GEOMETRIA (Prof. M. Spera) a.a. 2010/11

Prova scritta del 20 febbraio 2012

(1) Sia data l'elica $\mathcal{E}$: $\underline{r} = \underline{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, t^2)$
$a > 0 \quad t \in \mathbb{R}$

Dimostrare che $\mathcal{E}$ è regolare e calcolarne la curvatura $k = k(t)$ in un generico pto. Determinare i piani principali nel pto $P_0 = (a, 0, 0)$.

(2) Determinare la curvatura geodetica di $\mathcal{E}$ relativamente al cilindro $x^2 + y^2 - a^2 = 0$. $\mathcal{E}$ è una geodetica? Ci si poteva aspettare a priori il risultato?

(3) Sia $X = \{1, 2, \dots n\}$. Dimostrare che

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\} \dots \underbrace{\{1,2,\dots n\}}_{X}\}$$

costituisce una topologia. Dire se $\mathcal{T}$ è di Hausdorff.

Tempo a disposizione 2h. Le risposte vanno adeguatamente giustificate

Geometria 20/12/12

(1) $\mathcal{E} = \underline{r} = \underline{r}(t) = (a\cos t,\ a\sin t,\ t^2)$

$a > 0$ (è reg.)

$\underline{r}$ è mista

$$\underline{r} = (a\cos t,\ a\sin t,\ t^2)$$

$$\dot{\underline{r}} = (-a\sin t,\ a\cos t,\ 2t) \qquad \|\dot{\underline{r}}\| = \sqrt{a^2+4t^2} > 0$$

$$\ddot{\underline{r}} = (-a\cos t,\ -a\sin t,\ 2)$$

$$\dddot{\underline{r}} = (a\sin t,\ -a\cos t,\ 0)$$

$$k = k(t) = \frac{\|\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}\|}{\|\dot{\underline{r}}\|^3}$$

$$\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -a\sin t & a\cos t & 2t \\ -a\cos t & -a\sin t & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \underline{i} \begin{vmatrix} a\cos t & 2t \\ -a\sin t & 2 \end{vmatrix} - \underline{j} \begin{vmatrix} -a\sin t & 2t \\ -a\cos t & 2 \end{vmatrix} + \underline{k} \begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t \\ -a\cos t & -a\sin t \end{vmatrix}$$

$$= \underline{i}\,(2a\cos t + 2a\sin t \cdot t)$$
$$- \underline{j}\,(-2a\sin t + 2a\cos t \cdot t)$$
$$+ \underline{k}\, a^2$$

$\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}} =$
$2a(\cos t + t\sin t)\,\underline{i} +$
$+ 2a(\sin t - t\cos t)\,\underline{j}$
$+ a^2\,\underline{k}$

$$k(t) = \frac{\sqrt{4a^2\left[(\cos t + t\sin t)^2 + (\sin t - t\cos t)^2\right] + a^4}}{(a^2+4t^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{a\sqrt{4(\cos^2 t + t^2\sin^2 t + \cancel{2t\cos t\sin t} + \sin^2 t + t^2\cos^2 t - \cancel{2t\sin t\cos t}) + a^2}}{(a^2+4t^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{a\sqrt{4(1+t^2)+a^2}\ldots}{(a^2+4t^2)^{3/2}}$$

$$k(0) = \frac{a\sqrt{4+a^2}}{a^3} = \frac{\sqrt{4+a^2}}{a^2}$$

Piani principali in $P_0 = (a, 0, 0)$

- piano normale: $\langle \underline{r} - \underline{r}_0, \underline{\dot{r}}_0 \rangle = 0$ $\quad \underline{\dot{r}}_0 = (0, a, 0)$

$$y \cdot a = 0 \Rightarrow \boxed{y = 0}$$

- piano osculatore: dir. ortogonale individuata da

$$\dot{r}_0 \times \ddot{r}_0 = \ldots \quad 2a\,\underline{i} + a^2\underline{k}$$

$$\langle \underline{r} - \underline{r}_0, \underline{\dot{r}}_0 \times \underline{\ddot{r}}_0 \rangle = 0 \qquad 2(x-a) + az = 0$$

$$\boxed{2x + az - 2a = 0}$$

passa per P_0 ✓

piano rettificante : la direzione $\perp$ è individuata da $\underline{n} = \underline{b} \times \underline{t}$

ovvero da (multi. proporz. a) $(\underline{\dot{r}}_0 \times \underline{\ddot{r}}_0) \times \underline{\dot{r}}_0$

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ 2 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-a)(-a^2) - y \cdot 0 + z \cdot 2a = 0$$

$$-a^2(x-a) + 2za = 0$$

$$a(x-a) - 2z = 0$$

$$\boxed{ax - 2z - a^2 = 0}$$

passa per P_0 ✓

è $\perp$ piano normale ✓

è $\perp$ piano osculatore.

$$2 \cdot a + a \cdot (-2) = 2a - 2a = 0$$

Geometria 20/12/12

(2) curvatura geodetica di $\mathcal{E}$ (riferita al cilindro $x^2+y^2-a^2=0$

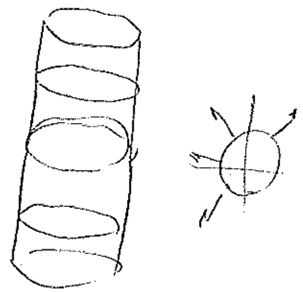
(sarà $\neq 0$ poichè $\mathcal{E}$ non è un'elica cilindrica)

$$k_g(t) = k(t) \langle \underline{b}(t), \underline{N}(t) \rangle$$

nota

$$\underline{b}(t) = \frac{\dot{\underline{r}}(t) \times \ddot{\underline{r}}(t)}{\|\dot{\underline{r}}(t) \times \ddot{\underline{r}}(t)\|}$$

$$\underline{N}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$$



$$k_g(t) = \underbrace{\frac{\|\dot{\underline{r}}(t) \times \ddot{\underline{r}}(t)\|}{\|\dot{\underline{r}}\|^3}}_{k(t)} \left\langle \frac{\dot{\underline{r}}(t) \times \ddot{\underline{r}}(t)}{\| \quad \|}, \underline{N}(t) \right\rangle$$

$$= \frac{\langle \dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}, \underline{N} \rangle}{\|\dot{\underline{r}}\|^3} =$$

$$(a^2+4t^2)^{-\frac{3}{2}} \begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t & 2t \\ -a\cos t & -a\sin t & 2 \\ \cos t & \sin t & 0 \end{vmatrix} = (a^2+4t^2)^{-\frac{3}{2}} \begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t & 2t \\ -a\cos t & -a\sin t & 2 \\ 0 & 0 & \frac{2}{a} \end{vmatrix} \quad \frac{1}{a}$$