ESERCIZI di ELEMENTI DI GEOMETRIA

a.a. 2007/08 Prof. M. Spera

II

Geometria

Ingegneria Gestionale

Prova scritta del 7 febbraio 2000

1. Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}^3$ (visto come spazio affine) siano dati il piano $U : x - y + z = 0$ e la retta W di equazione

$$\begin{cases} x + 2y &= 0 \\ y - z &= 0 \end{cases}$$

i) Determinare la matrice A (rispetto alla base canonica) di s_U^W, simmetria rispetto a U lungo W.
ii) Determinare una base in cui s_U^W abbia la forma canonica.
iii) *Partendo* dalla matrice A determinata in i), dopo aver verificato che essa rappresenta una simmetria s, si *ricostruiscano* U e W (ovvero $s = s_U^W$).

2. Sia data, in $\mathbf{R}^3$, la famiglia di trasformazioni lineari $T_{\lambda,\mu}$, $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ rappresentata, rispetto alla base canonica, da

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 2 \\ 0 & \mu & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i) Determinare λ e μ in modo che il vettore $(1, 2, 3)^t$ sia un autovettore di $T_{\lambda,\mu}$.
ii) Detta T l'applicazione cosi' individuata, si verifichi che essa è diagonalizzabile e se ne determini una base diagonalizzante.
iii) Dire se T risulta essere un endomorfismo *simmetrico* rispetto al prodotto scalare standard, e, in caso contrario, si definisca un nuovo prodotto scalare $<< | >>$ rispetto al quale T lo sia. Si scriva poi la matrice di $<< | >>$ rispetto alla base canonica. Sugg. Basta determinare i nuovi prodotti scalari dei vettori della base canonica...

3. i) Si determini, nel piano euclideo reale $\mathbf{E}^2$, l'iperbole $\mathcal{I}$ passante per i punti $A = (0, 0)$ e $B = (2, 2)$ e ivi tangente, rispettivamente, alle rette r e r' aventi direzione $W =< (1, -2) >$ e tale che uno dei suoi asintoti abbia direzione $W' =< (1, 3) >$.
ii) Determinare l'altro asintoto di $\mathcal{I}$.
iii) Determinare il diametro d' di $\mathcal{I}$ avente direzione $W' =< (1, -2) >$ e determinare un riferimento affine, di cui d' sia un asse, nel quale $\mathcal{I}$ assuma la forma canonica (affine).
iv) Determinare gli *assi* di $\mathcal{I}$.

4. Sia data in $\mathbf{R}^3$ la forma quadratica q rappresentata, rispetto alla base canonica, dalla matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 24 & 12 \\ 24 & 9 & -33 \\ 12 & -33 & 21 \end{pmatrix}$$

i) Determinare una base q-ortogonale di $\mathbf{R}^3$ contenente $X_0 = (5, 5, 5)^t$
ii) Determinare la segnatura di q.
Sugg. Conviene risolvere prima l'esercizio 3.

Tempo a disposizione 2h.30m
Le risposte vanno adeguatamente giustificate.

Geometria 7/2/2000

(1) $U : x - y + z = 0$ piano (per l'origine)

$W : \begin{cases} x + 2y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$ retta (per l'origine)

$$\begin{cases} x = -2y \\ y = y \\ z = y \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \qquad W : <(-2,$$

Sia Dato $P = (a, b, c)$ consideriamo la retta r_P per P di direzione W:

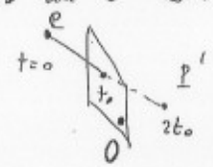
$$\begin{aligned} x &= a - 2t \\ y &= b + t \\ z &= c + t \end{aligned}$$

Det. l'intersezione con U:

$$a - 2t - b - \cancel{t} + c + \cancel{t} = 0$$

$$a - b + c = 2t \qquad t = \frac{a - b + c}{2}$$

il punto P' simm di P rispetto ad U corr. al valore $2 \cdot \frac{a - b + c}{2} = a - b + c$



$P = (a, b, c)$

P' sarà

$$\begin{aligned} x &= a - 2(a - b + c) = -a + 2b - 2c \\ y &= b + a - b + c = a + c \\ z &= c + a - b + c = a - b + 2c \end{aligned}$$

$$P' = (-a + 2b - 2c,\ a + c,\ a - b + 2c)$$

$$S_U^W = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

controllo

$$S^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$S^2 = I$ ok

A arbitrioso:

$U = \ker(S-1)$

$W = \ker(S+1)$

$$S-1 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

rango = 1 (chiaro)

$$\ker: \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\{x - y + z = 0\} = U$

$$\ker(S+1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$y - z = 0$

$x + y + z = 0$

$x - y + 3z = 0$

ker

$\Rightarrow \begin{cases} y = z \\ x + 2y = 0 \end{cases}$ è W di partenza!

$W = \langle(-2, 1, 1)\rangle$ $\begin{cases} x = -2y \\ y = y \\ z = y \end{cases}$

(69)

(2) $T: \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 2 \\ 0 & \mu & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{v} = \xi\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \lambda + 2 + 6 = \xi \\ 2\mu + 9 = 2\xi \\ 3 = 3\xi \end{cases} \Rightarrow \xi = 1$$

$\lambda + 8 = 1 \quad \lambda = -7$

$2\mu = -7 \quad \mu = -\frac{7}{2}$

Autovalori di T = elem diagonali (T è tr. sup)

$\lambda_1 = -7, \ \lambda_2 = -\frac{7}{2} \quad \lambda_3 = 1$

tutti distinti $\Rightarrow$ T è diagonalizzabile

$$\begin{pmatrix} -7 & 1 & 2 \\ 0 & -\frac{7}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{-7}_{\lambda_1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad e_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \cancel{-7x} + y + 2z &= \overset{0}{\cancel{-7x}} \\ -\tfrac{7}{2}y + 3z &= -7y \\ \tfrac{7}{2}y + 3z &= 0 \\ z &= -7z \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &z = 0 \\ \Rightarrow\ &y = 0 \\ &e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} -7 & 1 & 2 \\ 0 & -\frac{7}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{7}{2}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$-7x + y + 2z = -\frac{7}{2}x \qquad -\frac{7}{2}x + y + 2z = 0$

$-\frac{7}{2}y + 3z = -\frac{7}{2}y \qquad \Rightarrow \quad z = 0$

$$-\frac{7}{2}x + y = 0 \qquad y = \frac{7}{2}x \qquad e_2' = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{e_1' : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_2' : \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_3' : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\text{base di autovettori}}$$

$$e_1' = e_1$$

T non è simmetrico rispetto alla base canonica (la matrice non è simm.) ma, essendo diagonalizzabile, esiste sicuramente un prod. scalare rispetto al quale essa è simmetrico; basta def $\langle\langle\ \rangle\rangle$ in modo che (e_i') sia ortonormale: $\langle\langle e_i' | e_j' \rangle\rangle := \delta_{ij}$ (*)

per trovare la matrice di $\langle\langle | \rangle\rangle$ rispetto a (e_i) è sufficiente calcolare $\langle\langle e_i | e_j \rangle\rangle$: basta allora esprimere gli e_i in funzione degli e_i' e usare (*)

$$\begin{cases} e_1' = e_1 \\ e_2' = 2e_1 + 7e_2 \\ e_3' = e_1 + 2e_2 + 3e_3 \end{cases}$$

$$\boxed{e_1 = e_1'}$$

$$7e_2 = e_2' - 2e_1 = e_2' - 2e_1' \qquad \boxed{e_2 = \frac{e_2'}{7} - \frac{2}{7}e_1' = -\frac{2}{7}e_1' + \frac{e_2'}{7}}$$

$$3e_3 = e_3' - e_1' - 2\left[\frac{1}{7}e_2' - \frac{2}{7}e_1'\right]$$

$$= e_3' - e_1' - \frac{2}{7}e_2' + \frac{4}{7}e_1'$$

$$= e_3' - \frac{3}{7}e_1' - \frac{2}{7}e_2'$$

$$\boxed{e_3 = -\frac{1}{7}e_1' - \frac{2}{21}e_2' + \frac{1}{3}e_3'}$$

$$\langle\langle e_1 | e_1 \rangle\rangle = \langle\langle e_1' | e_1' \rangle\rangle = 1$$

$$\langle\langle e_1 | e_2 \rangle\rangle = \langle\langle e_1' | -\frac{2}{7}e_1' + \frac{e_2'}{7} \rangle\rangle = -\frac{2}{7}$$

$$\langle\langle e_1 | e_3 \rangle\rangle = \langle\langle e_1' | e_3 \rangle\rangle = \dots -\frac{1}{7}$$

$$\langle\langle e_2 | e_2 \rangle\rangle = \frac{4}{49} + \frac{1}{49} = \frac{5}{49}$$

$$\langle\langle e_2 | e_3 \rangle\rangle = \langle\langle \frac{e_2'}{7} - \frac{2}{7}e_1' | -\frac{1}{7}e_1' - \frac{2}{21}e_2' + \frac{e_3'}{3} \rangle\rangle$$

$$= \frac{2}{\underset{7^2}{49}} - \frac{2}{\underset{7^2\cdot 3}{21\cdot 7}} = \frac{\overset{6}{3\cdot 2} - 2}{7^2\cdot 3} = \frac{4}{147}$$

$$\langle\langle e_3 | e_3 \rangle\rangle = \frac{1}{49} + \frac{4}{(21)^2} + \frac{1}{9} =$$

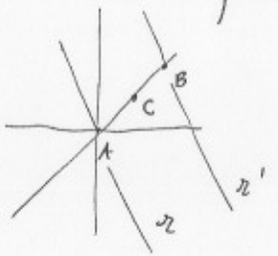
$$= \frac{1}{7^2} + \frac{4}{3^2\cdot 7^2} + \frac{1}{3^2} = \frac{9+4+49}{\underbrace{3^2\cdot 7^2}_{441}} = \frac{62}{441}$$

$$\Rightarrow \text{matrice di } \langle\langle | \rangle\rangle \quad \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{5}{49} & \frac{4}{147} \\ -\frac{1}{7} & \frac{4}{147} & \frac{62}{441} \end{pmatrix}$$

③ Iperbole I passante per $A = (0,0)$ $B = (2,2)$ e ivi tangente a r, r' aventi la direzione $(l, m) = (1, -2)$, e con asintoto a direzione $(1,3)$

>> la retta $AB \equiv d$ ha eq.

$y = x$



$\frac{62}{441}$

$(C_1 = (1,1)$ è il centro.

$r: \quad y = -2x$

$r': \quad y - 2 = -2(x-2) = -2x + 4$

$y = -2x + 6$ a:

consideriamo il fascio $rr' + \lambda \underset{d^2}{AB} = 0$

$$\lambda (y-x)^2 + (y+2x)(y+2x-6) = 0$$

$$\underbrace{\lambda (y-x)^2 + (y+2x)^2}_{\text{termini di } 2^\circ \text{ grado}} - 6(y+2x) = 0$$

$$\lambda(x^2 + y^2 - 2xy) + (4x^2 + 4xy + y^2)$$

$$= (4+\lambda)x^2 + (4-2\lambda)xy + (\lambda+1)y^2 - 6 -$$

imponiamo che a sia asintoto $\partial r: (1,3)$ $x\ y$

$$(4+\lambda) + (4-2\lambda)\cdot 3 + (\lambda+1)\cdot 9 = 0$$

$$4 + \lambda + 12 - 6\lambda + 9\lambda + 9 = 0$$

$$4\lambda + 25 = 0 \qquad \lambda = -\frac{25}{4}$$

$$I: \quad \left(-\frac{25}{4} + 4\right)x^2 + \left\{4 - 2\cdot\left[\frac{-25}{4}\right]\right\}xy + \left(-\frac{25}{4} + 1\right)y^2 - 6(y+2x) =$$

$$-\frac{9}{4}x^2 + \left[4 + \frac{25}{2}\right]xy + \left(-\frac{21}{4}\right)y^2 - 6y - 12x =$$

$$-\frac{9}{4}x^2 + \frac{33}{2}xy - \frac{21}{4}y^2 - 6y - 12x = 0$$

$$\underset{x_1^2}{9x^2} \underset{x_1x_2}{- 66xy} \underset{x_2^2}{+ 21y^2} \underset{x_2x_0}{+ 24y} \underset{x_1x_0}{+ 48x} = 0$$

$$A_I: \quad \begin{pmatrix} 0 & 24 & 12 \\ 24 & 9 & -33 \\ 12 & -33 & 21 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 8 & 4 \\ 8 & 3 & -11 \\ 4 & -11 & 7 \end{pmatrix}$$

-7-

L'eq. di a è $y = 3(x-1)+1$

$y = 3x - 3 + 1$ $\quad (C = (1,1))$

$= 3x - 2$

trov. l'altro asintoto:

orizzonte: $m_1 = 3$ è più ravvicin. + rapida

$m_1 m_2 = \frac{c}{a}$

$\Rightarrow 3 m_2 = \frac{9}{21}$

$m_2 = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$

$9 - 66m + 21m^2 = 0$

$m = \frac{33 \pm \sqrt{33^2 - 21\cdot 9}}{9}$

$= \frac{33 \pm 3\sqrt{11^2 - 21}}{21} = \frac{33 \pm 3\cdot 10}{21} = \frac{30}{21} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$

$\frac{63}{21} = 3$

$a' = \quad y - 1 = \frac{1}{7}(x-1)$

$y - 1 = \frac{x}{7} - \frac{1}{7} \qquad y = \frac{x}{7} + 1 - \frac{1}{7}$

$= \frac{x}{7} + \frac{6}{7}$

$a': \boxed{7y - x - 6 = 0}$

$d = \quad y = x \quad$ e $\quad d' \; y - 1 = -2(x-1)$

$y = -2x + 2 + 1 = -2x + 3$

Sono ortogonali coniugati

$\Rightarrow (C, d, d')$ è un rif. affine in cui

$\mathcal{I}$ assume la forma can. (affine)

Assi di $\mathcal{I}$

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda & -33 \\ -33 & 21-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$(9-\lambda)(21-\lambda) - 33^2 = 0$

$\lambda^2 - 30\lambda + 21\cdot 9 - 33^2 = 0$

$\lambda^2 - 30\lambda + 9(21 - 11^2) = 0$

$\lambda^2 - 30\lambda - 9\cdot 100 = 0$

$\lambda^2 - 30\lambda - 900 = 0$

$\lambda = 10\mu$

$\mu^2 - 3\mu - 9 = 0 \qquad \sqrt{2\cdot 9} = 3\sqrt{2}$

$\mu = \frac{3 \pm \sqrt{9+9}}{2} = \frac{3 \pm 3\sqrt{2}}{2}$

$= 3\left[\frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}\right]$

$\lambda = 30\,\frac{1 \pm \sqrt{2}}{2} = 15\left[1 \pm \sqrt{2}\right]$

$\lambda_+ > 0$

$\begin{pmatrix} 9-\lambda_\pm & -33 \\ -33 & 21-\lambda_\pm \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_\pm \\ y_\pm \end{pmatrix} = 0$ $\quad$ basta un'equaz: $\lambda_- < 0$

se $x_\pm = 1$

$(9-\lambda_\pm)x_\pm - 33 y_\pm = 0 \qquad y_\pm = \frac{9-\lambda_\pm}{33} \equiv m_\pm$

Assi: $y - 1 = m_\pm (x-1)$

$$m_\pm = \frac{9-\lambda_\pm}{33} = \frac{9-15(1\pm\sqrt{2})}{33} =$$

$$= \begin{cases} m_+ \quad \dfrac{9-15-15\sqrt{2}}{33} = \dfrac{-2-5\sqrt{2}}{11} = -\dfrac{2+5\sqrt{2}}{11} \\[2ex] m_- \quad \dfrac{9-15+15\sqrt{2}}{33} = \dfrac{-2+5\sqrt{2}}{11} \end{cases}$$

$$m_\pm = -\frac{2}{11} \mp \frac{5\sqrt{2}}{11}$$

4 $A: \begin{pmatrix} 0 & 24 & 12 \\ 24 & 9 & -33 \\ 12 & -33 & 21 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 8 & 4 \\ 8 & 3 & -11 \\ 4 & -11 & 7 \end{pmatrix} \equiv A'$

$x_0 = (5, 5, 5)$ possiamo efficacemente leggere tutto in modo geometrico (A matrice di una conica, la I dell'es precedente)

$x_0 \rightsquigarrow d: [5,5,5] = [1,1,1]$ $\quad (5,5,5) = x_0$

$x_1 \rightsquigarrow d: y = x \quad x_2 = x_1 \quad (0,1,1) = x_1$

$x_2 \rightsquigarrow d': y = -2x+3 \quad (0,1,-2) = x_2$

$\Rightarrow x_i^t A x_j = 0$ se $i \neq j$

Calcoliamo la segnatura (si può procedere anche con A')

$$(1\ 1\ 1)\begin{pmatrix} 0 & 24 & 12 \\ 24 & 9 & -33 \\ 12 & -33 & 21 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1\ 1\ 1)\begin{pmatrix} 24+12 \\ 24+9-33 \\ 12-33+21 \end{pmatrix} \begin{matrix} 36 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

$= 36 > 0$

$$(0\ 1\ 1)\begin{pmatrix} 0 & 24 & 12 \\ 24 & 9 & -33 \\ 12 & -33 & 21 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (0\ 1\ 1)\begin{pmatrix} 36 \\ 9-33 \\ -33+21 \end{pmatrix} \begin{matrix} 36 \\ -21 \\ -1 \end{matrix}$$

$= -24 - 12 = -36 < 0$

$$(0\ 1\ -2)\begin{pmatrix} 0 & 24 & 12 \\ 24 & 9 & -33 \\ 12 & -33 & 21 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = (0\ 1\ -2)\begin{pmatrix} 24-24 \\ 9+66 \\ -33-42 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 75 \\ -75 \end{matrix}$$

78

$= 75 + 2 \cdot 75 = 75 \cdot 3 = 225 > 0 \Rightarrow$ segue (2, 1)

Per determinare la segnatura, si può anche procedere così: intanto, dall'ex 3 sappiamo che deve essere (2, 1) o (1, 2) (conica rede irriducibile)

Dunque (Sylvester) detti $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ gli ass. dell'endomorfismo simmetrico corrispondente (s. base canonica di $\mathbb{R}^3$), essi sono nec.

o
- 2 pos. 1 negativo ①
- 2 neg 1 positivo ②

Ma $\det A < 0$ (calcolo diretto)

(e il segno di $\det A$ è invariante per congruenza

$\det(M^t A M) = \det(M^t)\det(A)\det(M) = \det(M)^2 \det A$)

$\Rightarrow \lambda_1\lambda_2\lambda_3 < 0 \Rightarrow$ ② non può sussistere,

pertanto vale ① : (2, 1)

Geometria

Ingegneria Gestionale

Prova scritta del 19 giugno 2000

E1. Sia dato $(\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ (prodotto scalare standard) e sia $e = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonica.
i) Determinare tutti gli endomorfismi T tali che $V_1^T = \langle v_1\rangle$, $V_2^T = \langle v_2\rangle$ e $Im\,T = \langle v_1, v_2\rangle$, dove

$$v_1 = (1\ \ 0\ \ 1)^t, \qquad v_2 = (0\ \ 1\ \ 0)^t$$

(Sugg. Si lavori con un'opportuna base $b = (..., ..., e_3)$). Con V_λ^T si denota l'autospazio corrispondente all'autovalore λ di T.
ii) Dimostrare che tali T sono tutti diagonalizzabili, e si determini $m_{ee}(T)$.
iii) Dimostrare che tra questi ve ne è solo uno simmetrico, di cui si chiede inoltre di determinare una base ortonormale diagonalizzante.
iv) Si poteva prevedere a priori tale risultato?

E2. Nel piano euclideo reale $\mathbb{E}^2$
i) determinare la parabola $\mathcal{P}$ tangente in $O : (0,0)$ alla retta $r : x = 0$, avente $W = \langle (1,1)^t \rangle$ quale direzione dei diametri e passante per $P : (2,0)$. (Sugg. Si utilizzi un opportuno fascio di coniche).
ii) Determinare l'asse e il vertice di $\mathcal{P}$.
iii) Determinare il fuoco e la direttrice di $\mathcal{P}$.
iv) Si abbozzi (con una certa cura) il grafico di $\mathcal{P}$.
v) Sia data in $\mathbb{R}^3$ la forma quadratica q avente per matrice rappresentativa, rispetto alla base canonica,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si calcoli la segnatura di q, possibilmente in due modi.

T1. i) Sia dato $T \in Hom(V, W)$. Dare la definizione di nucleo e immagine di T, verificando che essi sono sottospazi vettoriali di....
ii) Enunciare e dimostrare il teorema della nullità + rango.
iii) Dimostrare che $T \in End(V)$ è iniettivo se e solo se è suriettivo.
iv) Cosa si intende col dire che $T \in Hom(V, W)$ è un isomorfismo?
v) Dare la definizione di isomorfismo di spazi vettoriali.
vi) Dimostrare che la dimensione è un invariante completo per isomorfismi (si lavori in dimensione finita).

T2. i) Dare la definizione di forma bilineare simmetrica su uno spazio vettoriale (di dimensione finita) *e definire la nozione di ortogonalità rispetto a tale forma.*
ii) Dare la definizione di vettore isotropo.
iii) Enunciare e dimostrare il teorema di diagonalizzazione per forme bilineari simmetriche in generale.
iv) Trattare il caso complesso.
v) Trattare il caso reale (teorema di Sylvester).
vi) Nel caso $n = 3$, si interpreti quest'ultimo teorema in termini di geometria proiettiva.

F. (facoltativo: se ne tiene conto solo nel caso in cui l'esaminando abbia risposto interamente ai quesiti precedenti).

Determinare, per via sintetica, tutte le parabole passanti per un dato punto e aventi per direttrice una retta data (non contenente il punto dato).

Tempo a disposizione 2h.30m
Le risposte vanno adeguatamente giustificate

Geometria 19/6/2000 (Sdo E1, E2, F)

(1) Poniamo $b = (v_1, v_2, e_3)$

le condizioni su T forniscono

$$v_1 \longmapsto v_1$$
$$v_2 \longmapsto 2v_2$$
$$e_3 \longmapsto a v_1 + b v_2 \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

$$A = m_{bb}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_C^A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & a \\ 0 & 2-\lambda & b \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -(1-\lambda)(2-\lambda)\lambda$$

$\Rightarrow$ autoval: 0, 1, 2, distinti $\Rightarrow$ T

è diagonalizzabile $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$

Determiniamo ora $m_{ee}(T)$; conviene usare l'algoritmo di Gauss

Da $v_1 = e_1 + e_3 \qquad v_2 = e_2$

si ha:

$$e_1 + e_3 \longmapsto e_1 + e_3$$
$$e_2 \longmapsto 2e_2$$
$$e_3 \longmapsto a(e_1 + e_3) + b e_2$$
$$= a e_1 + b e_2 + a e_3$$

$$\overset{e_1+e_3-e_3}{\Rightarrow} \quad e_1 \longmapsto e_1 + e_3 - a e_1 - b e_2 - a e_3$$
$$= (1-a) e_1 - b e_2 + (1-a) e_3$$

$$\Rightarrow B := m_{ee}(T) = \begin{pmatrix} 1-a & 0 & a \\ -b & 2 & b \\ 1-a & 0 & a \end{pmatrix}$$

Poiché $e = (e_1, e_2, e_3)$ è ortonormale, per det. gli endom. sia simmetrici occorre e basta imporre $B = B^t$, ovvero

$$-b = 0 \qquad \Rightarrow \quad b = 0$$
$$a = 1 - a \qquad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}$$

Sicché

$$B = B^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Per determin. una base orton. diagonalizzante (f_1, f_2, f_3) di $T = T^t$ (corrisp a $b=0, a=\frac{1}{2}$)

osservato che $V = V_1^T \oplus V_2^T \oplus \underset{\ker T}{\underset{\shortparallel}{V_0^T}}$

(somma diretta ortogonale)

basta determinare una base orton. di $\ker T$

$(\nu(T) = 1)$

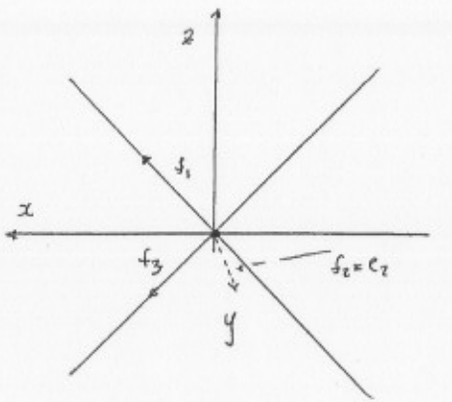
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad x + z = 0, \quad y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_0^T = \ker T = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}_{f_3} \right\rangle$

$\begin{cases} x = x \\ y = 0 \\ z = -x \end{cases}$ per es.

ovviamente, basta poi porre $f_1 = \frac{v_1}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$f_2 = v_2 = e_2$



Il risultato era certamente chiaro a priori, in quanto V_1^T e V_2^T erano già ortogonali, e si richiedeva allora $\ker T \perp V_1^T$, $\perp V_2$

con ciò $\ker T$ è univocamente determinato ($\ker = \langle f_3 \rangle$). Ovviamente è fissato anche T poiché $T: f_i \mapsto \lambda_i f_i$ e gli f_i costituiscono una base

Osservazioni ulteriori

Si poteva direttamente determinare $m_{ee}(T)$, osservando però prima che $e_1 = (e_1 + e_3) - e_3$, che $e_3 \mapsto a e_1 + b e_2 + a e_3$

$$\Rightarrow \quad e_1 \mapsto e_1 + e_3 - a e_1 - b e_2 - a e_3$$
$$= (1-a) e_1 - b e_2 + (1-a) e_3 .$$

Molti hanno sbagliato quest'ultima immagine.

Dal teorema N+R si concludeva subito che $0 \in \sigma(T)$ ($\forall T$ della forma data) e che $\gamma(T) = 1$

$\Rightarrow \quad \sigma(T) = \{0, 1, 2\}$, aut. distinti

$\dim = 3 \Rightarrow T$ diagonalizzabile

Altro errore grave, purtroppo comune a molti:

$$e_3 \mapsto \underline{0} \quad !$$

Le condizioni date imponevano solo

$$e_3 \mapsto a v_1 + b \underset{\substack{\| \\ v_2}}{e_2} = a e_1 + b e_2 + a e_3$$

Si trattava di un'intera famiglia di T (ovviamente contenente il caso $a = b = 0$)

Geom 19/6/2009

(2) $\mathcal{P}$ appartiene al fascio di coniche bitangenti

$x = 0$ (asse y) in $O = [1, 0, 0]$

e r_∞ in $P_\infty : [0, 1, 1]$; pertanto

$$\underbrace{x_2 \cdot x_0}_{\text{asse } y} + \lambda \underbrace{(x_2 - x_1)^2}_{r_\infty} = 0$$

dimezzo per O (congiungo O con P_∞)

ovvero, disomogeneizzando

$$x + \lambda (y - x)^2 = 0$$

Imponiamo il passaggio per $P : (2, 0)$ $(= [1, 2, 0])$;

$$0 = 2 + \lambda (-2)^2 = 2 + 4\lambda \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \mathcal{P} : (y - x)^2 - 2x = 0$$

$$\left[\mathcal{P} : x^2 + y^2 - 2xy - 2x = 0 \right]$$

Troviamo l'asse a ; partiamo da

$$y - x + k = 0 \quad \text{eq. dei diametri}$$

Direzione ortogonale: $P_\infty^\perp : [0, -1, 1]$

Basta trovare la polare di $P_0^{\perp}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(x_0 \ x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$(x_0 \ x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$x_0 - 2x_1 + 2x_2 = 0$$

$$1 - 2x + 2y = 0$$

$$(1 = 2(x-y))$$

Troviamo $V = a \cap \mathcal{P}$

$$\mathcal{P}: (x-y)^2 - 2x = 0$$

da $x - y = \frac{1}{2}$ si ha subito $\frac{1}{4} - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{8}$

$$\Rightarrow 1 - \frac{2}{8} + 2y = 0 \qquad \frac{3}{4} + 2y = 0 \qquad y = -\frac{3}{8}$$

$$\Rightarrow \quad V = \left(\frac{1}{8}, -\frac{3}{8}\right)$$

Calcoliamo $p = \sqrt{-\frac{a}{\gamma^3}}$

$\gamma = 2$ $\quad a = \det A = -1$ (Sarrus)

tr A

$$p = \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

È chiaro che $F = V + \frac{p}{2} \underline{u}$ $\quad \underline{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$$x_F = \frac{1}{8} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

$$y_F = -\frac{3}{8} + \frac{1}{8} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$$

Per calcolare la direttrice procediamo in due modi diversi:

1° δ è la polare di $F = [1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}]$
$= [4, 1, -1]$

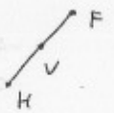
$$(x_0 \ x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$(x_0 \quad x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix} -1 & & \\ -4 & +1 & +1 \\ & -1 & -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$(x_0 \quad x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

$$x_0 + 2x_1 + 2x_2 = 0 \qquad 1 + 2x + 2y = 0$$

2° Vertice H



$$H: \; V - \frac{p}{2}\underline{u}$$

$$x_H = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = 0$$

$$y_H = -\frac{3}{8} - \frac{1}{8} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad (y - y_H) = -1\,(x - x_H)$$

$$y + \frac{1}{2} = -x$$

$$x + y + \frac{1}{2} = 0 \qquad 2x + 2y + 1 = 0$$

Sia $q(X) = X^t A X \qquad X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Corrispondente ad una parabola, la signatura è $(1,2)$ o $(2,1)$ (conica irriducibile)

ma $\det A = a = -1 \Rightarrow$ è $(2,1)$

verifichiamolo per altra via

$$x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_0 = 0 =$$

$$(x_1 - x_2)^2 - 2x_1x_0$$

$$= \underbrace{(x_1 - x_2)}_{\equiv\, x_0'}{}^2 - 2\,(\underbrace{x_1' + x_2'}_{x_1})\,(\underbrace{x_1' - x_2'}_{x_0})$$

$$= x_0'^2 - 2\,(x_1'^2 - x_2'^2)$$

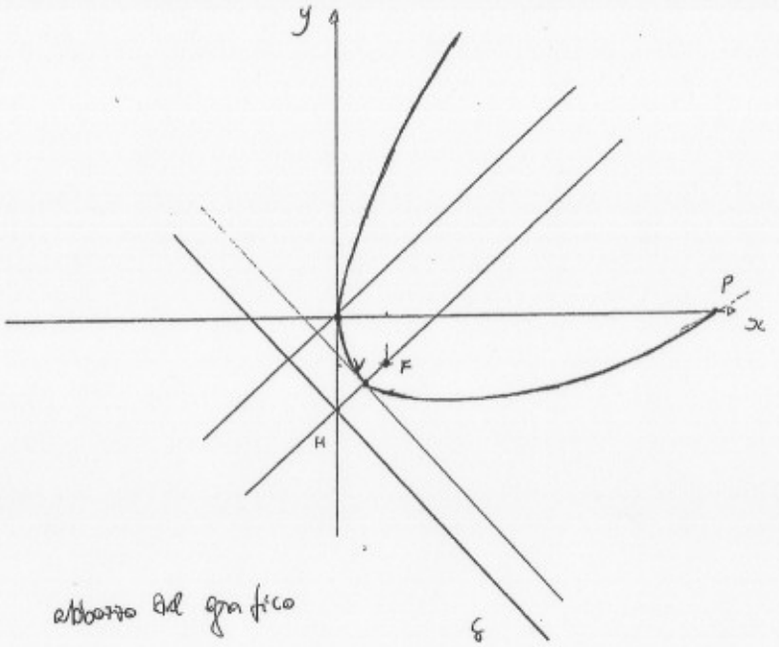
$$= x_0'^2 - 2x_1'^2 + 2x_2'^2$$

$\Rightarrow$ ancora $(2,1)$

Osservazione. Si poteva anche evitare di scrivere direttamente il fascio proposto (che comunque è alla base di tutto) osservando che o, $d: y = x$, e il $\tau: x = 0$ danno luogo ad un rif. canonico (apolloniano): l'eq. è (cf $Y^2 = \chi X$) $\quad (y-x)^2 = kx$

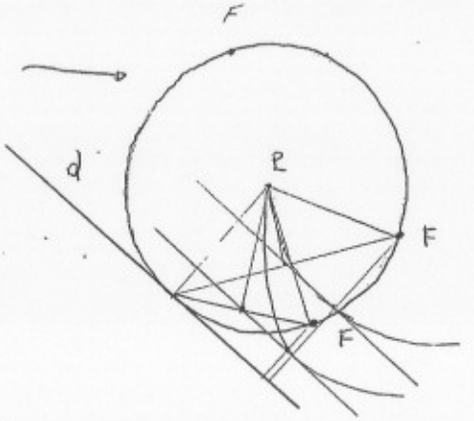
$\Rightarrow$ (passaggio per P) $\quad 4 = 2k \Rightarrow k = 2 \qquad (y-x)^2 - 2x = 0$

Poi si procede come prima.



Fac.

luogo dei fuochi F delle parabole per P



Geometria

Ingegneria Gestionale

Prova scritta del 3 luglio 2000

E1. Sia dato $(\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ (prodotto scalare standard) e sia $e = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonica.

i) Scrivere un'equazione per il fascio di piani $\mathcal{F}$ avente per asse la retta r per l'origine di direzione $W = (1,3,1)^t$.

ii) Determinare il piano $U_1 \in \mathcal{F}$ passante per $P : (1,1,1)^t$.

iii) Determinare la matrice $A := m_{ee}(p_{U_1})$ della proiezione ortogonale su U_1 rispetto alla base canonica.

iv) A partire da A, dopo aver verificato che essa corrisponde ad una proiezione ortogonale, si ricostruiscano, a ritroso, U_1 e $U_1^\perp$.

v) posto $v = P$, determinare $p_U^{-1}(\{v\})$, al variare di $U \in \mathcal{F}$

E2. Nel piano euclideo reale $\mathbb{E}^2$

i) determinare la conica $\mathcal{C}$ passante per $P_1 : (0,-2)$ e $P : (1,4)$ e tale che $d : x = 0$ e $d' : y = 2x+1$ siano diametri coniugati. (Sugg. Le condizioni date impongono il passaggio anche per $P_2 : (..,..)$ .. quindi si consideri un opportuno fascio di coniche...)

ii) Determinare la forma canonica metrica di $\mathcal{C}$ e le equazioni cartesiane dei suoi assi.

iii) Sia data in $\mathbb{R}^3$ la forma quadratica q avente per matrice rappresentativa, rispetto alla base canonica,

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 2 & -1 \\ 2 & 12 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Si determini una base q-ortogonale e si calcoli, possibilmente in due modi, la segnatura di q.

T1. Sia dato $T \in End(V)$ ((V,K) di dimensione finita). i) Che cosa si intende per spettro di T?

ii) Cos'è un autospazio di T? E un autovettore?

iii) Definire il polinomio caratteristico di T.

iv) Definire la molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore; quale relazione intercorre tra le due? Dimostrarla.

v) Quand' è che $T \in End(V)$ si dice diagonalizzabile?

vi) Enunciare e dimostrare il teorema di diagonalizzabilità per gli endomorfismi.

vii) Per quale classe di endomorfismi il polinomio caratteristico risulta essere un invariante completo *per similitudine?*

viii) E' vero questo in generale? Spiegare.

T2. i) Che cosa si intende per spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ associato ad uno spazio vettoriale V? Discutere il caso $V = \mathbb{R}^n$.

ii) Che cosa sono le coordinate omogenee?

iii) Dare le definizioni sintetica (intrinseca) e analitica di conica.

iv) Discutere la classificazione proiettiva delle coniche reali, sia in forma algebrica che geometrica.

v) Discutere la classificazione affine e metrica delle coniche reali, derivandole da quella proiettiva.

F. (facoltativo: se ne tiene conto solo nel caso in cui l'esaminando abbia risposto interamente ai quesiti precedenti).

Sia data un'ellisse $\mathcal{E}$ nel piano affine (euclideo). Dimostrare che l'area del triangolo OAB - con O centro di $\mathcal{E}$, A e B estremi di due semidiametri coniugati qualsiasi - è costante, al variare di A e B (si tratta di un caso particolare del cosiddetto *primo teorema di Apollonio*). (Sugg. $\mathcal{E}$ è affinemente equivalente ad una circonferenza...)

Tempo a disposizione 2h.30m

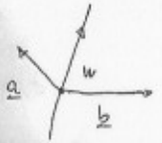
Le risposte vanno adeguatamente giustificate

Geometria 3/7/2000

(1) $\mathcal{F}$: fascio di piani per

$$r : \begin{cases} x = t-1 = t \\ y = 3t \\ z = t \end{cases} \qquad \bar{W} = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}}_{w} \right\rangle$$

direzione



Sia $\underline{a} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$\underline{b} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

$(\underline{a}, \underline{b}, \underline{w})$ costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$

$$\underset{\in \mathcal{F}}{\pi} = \lambda \underset{\bar{W}_1 = \langle \underline{a}, \underline{w} \rangle}{\pi_1} + \mu \underset{\bar{W}_2 = \langle \underline{b}, w \rangle}{\pi_2} \quad \neq \text{ giacitura}$$

$$\pi_1 : \; 0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -y(-1) + z(-3) = 0$$

$$\boxed{\pi_1 : \; y - 3z = 0}$$

$$\pi_2 : \; 0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -x + z \cdot 1 = 0$$

$$\boxed{\pi_2 \; x - z = 0}$$

$$\mathcal{F} \ni \pi : \quad \lambda(y - 3z) + \mu(x - z) = 0$$

$$\mu x + \lambda y + (-3\lambda - \mu) z = 0$$

imponiamo il passaggio per $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

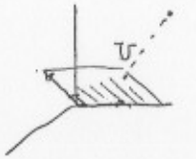
$$\mu + \lambda - \mu - 3\lambda = 0$$

$$-2\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0 \qquad \mu = \mu \text{ arb.}$$

prendiamo $\mu = 1$

$$\pi_2 : \quad x - z = 0 \quad \equiv U_2$$

determiniamo $m_{ce}(PU)$



Sia $P : \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \equiv v$ calcoliamo $P_{U_2} v = v_{U_2}$

r_P , retta per $P \perp U_2$

$$x = a + t$$
$$y = b$$
$$z = c - t$$

$$v_{U_2} = \underset{\substack{\parallel \\ v}}{r_P} \cap U_2 \qquad a + t - (c - t) = 0$$

$$a - c + 2t = 0$$

$$v_{U_2} : \quad x = a + \frac{c-a}{2} = \frac{a+c}{2} \qquad t = \frac{c-a}{2}$$

$$y = b$$

$$z = c - \frac{c-a}{2} = \frac{a+c}{2}$$

$$P_{U_1}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{a+c}{2} \\ b \\ \frac{a+c}{2} \end{pmatrix}$$

$$A \quad m_{ee}(PU_1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

verifica $A^2 = \underbrace{A = A^t}_{\text{chiara}}$

$$\overset{A}{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}} \overset{A}{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}} = \overset{A}{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}} \quad \underline{ok}$$

U: $\operatorname{Im} A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\to x - z = 0$

($y = y$ arb)

Calcoliamo $P_U^{-1}(v)$ $\qquad U \in \mathcal{Y}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$= \{ w : P_U w = v \}$$

$$= \begin{cases} \phi & U \neq U_1 \\ \text{retta per } v_1, \perp \text{ a } U_1 & \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 \\ z = 1 - t \end{cases}$$

altro metodo per calcolare $m_{ee}(PU)$

$U = \langle v_1, v_2 \rangle$

con $v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ $\quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(v_1, v_2) è base orto per U

$U^\perp = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}_{v_3} \right\rangle$ $\quad v_3$ orto.

$\rightsquigarrow b = (v_1\ v_2\ v_3)$

Si ha: $m_{bb}(PU) =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$v_1 \longmapsto v_1$

$v_2 \longmapsto v_2$

$v_3 \longmapsto \underline{0}$

$\frac{e_1}{\sqrt{2}} + \frac{e_3}{\sqrt{2}} \longmapsto \frac{e_1}{\sqrt{2}} + \frac{e_3}{\sqrt{2}}$

$e_2 \longmapsto e_2$

$\frac{e_1}{\sqrt{2}} - \frac{e_3}{\sqrt{2}} \longmapsto \underline{0}$

$\Rightarrow$

$$\sqrt{2}\, e_1 \longmapsto \frac{e_1}{\sqrt{2}} + \frac{e_3}{\sqrt{2}}$$

$$e_2 \longmapsto e_2$$

$$\sqrt{2}\, e_3 \longmapsto \frac{e_1}{\sqrt{2}} + \frac{e_3}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \quad e_1 \longmapsto \frac{e_1}{2} + \frac{e_3}{2}$$

$$e_2 \longmapsto e_2$$

$$e_3 \longmapsto \frac{e_1}{2} + \frac{e_3}{2}$$

$$\Rightarrow m_{ee}(PU) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ +\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

— · — ·

altro metodo per det. y (minori orlati)

si considera la matrice

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

x_0

$$\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad 3x - y = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & z \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad x - z = 0$$

$\Rightarrow y$

Geometria 3/7/2000

(2)

Det. $\mathcal{C}$ t.c. $d: x = 0$, $d': y = 2x+1$ siano diametri coniugati, e passante per $P_1: (0,-2)$ e $P: (1,4)$.

Det. la forma canonica metrica e le eq. cartesiane degli assi.

Sol. Si nota che $P_1 \in d$; è restato determinato il centro $C = d \cap d'$: $C: (0,1)$

pertanto $P_2: (0,4) \in \mathcal{C}$ $\quad (P_1 + P_2 = 2C)$

Le tangenti τ_1 e τ_2 in P_1 e P_2 sono parallele, tra loro e a d':

$\tau_2: \quad y = 2x + 4$

$\tau_1: \quad y = 2x - 2$

V. anche p. 10 per un altro metodo

$$\mathcal{C}: \quad \tau_1 \tau_2 + \lambda d^2 = 0$$

$$\lambda x^2 + (y - 2x - 4)(y - 2x + 2) = 0$$

Imponiamo il passaggio per $P: (1,4)$

$$\lambda + (\cancel{4} - 2 - \cancel{4})(4 - \cancel{2} + 2) = 0$$

$$\lambda - 8 = 0 \qquad \lambda = 8$$

$$8x^2 + [(y-2x)-4][(y-2x)+2] = 0$$

$$8x^2 + (y-2x)^2 + (-4+2)(y-2x) - 8 = 0$$

$$8x^2 + 4x^2 - 4xy + y^2 - 2(y-2x) - 8 = 0$$

$$8x^2 + 4x^2 - 4xy + y^2 - 2y + 4x - 8 = 0$$

$$\mathcal{C}: \quad 12x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y - 8 = 0$$

$$A: \begin{pmatrix} -8 & 2 & -1 \\ 2 & 12 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Omega = -8\cdot 12 + 4 + \cancel{4} - 12 + 8\cdot 4 - \cancel{4} =$$

$$= -9\cdot 12 + 9\cdot 4 = 9(-12+4) =$$

$$= -9\cdot 8 = -72$$

$$-3^2\, 2^3$$

$$\mathcal{J} = 13$$

$$\Omega_{00} = 12 - 4 = 8 > 0 \quad \text{ellisse}$$

$$t^2 + \frac{\Omega_{00}\,\mathcal{J}}{\Omega}\, t + \frac{\Omega_{00}^3}{\Omega^2} = 0$$

$$t^2 + \frac{8\cdot 13}{-9\cdot 8}\, t + \frac{8^3}{(-9)^2 8^2} = 0$$

$$t^2 - \frac{13}{9}\, t + \frac{8}{9^2} = 0$$

$$9^2 t^2 - 13\cdot 9\, t + 8 = 0$$

$$t = \frac{9\cdot 13 \pm \sqrt{(13\cdot 9)^2 - 4\cdot 9^2\cdot 8}}{2\cdot 9^2} =$$

$$= \frac{9\cdot 13 \pm \sqrt{9^2(13^2 - 32)}}{2\cdot 9^2} =$$

$$= \frac{13 \pm \sqrt{13^2 - 32}}{2\cdot 9} = \frac{13 \pm \sqrt{169-32}}{18} =$$

$$= \frac{13 \pm \sqrt{137}}{18} \quad \therefore \frac{1}{\alpha} = \frac{13-\sqrt{137}}{18} \qquad \frac{1}{\beta} = \dots$$

$$a = \sqrt{\frac{18}{13-\sqrt{137}}}$$

$$b = \sqrt{\frac{18}{13+\sqrt{137}}}$$

$$a \sim \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \quad \text{(circa...}$$

$$b \sim \sqrt{\frac{18}{26}} \sim \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Dal. gli assi

$$\begin{vmatrix} 12-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (12-\lambda)(1-\lambda) - 4 = 0$$

$$12 - 13\lambda + \lambda^2 - 4 = 0$$

$$\lambda^2 - 13\lambda + 8 = 0$$

$$\lambda = \frac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4\cdot 8}}{2} = \frac{13 \pm \sqrt{137}}{2} \equiv \lambda_\pm$$

$$\left(\lambda_\pm \text{ o } \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta} \right)$$

Determiniamo: v_{λ_+} (sarà poi $v_{\lambda_-} = v_{\lambda_+}^{\perp}$)

$$\begin{pmatrix} 12-\lambda_+ & -2 \\ -2 & 1-\lambda_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-2x + (1-\lambda_+)\, y = 0$$

$$\Rightarrow \quad m_+ = \frac{2}{1-\lambda_+} \qquad m_- = -\frac{1}{m_+}$$

Assi $\quad y - 1 = m_\pm \cdot x \ldots$

da ...) $\quad y = m_\pm x + 1$

Altro metodo per determinare le direzioni degli assi (anche più rapido)

Si impone l'ortogonalità nell'eq. dei diametri coniugati $\quad (l, m) \neq (0,0)$

$$\begin{pmatrix} -m & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = 0$$

(poniamo subito $l = 1$ ..)

$$\begin{pmatrix} -m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 - 2m \\ -2 + m \end{pmatrix} = 0$$

$$-m(12-2m) - 2 + m = 0$$

$$-12m + 2m^2 - 2 + m = 0$$

$$2m^2 - 11m - 2 = 0$$

$$m = \frac{11 \pm \sqrt{11^2 + 4\cdot 4}}{4} = \frac{11 \pm \sqrt{121+16}}{4}$$

$$= \frac{11 \pm \sqrt{137}}{4} \approx \frac{11 \pm 12}{4} \sim -\frac{1}{4}, \ \sim \frac{23}{4} \sim 8$$

appr. crude 4 p.ti.

La segnatura di A è $(2,1)$, poiché $a<0$

$$\underbrace{x_0 = (0,1,2)} \qquad x_1 = (0,0,1)$$
$$x_2 = (1,0,2)$$

è una base diagonalizzante

Riscalando opportunamente si arriva ad una base di sylvester

F Per una circonferenza il teorema è vero:

scriviamo $\dfrac{A_1}{A_2} = 1$ A_i aree di due triangoli costruiti come nel testo.

Operando una trasformazione affine di $\mathcal{C}$ in $\mathcal{E}$ tali rapporti non mutano, da cui l'asserto.

☆ Altro metodo per trovare $\mathcal{C}$

L'eq. è della forma

$$\lambda x^2 + \mu (y - 2x - 1)^2 = 1$$

((G, d, d') rif. canonico (affine)) ☆ con λ e μ da determinarsi in base alle condizioni date.

$P_1 : (0,-2) \in \mathcal{C} \Rightarrow$

$$\mu(-2-1)^2 = 1$$
$$\mu(-3)^2 = 1 \qquad 9\mu = 1 \qquad \mu = \frac{1}{9}$$

$Q : (1,4) \in \mathcal{C} \Rightarrow$

$$\lambda + \underbrace{\frac{1}{9}}_{\mu} \underbrace{(4-2-1)^2}_{1} = 1$$

$$\lambda + \frac{1}{9} = 1 \qquad \lambda = \frac{8}{9}$$

$$\frac{8}{9}x^2 + \frac{1}{9}(y-2x-1)^2 = 1$$

$$8x^2 + (y-2x-1)^2 - 9 = 0$$

$$8x^2 + y^2 + 4x^2 + 1 - 4xy - 2y + 4x - 9 = 0$$

$$\left[12x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y - 8 = 0\right] \equiv \mathcal{C} \text{ trovata prima}$$

osserviamo anche che, da $\lambda = \frac{8}{9} > 0$

$\mu = \frac{1}{9} > 0$

si ha subito che $\mathcal{C}$ è un'ellisse

(e si può riscrivere l'eq. così:

$$\Big(\underbrace{\sqrt{\tfrac{8}{9}}\,x}_{\substack{\equiv \\ X}}\Big)^2 + \Big\{\underbrace{\sqrt{\tfrac{1}{9}}\,(y-2x-1)}_{\substack{\equiv \\ Y}}\Big\}^2 = 1 \quad)$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} X = \sqrt{\frac{8}{9}}\,x \\ Y = \sqrt{\frac{1}{9}}\,(y-2x-1) \end{cases}$$

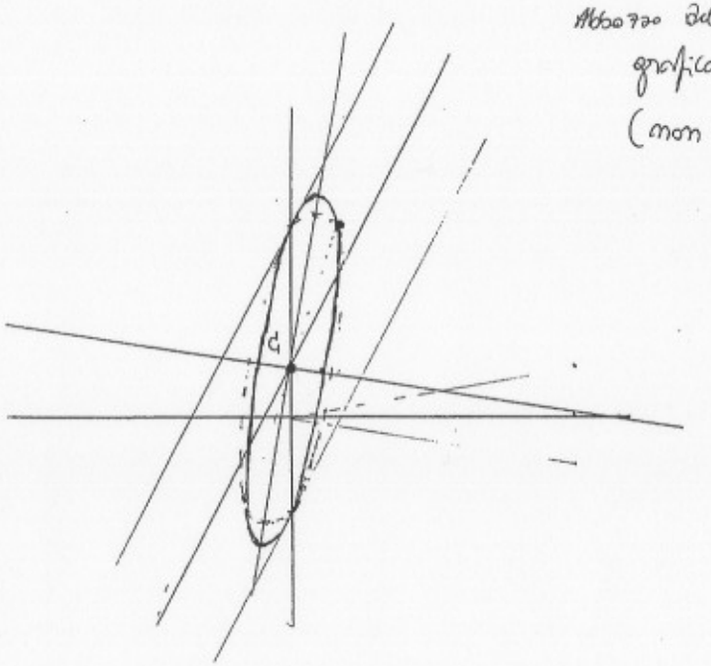
dà luogo ad un cambio di riferimento

affine in cui $\mathcal{C}$ ha la forma canonica

(non cartesiano!)

$$X^2 + Y^2 = 1$$

Abbozzo del grafico (non richiesto)



$$\lambda_+ = \frac{13+\sqrt{137}}{2} = \frac{13+\sqrt{144-7}}{2} = \frac{13+\sqrt{144\left(1-\frac{7}{144}\right)}}{2} = \frac{13+12\sqrt{1-\frac{7}{144}}}{2}$$

$$\sim \frac{13+12\left(1-\frac{1}{2}\frac{7}{144}\right)}{2} \simeq \frac{13+12\left(1-\frac{7}{288}\right)}{2}$$

$$\Rightarrow \lambda_+ \sim \frac{13+12}{2} = 12{,}5$$

$$m_+ \sim \frac{2}{1-12{,}5} = \frac{2}{-11{,}5} \sim -\frac{1}{6} \longrightarrow \text{asse minore}$$