice dei termini noti dominante, non ammette soluzioni;
- se $\alpha = \pm 2i$, allora la prima, la terza e la quarta colonna sono dominanti, mentre la seconda è libera. Il rango di $A_{\pm 2i}$ è 3. Il sistema associato, essendo la colonna dei termini noti dominante, non ammette soluzioni;

- se $\alpha = 0$, allora la prima e la seonda colonna sono dominanti, mentre la terza e la quarta sono libere. La matrice A_0 ha rango 2. Il sistema associato, essendo la colonna dei temini noti libera, ammete infinite soluzioni dipendenti da un paramentro. In tal caso le soluzioni sono
$$x = h \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix},$$
dove $h \in \mathbb{C}$

Esercizio 4. Determinare le soluzioni del sistema $Ax = B$, in cui

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ \alpha+1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Esercizio 5. Determinare al variare di $\alpha \in \mathbb{C}$ le soluzioni del sistema lineare di matrice aumentata

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 2\alpha & \alpha & \alpha & 6\alpha \\ 1 & 4 & 5 & 7 & 12 \\ 2 & 3 & \alpha+1 & -1 & 7+2\alpha \\ 1+\alpha & 5+2\alpha & 7+\alpha & 10+\alpha & 15+6\alpha \end{bmatrix}$$

Esercizio 6. Determinare, alvariare di $\alpha \in \mathbb{C}$ le soluzioni del sistema lineare nelle incognite x, y, z:

$$\begin{cases} y - \alpha x + (\alpha-2)(z+1) = 0 \\ (\alpha-1)x + \alpha z = 2 \\ x + \alpha y + 2\alpha^2 z = 0 \end{cases}$$

Esercizio 7. Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{C}$ le soluzione del sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + \alpha x_3 + 2x_4 = \alpha \\ x_1 + 6x_2 + \alpha x_3 + 3x_4 = 2\alpha + 1 \\ -x_1 - 3x_2 + (\alpha-2)x_4 = 1 - \alpha \\ \alpha x_3 + (2-\alpha)x_4 = 1 \end{cases}$$

Esempio 8. Determinare le inverse destre della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e le inverse sinistre della matrice

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Sol. Determianiamo le inverse destre della matrice A, lasciando per esercizio il calcolo delle inverse sinistre della matrice B.

La generica candidata inversa destra di A è una matrice R del tipo

$$R = \begin{bmatrix} a & e & i \\ b & f & l \\ c & g & m \\ d & h & n \end{bmatrix}$$

e tale che $AR = 1_{3\times3}$. Ora

$$AR = \begin{bmatrix} a-c+3d & e-g+3h & i-m+3n \\ b+d & f+h & l+n \\ -2a+3b-c & -2e+3f-g & -2i+3l-m \end{bmatrix}$$

Ora AR è uguale all'identità se e solo se sono soddisfatti i seguenti sistemi di tre equazioni in quattro incognite

$$\begin{cases} a - c + 3d = 1 \\ b + d = 0 \\ -2a + 3b - c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} e - g + 3h = 0 \\ f + h = 1 \\ -2e + 3f - g = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} i - m + 3n = 0 \\ l + n = 0 \\ -2i + 3l - m = 1 \end{cases}$$

Applicando il metodo di Eliminazione di Gauss, si vede che i tre sistemi ammettono infinite soluzioni dipendenti da un parametro

$$\begin{cases} a = \frac{1}{3} - 2r \\ b = -r \\ c = -\frac{2}{3} + r \\ d = r \end{cases} \qquad \begin{cases} e = 1 - 2s \\ f = 1 - s \\ g = 1 + s \\ h = s \end{cases} \qquad \begin{cases} i = -\frac{1}{3} - 2t \\ l = -t \\ m = -\frac{1}{3} + t \\ n = t \end{cases}$$

(Attenzione: i parametri sono r, s, t!) Quindi le inverse destre della matrice A sono le matrici della forma

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} - 2r & 1 - 2s & -\frac{1}{3} - 2t \\ -r & 1 - s & -t \\ -\frac{2}{3} + r & 1 + s & -\frac{1}{3} + t \\ r & s & t \end{bmatrix}$$

con $r, s, t \in \mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{C}$.

Esempio 9. Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ la matrice

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -2\alpha & -3 \\ 0 & \alpha & -1 \\ 1 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

è invertibile. Per tali α determinare l'inversa A_α^{-1}

Sol. In primo luogo determiniamo il rango di A_α al variare di α in $\mathbb{C}$, determinando una forma a scala di A_α.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2\alpha & -3 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha + 5 \end{bmatrix}$$

È semplice osservare che se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq -5$ allora la matrice A_α ha rango massimo (pari a tre) e quindi è invertibile. Consideriamo la matrice pluriaumentata $(A_\alpha | 1_{3\times3})$ e tramite operazioni elementari cerchiamo di arrivare (e lo possiamo fare perché in questi casi A_α è invertibile) ad una matrice pluriaumentata del tipo $(1_{3\times3} | B_\alpha)$ e B_α sarà l'inversa di A_α.

$$(A_\alpha | 1_{3\times3}) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2\alpha & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Sostituiamo la terza riga con la terza meno la prima ottenendo la matrice

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2\alpha & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2\alpha & \alpha + 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Quindi sostituiamo la terza riga con la terza meno due volte la seconda

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2\alpha & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha + 5 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

Ora sostituiamo la seconda riga con $(\alpha + 5)$ volte la seconda più la terza e la prima riga con $(\alpha + 5)$ volte la prima meno tre volte la terza

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \alpha + 5 & -2\alpha & 0 & \alpha + 2 & -6 & +3 \\ 0 & \alpha(\alpha + 5) & 0 & -1 & \alpha + 3 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha + 5 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

Infine sostituiamo la prima riga con la prima più due volte la seconda

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \alpha+5 & 0 & 0 & \alpha & 2\alpha & 5 \\ 0 & \alpha(\alpha+5) & 0 & -1 & \alpha+3 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha+5 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

Infine dividiamo la prima e la terza per $(\alpha+5)$, e la seconda per $\alpha(\alpha+5)$. Quindi l'inversa di A_α, per $\alpha \neq 0,\ -5$ è

$$A_\alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha+5}\left[\begin{array}{ccc} \alpha & 2\alpha & 5 \\ -\frac{1}{\alpha} & \frac{\alpha+3}{\alpha} & \frac{1}{\alpha} \\ -1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

Esercizio 10. Dimostrare che se $U \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ è unitaria e hermitiana, allora $P := \frac{1}{2}(1_{n\times n} - U)$ è tale che $P = P^H$ e $P^2 = P$. Viceversa, se $P \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ è una matrice tale che $P = P^H$ e $P^2 = P$, allora $U = 1_{n\times n} - 2P$ è unitaria e hermitiana. (Ricordiamo che una matrice $U \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ si dice unitaria se $UU^H = 1_{n\times n} = U^H U$.)