

Dinamica del corpo rigido: Appunti.

Proprietà del corpo rigido (CR): Incompressibilità, indeformabilità.

Incompressibilità: implica che il volume del corpo rigido è costante.

Indeformabilità: implica che la distanza relativa fra 2 punti generici i e j del corpo rigido (i.e.: $d_{ij} = |\mathbf{r}_{ij}|$) sia invariante nel tempo, indipendentemente dalle forze esterne eventualmente applicate al corpo rigido stesso).

Se la distanza relative di due punti generici del corpo rigido non varia significa che ciascun punto del corpo rigido è in equilibrio con riferimento all'azione delle forze interne:

cioè per ogni punto i del corpo rigido vale la $\mathbf{F}_i^{(I)} = \mathbf{0}$,

e quindi si avrà $\mathbf{F}_{INT} = \sum_i \mathbf{F}_i^{(I)} = \sum_i \mathbf{0} = \mathbf{0}$ e $E_{p,INT} = \text{costante}$.

Gradi di libertà di un punto generico del CR:

In virtù dell'indeformabilità del corpo rigido, il numero di gradi di libertà di un punto generico del corpo rigido: $6 = 3 (\mathbf{r}_{CM}) + 3 (r', \theta, \varphi)$.

Sistemi di riferimento usati per descrivere in moto di un CR:

1 – Oxyz, sistema di riferimento laboratorio (sistema L);

2 – CMxyz, sistema di riferimento del centro di massa (sistema C): (nel sistema C un punto generico del corpo rigido in moto si muove lungo un arco di circonferenza con velocità $\mathbf{v}_i' = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{CM}$);

Ma in conseguenza dell'indeformabilità di del corpo rigido il moto di un punto generico rispetto al centro di massa non può che essere un moto circolare con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$, che è la stessa di tutti gli altri punti del sistema. Quindi si avrà $\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega}$ e $\mathbf{v}_i' = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}_i'$.

3 – CMx'y'z', sistema di riferimento solidale al corpo rigido: in tale sistema tutti i punti del corpo rigido sono in quiete!

Centro di massa di un corpo rigido discreto: $\mathbf{r}_{CM} = \sum_1^N m_i \mathbf{r}_i / \sum_1^N m_i$
(i.e.: di un sistema di punti con struttura rigida, es. manubrio!)

Centro di massa di un corpo rigido e continuo, in termini di dm:
 $\mathbf{r}_{CM}(x_{CM}, y_{CM}, z_{CM})$:

$$\mathbf{r}_{CM} = [\int_M \mathbf{r} dm] / [\int_M dm] = [\int_V \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) dV] / [\int_V \rho(\mathbf{r}) dV];$$
$$x_{CM} = [\int_M x dm] / [\int_M dm] = [\int_V x \rho(\mathbf{r}) dV] / [\int_V \rho(\mathbf{r}) dV], \text{ etc.}$$

Le proprietà del CM di un corpo rigido sono le stesse che abbiamo dimostrato per i sistemi di punti materiali. Esso si troverà sempre nel baricentro (= punto di massima simmetria) del corpo rigido.

N.B. per il calcolo del CM di un corpo rigido omogeneo si sfruttano le proprietà geometriche del solido che ne riproduce la forma, e il CM coincide con il baricentro del solido.

Esempi di calcolo del CM di un CR: disco; cilindro, cono, semisfera, guscio sferico, etc. etc...

Moto generale di un corpo rigido.

Il moto di un punto generico del CR è un moto roto-traslazionale.
Per il moto roto-traslazionale : $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_Q + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{QP}$, quindi il moto di un punto generico P può essere considerato come la somma di un moto traslazionale e di un moto rotazionale puri.

Moto puramente traslazionale del CR: tutti i punti del corpo rigido nel loro moto descrivono traiettorie parallele fra di loro, e

quindi il moto del corpo rigido è tale che l'orientazione del vettore posizione relativa di una coppia di punti rimane costante nel tempo.

Calcolo delle grandezze \mathbf{P}_S , $\mathbf{L}_{O,S}$ e $E_{k,S}$:

$$\mathbf{P}_S = M\mathbf{v}_{CM}; \quad \mathbf{L}_{O,S} = \mathbf{r}_{CM} \wedge M\mathbf{v}_{CM}; \quad E_{k,S} = \frac{1}{2} M\mathbf{v}_{CM}^2.$$

Infatti tali relazioni dinamiche nel caso di moto traslazionale puro ($\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{CM}$) si ricavano come seguea:

$$\mathbf{P}_S = \sum_1^N \mathbf{p}_i = \sum_1^N m_i \mathbf{v}_i = (\sum_1^N m_i) \mathbf{v}_{CM} = M\mathbf{v}_{CM},$$

$$E_{k,S} = \frac{1}{2} \sum_1^N m_i v_i^2 = \frac{1}{2} M\mathbf{v}_{CM}^2 = E_{k,CM}$$

$$\mathbf{L}_{O,S} = \sum_1^N \mathbf{L}_{O,i} = \sum_1^N \mathbf{r}_i \wedge m_i \mathbf{v}_{CM} = \mathbf{r}_{CM} \wedge M\mathbf{v}_{CM} = \mathbf{L}_{O,CM},$$

dato che sia $E_{k,INT} = 0$ che $\mathbf{L}_{INT} = \sum_1^N \mathbf{L}_{CM,i} = \mathbf{0}$: infatti nel caso di moto puramente traslazionale tutti i punti del corpo rigido si muovono con velocità $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{CM}$, e quindi $\mathbf{v}'_i = 0$, ossia $E_{k,i}' = 0$ e $\mathbf{L}_{CM,i}' = 0$, per ogni punto materiale i del corpo rigido.

Moto puramente rotazionale del corpo rigido: moto in cui ogni punto materiale descrivono archi di circonferenza (tutti con la stessa velocità angolare) rispetto a un asse di rotazione \mathbf{k} passante per un punto particolare del sistema.

Se l'asse \mathbf{k} passa per il CM allora la velocità del PM m_i diventa:

$$\mathbf{v}'_i = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}'_i$$

perchè il punto generico m_i descrive un moto circolare attorno al CM con velocità angolare comune a tutti i punti del corpo rigido.

Calcolo delle grandezze:

$$\mathbf{P}'_S = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{L}'_{CM,S} = \sum_1^N \mathbf{r}'_i \wedge m_i \mathbf{v}'_i = \sum_1^N m_i d_i'^2 \omega \mathbf{k} =$$

$$E'_{k,S} = \frac{1}{2} \sum_1^N m_i v_i'^2 = \frac{1}{2} \sum_1^N m_i d_i'^2 \omega^2$$

dove d'_i è la distanza del punto materiale di massa m_i dall'asse di rotazione passante per il centro di massa e I_C è il momento di inerzia del corpo rigido rispetto all'asse di rotazione passante per il suo CM.

Moto roto-traslazionale del corpo rigido rispetto al sistema del laboratorio OXYZ: $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{CM} + \omega \wedge \mathbf{r}_P'$, e le grandezze dinamiche \mathbf{P}_S , $\mathbf{L}_{O,S}$ e $E_{k,S}$ si ottengono dalla somma delle corrispondenti grandezze derivate per il moto puramente traslatorio e per il moto puramente rotatorio attorno al CM, che riproduce esattamente le relazioni di König per i sistemi di punti materiali.

Equazioni cardinali del moto di un corpo rigido:

Dinamica del corpo rigido:

I^a equazione cardinale del moto di un corpo rigido, o equazione cardinale del moto traslazionale:

$$d\mathbf{P}_S/dt = \mathbf{F}^{EXT},$$

ma per il teorema del moto del CM si ha anche

$$M\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{F}^{EXT} = \sum_1^N \mathbf{F}_i^{(E)}.$$

II^a equazione cardinale del moto di un corpo rigido, o equazione cardinale del moto rotazionale attorno ad un asse per il polo O:

$$d\mathbf{L}_{S,O}/dt = \boldsymbol{\tau}_O^{\text{EXT}} = \sum_1^N \boldsymbol{\tau}_{i,O}^{(E)}.$$

N.B.: Moto rotazionale attorno ad un asse passante per il CM: vale ancora il teorema del momento angolare:

$$d\mathbf{L}_S^{\text{INT}}/dt = d\mathbf{L}_{S,\text{CM}}/dt = \sum_1^N \boldsymbol{\tau}_{i,\text{CM}}^{(E)}.$$

Statica del corpo rigido:

Condizione (configurazione) di equilibrio di un corpo rigido:

$$d\mathbf{P}_S/dt = \mathbf{F}^{\text{EXT}} = \sum_1^N \mathbf{F}_i^{(E)} = \mathbf{0}$$

$$d\mathbf{L}_{S,O}/dt = \boldsymbol{\tau}_O^{\text{EXT}} = \sum_1^N \boldsymbol{\tau}_{i,O}^{(E)} = \mathbf{0}$$

Sono due equazioni vettoriali che danno 6 equazioni scalari. Se però il sistema di forze sterne appartiene a un piano (xy) allora le relazioni scalari si riducono a 3 soltanto:

$$\sum_1^N F_{i,x}^{(e)} = 0, \quad \sum_1^N F_{i,y}^{(e)} = 0, \quad \sum_1^N \tau_{i,z}^{(e)} = 0.$$

Esempio: Caso di una sfera appesa. tramite una fune ideale ancorata al suo baricentro, a un gancio O posto su una parete verticale.

Moto rotazionale attorno ad un asse con un punto fisso O:

l'equazione del moto si ottiene dal teorema del momento angolare:

$$d\mathbf{L}_{S,O}/dt = \boldsymbol{\tau}_O^{\text{EXT}} = \sum_i \boldsymbol{\tau}_{O,i}^{(E)}.$$

N.B.: Moto rotazionale attorno ad un asse passante per il CM: vale ancora il teorema del momento angolare:

$$d\mathbf{L}_{S,INT}/dt = d\mathbf{L}_{S,CM}/dt = \sum_i \boldsymbol{\tau}_{i,CM}^{(E)}.$$

Per risolvere l'equazione cardinale del moto rotazionale del corpo rigido bisogna aver calcolato $\mathbf{L}_{S,O}$, oppure $\mathbf{L}_{S,CM}$ e poi derivare rispetto al tempo.

Ergo, prima di poter affrontare la risoluzione dell'equazione del moto del corpo rigido, bisogna calcolare il momento angolare $\mathbf{L}_{S,O}$.

Momento angolare del corpo rigido, due casi particolari:

- 1 – caso di una coppia di particelle in rotazione attorno ad un asse perpendicolare alla congiungente;
- 2 – caso della piastra in rotazione attorno ad un asse passante per un punto fisso e perpendicolare al piano della lamina.
- 3 – caso di un corpo solido tridimensionale in rotazione attorno ad un asse passante per il CM supposto fisso.

1 – Nei casi di corpi con simmetria rispetto all'asse di rotazione $\mathbf{L} \propto \boldsymbol{\omega}$, tramite un coefficiente di inerzia, associato alla distribuzione delle masse attorno all'asse di rotazione:

$$I_Z = \sum_i m_i R_i^2$$

e che è chiamato *momento di inerzia* del corpo rigido.

2 – Il caso di un manubrio che ruota attorno ad un asse fisso non parallelo all'asse di simmetria passante per il CM del manubrio e non perpendicolare alla congiungente le due masse puntiformi.

N.B.: \mathbf{L}_O non più parallelo a $\boldsymbol{\omega}$ (i.e.: $\mathbf{L}_O \neq I_Z \boldsymbol{\omega}$), ma è pur sempre $L_z = \sum_i L_{i,z} = \sum_i m_i R_i^2 \omega$.

3 – Momento angolare del corpo rigido: Caso generale:

$$\mathbf{L}_{O,S} = \sum_i \mathbf{L}_{O,i} = \sum_i \mathbf{r}_i \wedge m_i \mathbf{v}_i$$

N.B.: in generale, $\mathbf{L}_O \neq I_Z \boldsymbol{\omega}$ e è invece $\mathbf{L}_{O,Z} = I_Z \boldsymbol{\omega}$, con $z // \boldsymbol{\omega}$.

Infatti: $\mathbf{L}_{O,i} = \mathbf{r}_i m_i \mathbf{v}_i = m_i \mathbf{v}_i \mathbf{r}_i$, ma $\mathbf{v}_i = |\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}_i| = \omega r_i \sin \theta_i = \omega R_i$, e quindi $\mathbf{L}_{O,i} = m_i R_i \omega \mathbf{r}_i$, ma non è parallelo a $\boldsymbol{\omega}$: $\mathbf{L}_{O,i} // \boldsymbol{\omega}$.

$$L_{O,z} = \sum_i L_{O,z,i} = \sum_i r_i m_i v_i \cos(\pi/2 - \theta_i) = \sum_i m_i R_i^2 \omega$$

Componenti del momento angolare di un corpo rigido parallela e perpendicolare all'asse di rotazione z.

$$L_{O,z} = \sum_i L_{O,i,z} = \sum_i m_i R_i^2 \omega = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \omega = I_Z \omega,$$

con I_Z momento di inerzia del corpo rigido rispetto all'asse z passante per il punto fisso O.

Mentre $L_{\perp} = ?$ la vedremo più avanti.

Momento d'inerzia del corpo rigido

Definizione di momento elementare di inerzia di un corpo rigidopuntiforme rispetto ad un asse di rotazione z:

$$I_Z = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2),$$

e suo significato fisico.

Se il corpo rigido è continuo, si parte da dI_Z

$$dI_Z = \int_M r^2 dm = \int_M r^2 \rho(\mathbf{r}) dV$$

Per integrazione su tutto il volume si trova sempre un'espressione del tipo:

$$I_Z = M K^2$$

dove K è il raggio giratore del corpo rigido (suo significato)

Nota Bene: Il momento di inerzia:

- 1) dipende dalla distribuzione di massa del corpo rigido rispetto all'asse di rotazione;
- 2) non è una caratteristica intrinseca del corpo come lo sono la sua massa e il suo CM,
- 3) misura la resistenza opposta dal corpo rigido al cambiamento della sua velocità di rotazione ω .

Momento di inerzia di un CR piano, disposto nel piano xy :

$$I_Z = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2), I_X = \sum_i m_i y_i^2, I_Y = \sum_i m_i x_i^2,$$

ergo $I_Z = I_X + I_Y$,

Se inoltre il corpo rigido piano è simmetrico nel piano xy , cioè se $I_X = I_Y$ allora sarà $I_X = I_Z/2$.

Sua dipendenza dall'orientazione dell'asse di rotazione rispetto a cui la distribuzione di massa del corpo presenta una differente inerzia rotazionale.

Calcolo dei momenti di inerzia di alcuni corpi rigidi notevoli rispetto ad assi perpendicolare o coplanari: anello, disco, sfera, semi-anello, semi-disco e semi-sfera.

Il caso della sbarra omogenea sottile: calcolo del momento di inerzia rispetto a un asse, perpendicolare all'asta, passante per il suo CM e per un suo estremo.

Teorema di Huygens-Steiner: $I_O = I_C + Md^2$, $d = OC$.

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} I_O &= \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum_i m_i [(x_{CM} + x'_i)^2 + (y_{CM} + y'_i)^2] = \\ &= \sum_i m_i (x_{CM}^2 + y_{CM}^2) + \sum_i m_i (x'^2_i + y'^2_i) + \\ &\quad + 2 x_{CM} (\sum_i m_i x'_i) + 2 y_{CM} (\sum_i m_i y'_i) \\ &= (\sum_i m_i) d^2 + I_C. \end{aligned}$$

ERGO, nel calcolo del momento di inerzia di un corpo rigido basterà procedere al calcolo rispetto ad un asse passante per il suo CM, dopo di che il momento di inerzia rispetto a un asse parallelo passante per un punto O distante $OC = d$ dall'asse per il CM sarà dato dalla relazione $I_O = I_C + Md^2$, quale che sia l'orientazione dell'asse rispetto al corpo rigido.

Tornando al momento angolare:

Si ha $\mathbf{L}_O = I_Z \boldsymbol{\omega}$ se l'asse z è asse di simmetria e $L_{O,Z} = I_Z \omega$ se l'asse è un asse generico passante per O.

Significato di momento angolare di un corpo rigido.

Quando risulta $\mathbf{L}_O = I_Z \boldsymbol{\omega}$ si dice che z è un asse principale di inerzia per il corpo rigido.

Qualunque sia la forma del corpo esistono almeno 3 assi principali di inerzia (X_0, Y_0, Z_0), solidali al corpo rigido e ruotanti con esso, mutuamente perpendicolari che si intersecano nel punto O considerato.

Se il punto O coincide con il CM del sistema si parla di assi centrali di inerzia o, anche, di assi liberi di rotazione.

Inerzia rotazionale del corpo rigido quando ruota attorno a un asse libero di rotazione. In termini dei momenti principali di inerzia I_1, I_2 e I_3 si potrà scrivere $\mathbf{L} = I_1 \omega_{X0} \mathbf{u}_{X0} + I_2 \omega_{Y0} \mathbf{u}_{Y0} + I_3 \omega_{Z0} \mathbf{u}_{Z0}$, dove $\omega_{X0} \mathbf{u}_{X0}$ rappresenta la componente di $\boldsymbol{\omega}$ nella direzione X_0 etc. etc.. Se la rotazione avviene lungo un asse principale di inerzia, ad es. Z_0 , allora $\boldsymbol{\omega} = \omega_{Z0} \mathbf{u}_{Z0}$, la relazione si semplifica in $\mathbf{L} = I_3 \omega_{Z0} \mathbf{u}_{Z0}$, cioè $\mathbf{L} = I_Z \boldsymbol{\omega}$, che vale quando l'asse di rotazione è un asse principale di inerzia.

Energia cinetica del corpo rigido e lavoro delle forze esterne:

$$\Delta E_{k,S} = W^{\text{EXT}}.$$

Casi di moto puramente:

- traslazionale: $E_{k,S} = E_{k,CM} = \frac{1}{2} M v_{CM}^2$
- rotazionale: $E_{k,S} = \sum_i E_{k,i} = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\omega R_i)^2 = \sum_i m_i R_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I_O \omega^2$.

Caso generale di moto di rototraslazionale:

$$E_{k,S} = \frac{1}{2} I_C \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}^2 = E_k' + E_{k,CM},$$

secondo il teorema di Konig.

Relazione di Huygens-Steiner e Energia cinetica del corpo rigido in moto rotazionale attorno ad un asse per A.

Energia cinetica rotazionale:

$$E_{k,S} = \sum_i E_{k,i} = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\omega R_i)^2 = \sum_i m_i R_i^2 \omega^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}I_O \omega^2 = \frac{1}{2}(I_C + Md^2)\omega^2 = \frac{1}{2}I_C \omega^2 + \frac{1}{2}Md^2\omega^2 = \\
&= \frac{1}{2}I_C \omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 = E_k' + E_{k,CM}, \\
&= \text{cioè lo stesso risultato di Konig.}
\end{aligned}$$

Sistemi di forze equivalenti agenti su un corpo rigido: forza risultante e coppia di forze (a risultante nulla):

Lavoro delle forza risultante:

$$\begin{aligned}
dE_{k,S} &= d(\frac{1}{2}Mv_{CM}^2) = d(\frac{1}{2}M\mathbf{v}_{CM} \cdot \mathbf{v}_{CM}) = M\mathbf{v}_{CM} \cdot d\mathbf{v}_{CM} = M(d\mathbf{r}_{CM}/dt) \\
&\bullet \mathbf{a}_{CM}dt = \mathbf{F}^{EXT} \bullet d\mathbf{r}_{CM} = dW^{EXT}
\end{aligned}$$

Lavoro dei momenti delle forze esterne:

$$\begin{aligned}
dE_{k,S} &= d(\frac{1}{2}I_C\omega^2) = d(\frac{1}{2}I_C\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) = I_C\boldsymbol{\omega} \cdot d\boldsymbol{\omega} = I_C\omega\mathbf{u}_\omega \bullet I_C\boldsymbol{\omega} = I_Cd\theta/dt \\
&\mathbf{u}_\omega \bullet \boldsymbol{\alpha}dt = I_C\alpha d\theta = \tau_Z d\theta = dW^\tau.
\end{aligned}$$

Lavoro delle forze esterne conservative: $W^{EXT} = -\Delta E_{p,EXT}$.

Energia totale meccanica del corpo rigido.

Conservazione dell'energia totale meccanica E_T .

Equazioni del moto del corpo rigido: $d\mathbf{L}_{S,O}/dt = \sum_i \boldsymbol{\tau}_{i,O}^{(E)}$.

Caso del moto rotazionale attorno ad un asse con almeno un punto fisso O (oppure il CM fisso): $I_O\omega = \sum_i \boldsymbol{\tau}_{i,O}^{(E)}$ (oppure $I_C\omega = \sum_i \boldsymbol{\tau}_{i,CM}^{(E)}$),

Caso di moto senza neanche un punto fisso: bisogna usare come polo il CM e fare $I_C\omega = \sum_i \boldsymbol{\tau}_{i,CM}^{(e)}$.

Risoluzione dell'equazione del moto rotazionale e calcolo dell'integrale primo del moto $\theta = \theta(t)$.

Esempi di moto puramente rotazionale: soluzione dell'equazione del moto. Caso del moto di rotazione attorno ad un asse principale di inerzia e attorno ad un asse generico.

Per la determinazione della legge oraria del moto rotazionale si usa:
 $I_Z \alpha = \sum_i \tau_{i,Z}$.

Sul moto generale del corpo rigido: completamente determinato dal punto di vista cinematico dalla conoscenza di \mathbf{P}_S e di $\mathbf{L}_{S,O}$, perchè in virtù delle due equazioni cardinali della dinamica si ha :

$$\mathbf{M}\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{F}^{EXT} = \sum_{i=1}^k \mathbf{F}_i^{(e)}, \text{ e } d\mathbf{L}_{S,O}/dt = \sum_{i=1}^k \boldsymbol{\tau}_{i,O}^{(e)},$$

cioè anche $d\mathbf{L}(t)/dt = d(I_Z \boldsymbol{\omega})/dt = (dI_Z/dt)\boldsymbol{\omega} + I_Z d\boldsymbol{\omega}/dt$.

$(dI_Z/dt) \neq 0$ quando:

- 1) l'asse di rotazione non è solidale al corpo rigido,
- 2) sistema non-rigido a geometria variabile.

In tal caso, se il sistema è libero, si avrà $\mathbf{L} = I_Z \boldsymbol{\omega} = \text{costante}$, e quindi se I_Z varia per effetto dell'azione delle sole forze interne, il modulo ω di $\boldsymbol{\omega}$ dovrà variare in modo da far sì che $I_Z \omega$ sia costante! Esempi: pattinatore sulla pista di ghiaccio a braccia aperte e chiuse!

Per la soluzione delle equazioni del moto bisognerà fare uso di entrambe le equazioni cardinali della dinamica dei sistemi specializzate al corpo rigido.

Esempi di moto roto-traslazionale notevoli:

- 1) disco che ruota attorno ad un asse centrale con il CM fisso in un sistema di riferimento inerziale (calcolo dell'accelerazione angolare e delle reazioni vincolari sviluppate dai cunei);
- 2) disco che si srotola da una fune avvolta su di esso e collegata al soffitto (calcolo della traiettoria del CM, dell'accelerazione angolare e dell' \mathbf{a}_{CM} , nonché della tensione della fune);
- 3) disco che rotola su un piano scabro per l'azione di una forza orizzontale applicata tramite una fune avvolta sul disco medesimo (calcolo della traiettoria del CM, dell'accelerazione angolare del disco e dell' \mathbf{a}_{CM} , nonché delle reazioni vincolari). Esercizi proposti per casa agli studenti.

Moto di un corpo rigido libero: conservazione di \mathbf{P}_S , $\mathbf{L}_{S,O}$ e E_T .

Teorema dell'impulso di una forza ($d\mathbf{J} = \mathbf{F}dt = d\mathbf{p}$), e Teorema del momento dell'impulso per il corpo rigido: Variazione della quantità di moto, $\mathbf{J} = \Delta\mathbf{P}_S$ e del momento della quantità di moto: $\mathbf{r}_O \wedge \mathbf{J} = \Delta\mathbf{L}_O$.

Urti tra particelle libere e corpi rigidi vincolati. Conservazione del momento angolare.

Statica del corpo rigido:

configurazione di equilibrio, condizioni per l'equilibrio:

$$\mathbf{F}^{\text{EXT}} = \sum_{i=1}^k \mathbf{F}_i^{(e)} = 0 \text{ e } \boldsymbol{\tau}_O^{\text{EXT}} = \sum_{i=1}^k \boldsymbol{\tau}_{i,O}^{(e)} = 0.$$

Due equazioni vettoriali che danno 6 equazioni scalari. Se però il sistema di forze appartiene a un piano (xy) allora le relazioni scalari si riducono a 3 soltanto:

$$\sum_i F_{i,x}^{(e)} = 0, \sum_i F_{i,y}^{(e)} = 0 \text{ e } \sum_i \tau_{i,z}^{(e)} = 0.$$

Esempio: Caso di una sfera appesa a un vincolo su una parete verticale.

Pendolo fisico: risoluzione dell'equazione del moto.

Esercizi sulla dinamica del corpo rigido.