

Foglio 7

Consegna entro giovedì 22 novembre alle ore 11:30

Esercizio 1 (8 punti). Si consideri l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito da $f(x, y, z) = [5y - x + z, x - z - y, x - 2z]^T$

1. Scrivere la matrice A associata a f rispetto alla base canonica su dominio e codominio.
2. Determinare la dimensione e una base di $\text{Im}f$
3. f è un isomorfismo?
4. Si consideri la base $\mathcal{B} = \{e_1, e_1 + e_3, e_2 + e_3\}$ di \mathbb{R}^3 . Scrivere la matrice associata a f rispetto alla base canonica sul dominio e la base \mathcal{B} sul codominio.

Esercizio 2 (Punti 5). Determinare il determinante della seguente matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Il rango di A è massimo?
2. La matrice A è invertibile?
3. Sia f_A l'endomorfismo associato ad A . f_A è iniettivo?
4. f_A è suriettivo?

Giustificare adeguatamente le risposte.

Esercizio 3 (Punti 10). Sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base di \mathbb{R}^3 e sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $f(v_1) = v_1 + v_3$, $f(v_2) = -v_2 + v_3$, $f(v_3) = v_1 + 2v_2$.

1. trovare la matrice associata a f rispetto alla base \mathcal{B} su dominio e codominio.
2. L'applicazione lineare f è iniettiva?
3. L'applicazione lineare f è suriettiva?
4. Esiste una applicazione lineare $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $f \circ g$ sia l'applicazione identica? si trovi una matrice associata a g .
5. Esiste una applicazione lineare $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $h \circ f$ sia l'applicazione identica? Si esprima $h(v_1)$, $h(v_2)$ e $h(v_3)$ come combinazione lineare di v_1 , v_2 e v_3 .

Esercizio 4 (Punti 8). In \mathbb{R}^3 si consideri la base $\mathcal{B} = \{[-1 \ 1 \ -2]^T, [2 \ 0 \ 1]^T, [0 \ -1 \ -3]^T\}$.

1. Determinare le coordinate di $v = [3 \ 1 \ 2]^T$ rispetto alla base \mathcal{B} in due modi diversi.
2. Data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $f(x, y, z) = [x - y + 2z \ z - y + x \ 2z + x]^T$, scrivere la matrice associata a f rispetto alla base canonica su dominio e codominio.
3. Determinare le coordinate rispetto alla base \mathcal{B} di $f(v)$ in due modi diversi