ALGEBRA LINEARE CON ELEMENTI DI GEOMETRIA (Proff. L. Angelini e M. Spera)

modulo: ELEMENTI DI GEOMETRIA Prof. M. Spera

a.a. 2009/10

Prova scritta del 1° febbraio 2010

(1) Nello spazio euclideo reale E^3, in cui sia fissato un riferimento cartesiano, dopo aver verificato che $r: \begin{cases} x+y+z-1=0 & \sim \pi' \\ x-2y+z-1=0 & \sim \pi'' \end{cases}$

rappresenta una retta, e dopo averne individuato parametri direttori, si determini il piano del fascio di asse r passante per $P:(1,0,2)$. 2. Si scriva successivamente l'equazione del il piano π''' passante per P e perpendicolare a r.

3. Si determini H, pto di minima distanza di P da r, e si calcoli quest'ultima. 4. Si individui P', proiezione ortogonale di P su π' e si calcoli $d(P,\pi')$. Com'è il triangolo $PP'H$? Calcolarne l'area... Facoltativo: determinare l'incentro I di $PP'H$

(2) Nel piano euclideo reale, in cui sia fissato un riferimento cartesiano, e ampliato proiettivamente, determinare il fascio di coniche tangenti a $x_0=0$ in $A:[0,1,2]$ e in $O:[1,0,0]$ alla retta r di direzione $R:[0,2,-1]$. Di che tipo di coniche si tratta, dal punto di vista affine? 2. Mostrare successivamente che esse hanno lo stesso asse a e lo stesso vertice, e determinarli.
3. In seguito, determinare la conica δ del fascio avente fuoco $F:[1,-2,-4]$ e calcolarne, possibilmente in due modi, la direttrice δ.
4. Abbozzare il grafico di γ. Fac. Mostrare che il "triangolo" R, F, H ($H = \delta \cap a$) è autopolare.

Tempo a disposizione 1h 15m - Le risposte vanno adeguatamente giustificate

Elementi di Geometria
1° febbraio 2010

(1) piano π del fascio di asse

$$r: \begin{cases} x+y+z-1=0 & \pi' \\ x-2y+z-1=0 & \pi'' \end{cases}$$

passante per $P: (1, 0, 2)$

$rk\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 2$

R-C ok..

$\lambda\pi' + \mu\pi'' = 0 \qquad (\lambda,\mu) \neq (0,0)$

$\lambda(x+y+z-1) + \mu(x-2y+z-1) = 0$

passaggio per $P: (1,0,2)$ $\qquad \lambda(\underbrace{1+0+2-1}_{2}) + \mu(\underbrace{1+2-1}_{2}) = 0$

$\lambda+\mu=0$ poniamo ad es. $\lambda=1, \mu=-1$

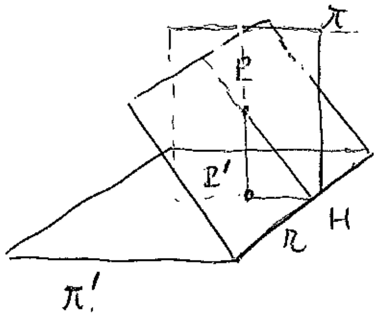
$x+y+z-1-x+2y-z+1=0$

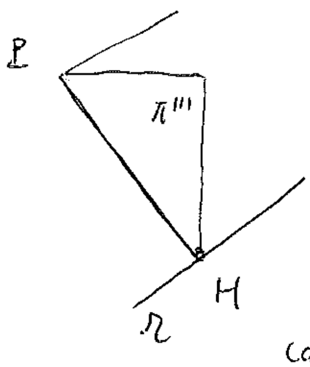
$3y=0 \qquad \boxed{\pi: \; y=0}$ (è il piano (x,z))

($P \in \pi$, ok)

H: pto di minima distanza di P da r:

Sia π''' il piano per P $\perp$ r





troviamo i parametri direttori di r:
ad es., posto

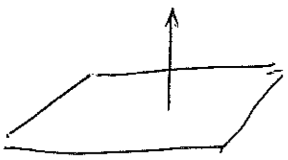
$\underline{a} = (1,1,1)$
$\underline{b} = (1,-2,1)$

consideriamo $\underline{c} = \underline{a} \times \underline{b}$

$$\underline{c} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \underline{i}\,(1+2) - j\,(1-1) + \underline{k}\,(-2-1)$$

$$= 3\,\underline{i} - 3\,\underline{k}$$

l'equazione di π''' è allora



$$(x-1) - (z-2) = 0$$

$$x - z - 1 + 2 = 0$$

$$\boxed{\pi''' : \quad x - z + 1 = 0}$$

(passa per P... ok)

altro modo:

$$r: \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ \cancel{3}y = 0 \end{cases} \sim r: \begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$\leadsto$ sottraendo la seconda eq. dalla prima

$$z = 1 - x$$

$$r: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 1 - t \end{cases}$$

troviamo $H = \underbrace{\pi' \cap \pi''}_{r} \cap \pi'''$

$\sim (l, m, n) \propto (1, 0, -1)$ ok.

si ha:

$$\begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ y = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ y = 0 \\ \cancel{2}x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{H = (0, 0, 1)}$$

[controllo con le eq. originali di π', π'', π'''... ok]

$\boxed{P : (1, 0, 2)}$

$$d(P, H)^2 = (-1)^2 + 0^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2$$

$$\boxed{d(P, H) = \sqrt{2}}$$

P': proiezione ortogonale di P su π': $x+y+z-1=0$

r_P: retta per P $\perp$ π': $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 0+t \\ z = 2+t \end{cases}$ $1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ $-\frac{2}{3}$ $2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$

$r_P \cap \pi'$: $(1+t)+t+(2+t)-1=0$

$3t+1+2-1=0$ $3t+2=0$ $t=-\frac{2}{3}$

controllo ulteriore $d(P,P') = d(P,\pi') = \frac{|1+2-1|}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ✓

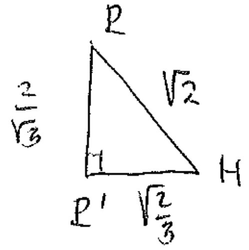
$\Rightarrow \boxed{P': \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)}$ $2-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$ $[P:(1,0,2)]$

$d(P,P')^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 = 3\,\frac{4}{9} = \frac{4}{3} \Rightarrow$

$[H:(0,0,1)]$ $d(P,P') = \frac{2}{\sqrt{3}}$

controllo $d(P',H)^2 = \frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9} = \frac{2}{3}$ $\boxed{d(P',H) = \sqrt{\frac{2}{3}}}$

Il triangolo $PP'H$ è rettangolo in P', infatti (controllo: è chiaro per costruzione!)



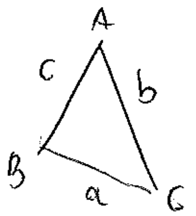
$d(P',H)^2 + d(P,P')^2 = d(P,H)^2$

$\frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{6}{3} = 2$ ✓

Area: $\frac{1}{2}\,\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

fac. troviamo l'incentro I:

$$I = \frac{a}{a+b+c}\overset{P}{A} + \frac{b}{a+b+c}\overset{P'}{B} + \frac{c}{a+b+c}\overset{H}{C}$$



$$I = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{\sqrt{3}}+\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + \frac{\sqrt{2}}{\xi}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\\\frac{4}{3}\end{pmatrix} + \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\xi}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \sqrt{2} = \underbrace{\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{2}\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}_{\xi}$

$$= \frac{1}{\xi}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{2}}{3}\\ -\frac{2\sqrt{2}}{3}\\ 2\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{4}{3}\sqrt{2}+\frac{2}{\sqrt{3}}\end{pmatrix} = \;\longrightarrow$$

$$= \frac{1}{\xi} \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}\sqrt{3} + \sqrt{2}}{3} \\ -\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \\ \dfrac{2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} =$$

$$-2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$$

$$= 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

$$= \frac{1}{\xi} \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{3} \\ -\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \\ \dfrac{2(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{3} \end{pmatrix}$$

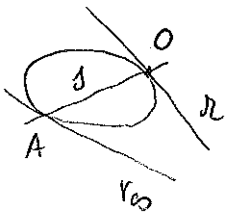
(2)

Elementi di Geometria
1° febbraio 2010

Fascio di coniche bitangenti a $x_0 = 0$
in $A: [0,1,2]$ e in $O: [1,0,0]$ alla retta r
di direzione $R: [0, 2, -1]$

Sono parabole (coniche tangenti a r_∞)

$$r: \begin{cases} x = 2t \\ y = -t \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} r:\ & x + 2y = 0 \\ & x_1 + 2x_2 = 0 \end{aligned}}$$



eq. di $s = AO$: $\begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases}$

$y = 2x$

$2x - y = 0$

$\boxed{s: 2x_1 - x_2 = 0}$

$$r r_\infty + \lambda s^2 = 0$$

$$x_0(x_1 + 2x_2) + \lambda(2x_1 - x_2)^2 = 0$$

asse (comune): s $\quad 2x - y = 0$

(diametri: $2x - y + k = 0$)

vertice (comune): O

$$x_0x_1 + 2x_0x_2 + \lambda(4x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2) = 0$$
$$x + 2y + \lambda(4x^2 - 4xy + y^2) = 0$$

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 4\lambda & -2\lambda \\ 1 & -2\lambda & \lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 8\lambda & -4\lambda \\ 2 & -4\lambda & 2\lambda \end{pmatrix}$$

($A_{00} = 0$ ok) $\quad y = 10\lambda$

$$A = -8\lambda - 8\lambda - 32\lambda - 2\lambda = -50\lambda$$

$$p = \sqrt{-\frac{\alpha}{\gamma^3}} = \sqrt{\frac{+50\lambda}{+10^3\lambda^3}} = \sqrt{\frac{1}{20\lambda^2}}$$

$\sqrt{20} = \sqrt{4\cdot 5} = 2\sqrt{5}$

$$\frac{50}{10^3} = \frac{5}{10^2} = \frac{1}{20} \qquad = \frac{1}{2\sqrt{5}\,|\lambda|}$$

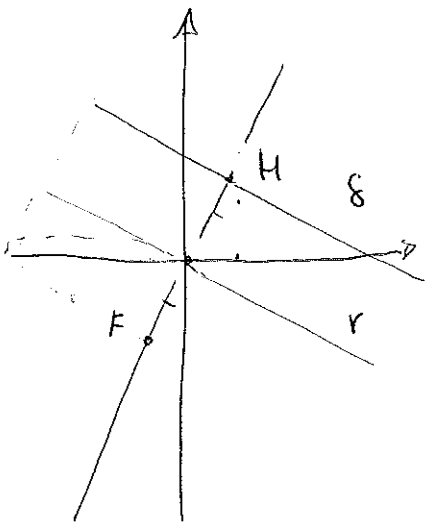
sia $\boxed{F = (-2, -4)}$

ora $$\frac{p}{2} = d(F, \underset{O}{\overset{\|}{V}}) = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$p = 4\sqrt{5}$$

$$4\sqrt{5} = \frac{1}{2\sqrt{5}\,|\lambda|} \quad \Rightarrow \quad |\lambda| = \frac{1}{40}$$

$$\lambda = \pm\frac{1}{40}$$



intersechiamo con l'asse x (i.e. $y=0$, $x_2 = 0$)

$$x + \lambda\cdot 4x^2 = 0$$

$$x(x + 4\lambda) = 0$$

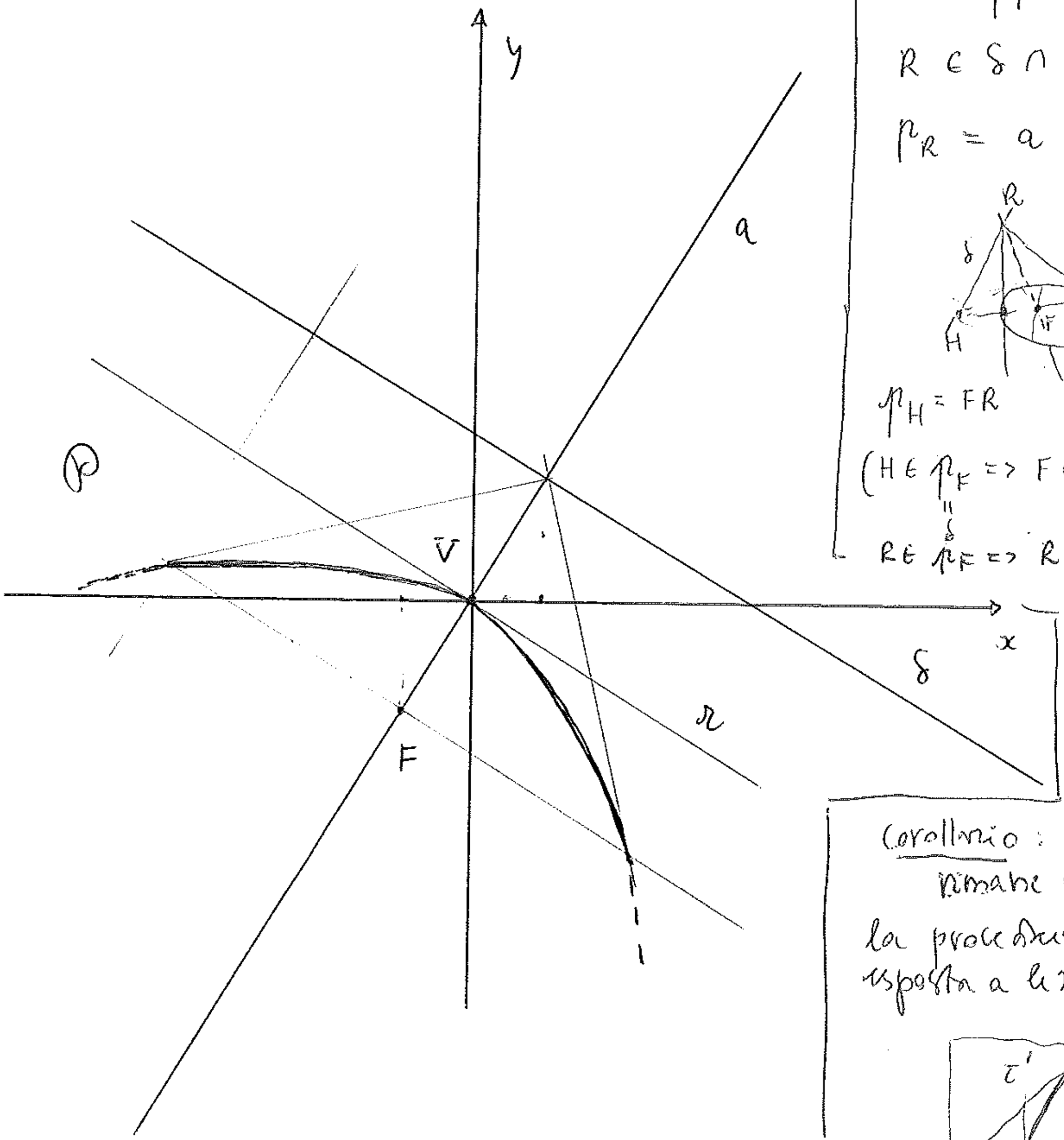
$x = 0$
$x = -4\lambda$

deve essere $\lambda > 0$ per ragioni geometriche!
(l'asse x è incontrato in 2 punti..)

$$\Rightarrow \lambda = +\frac{1}{40}$$

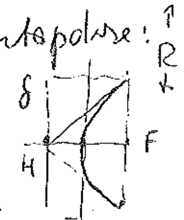
La direttrice è allora la retta δ: $(x-2) + 2(y-4) = 0$

$$x + 2y - 10 = 0$$



FACOLTATIVO:

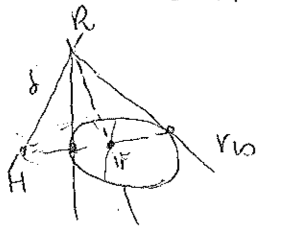
RHF è autopolare:



$\delta = p_F$

$R \in \delta \cap \tau$

$p_R = a \ni F, \ni H$

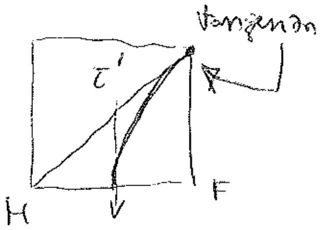


$p_H = FR$

$(H \in p_F \Rightarrow F \in p_H)$

$R \in \underset{\delta}{p_F} \Rightarrow R \in p_H$

Corollario:
rimane giustificata la procedura di disegno esposta a lezione!



controllo: δ polare di F: $\lambda = +\frac{1}{40}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 8\lambda & -4\lambda \\ 2 & -4\lambda & 2\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{10} \\ 2 & -\frac{1}{10} & \frac{1}{20} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 40 & 80 \\ 40 & 4 & -2 \\ 80 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(x_0\ x_1\ x_2)\begin{pmatrix} 0 & 40 & 80 \\ 40 & 4 & -2 \\ 80 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = 0 \qquad (x_0\ x_1\ x_2)\begin{pmatrix} -400 \\ 40 \\ 80 \end{pmatrix} = 0$$

$$-10 + x + 2y = 0$$

$$\boxed{x + 2y - 10 = 0}$$