

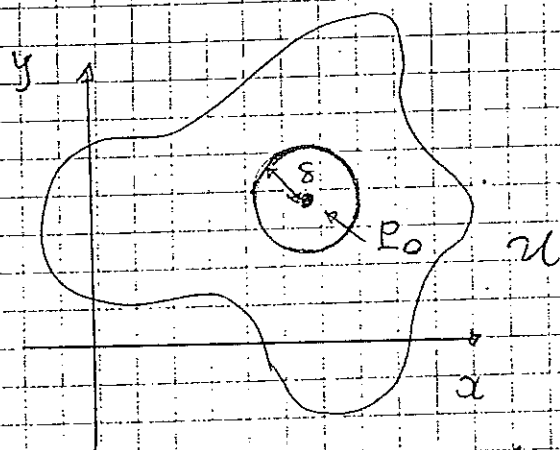
★ PUNTI CRITICI (≡ STAZIONARI) DI FUNZIONI DI DUE VARIABILI

GEOMETRIA Prof. M. Spiga
Addendum II - Richiami di Analisi

$u \subset \mathbb{R}^2$, u aperto, $f \in C^2(u)$

notazioni: $P_0 = (x_0, y_0) = \underline{r}_0$ etc. ipotesi di lavoro

★ Def. P_0 è un punto di massimo relativo (o per) f se $f(P) \leq f(P_0) \quad \forall P$ in un opportuno intorno aperto di P_0 (es. una B.C. con δ sufficientemente piccolo ($\delta > 0$))



se vale $\leq$ si parla di massimo relativo proprio

★ La parola relativo si rif. al fatto che stiamo considerando

uno studio locale

Analoghe def. per punti di minimo relativo ($>$ e $>$)

★ Proposizione P_0 massimo (o minimo) relativo
 $\Rightarrow \nabla f(P_0) = 0$ (ovvero $f'_x = f'_y = 0$)

Dim. Sia $\underline{r}(t) := \underline{r}_0 + \underline{u}t = \underline{r}_t$

con $\underline{u} = \frac{\nabla f(P_0)}{\|\nabla f(P_0)\|}$, $\nabla f(P_0) \neq 0$.

Sia $F(t) = f(r(t)) = f(p(t))$

Si ha (teor. di Lagrange)

$$F(t) - F(0) = F'(\xi) \cdot t \quad 0 < \xi < t \quad (se\ t > 0)$$

$$= \langle \nabla f(p_\xi), \underline{u} \rangle \cdot t \quad (\text{der. f. composta})$$

ora $\nabla f(p)$ rimane $\neq 0$ localmente

* e il prod. scalare $\neq 0$

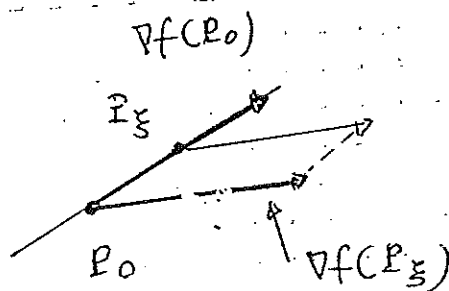
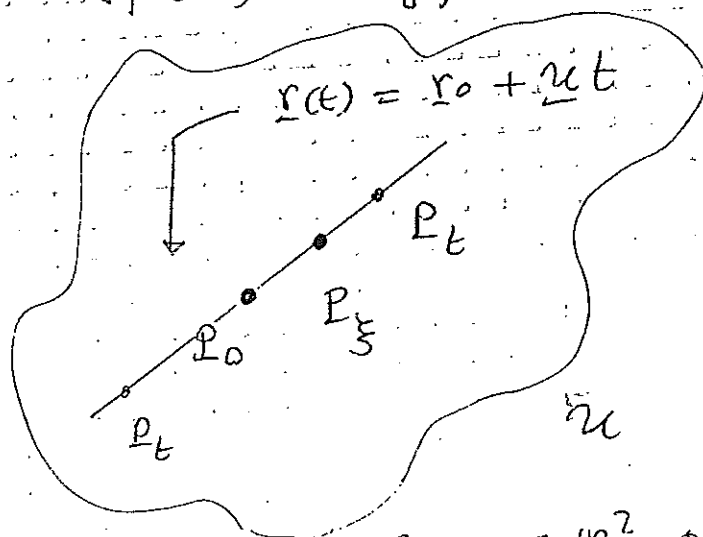
$\Rightarrow$ l'ultima quantità scritta > 0 per

$t > 0$ suff. piccolo, ed < 0 per $t < 0$

suff. piccolo $\Rightarrow p_0$ non può essere né di

max né di min. relativo.

[Dalla discussione sulla pendenza, in un tale punto $\nabla f(p_0) = \text{tg } \varphi = \text{pendenza} = 0 \dots \dots \dots]$



$$(f: \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f \in C^2(\mathcal{X}))$$

* Def. $p_0 \in \mathcal{X}$ si dice critico, o stazionario per f se $\nabla f(p_0) = 0$ ($\dots$ il piano tangente a Σ è orizzontale)

* dunque un pto di max o min rel. è critico (a vicenda è falso $\dots$)

★ Un punto critico P_0 è detto di sella

se in ogni intorno ^{suo} esistono punti P' tali che $f(P') > f(P_0)$ e punti P'' tali che $f(P'') < f(P_0)$

Esempio: $z = f(x, y) = x^2 - y^2$ $O = (0, 0)$

l'unico punto critico, ed è un punto di sella

★★ TEOREMA Sia $f \in C^2(U)$ $U \subset \mathbb{R}^2$ aperto
 P_0 un punto critico di f .

Sia $H(P_0) = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix}$ la matrice H

(Simmetrica G.d. di Schwarz)) , e Q_H la

corrispondente forma quadratica.

Mora

- | | | | | |
|---|------------|--------------------------|---------------|------------------------|
| * | $Q_H(P_0)$ | <u>definita positiva</u> | $\Rightarrow$ | P_0 <u>min. rel.</u> |
| * | $Q_H(P_0)$ | <u>negativa</u> | $\Rightarrow$ | P_0 <u>max. rel.</u> |
| * | $Q_H(P_0)$ | <u>indefinita</u> | $\Rightarrow$ | P_0 <u>sella</u> |

(Q_H è non degenerata)

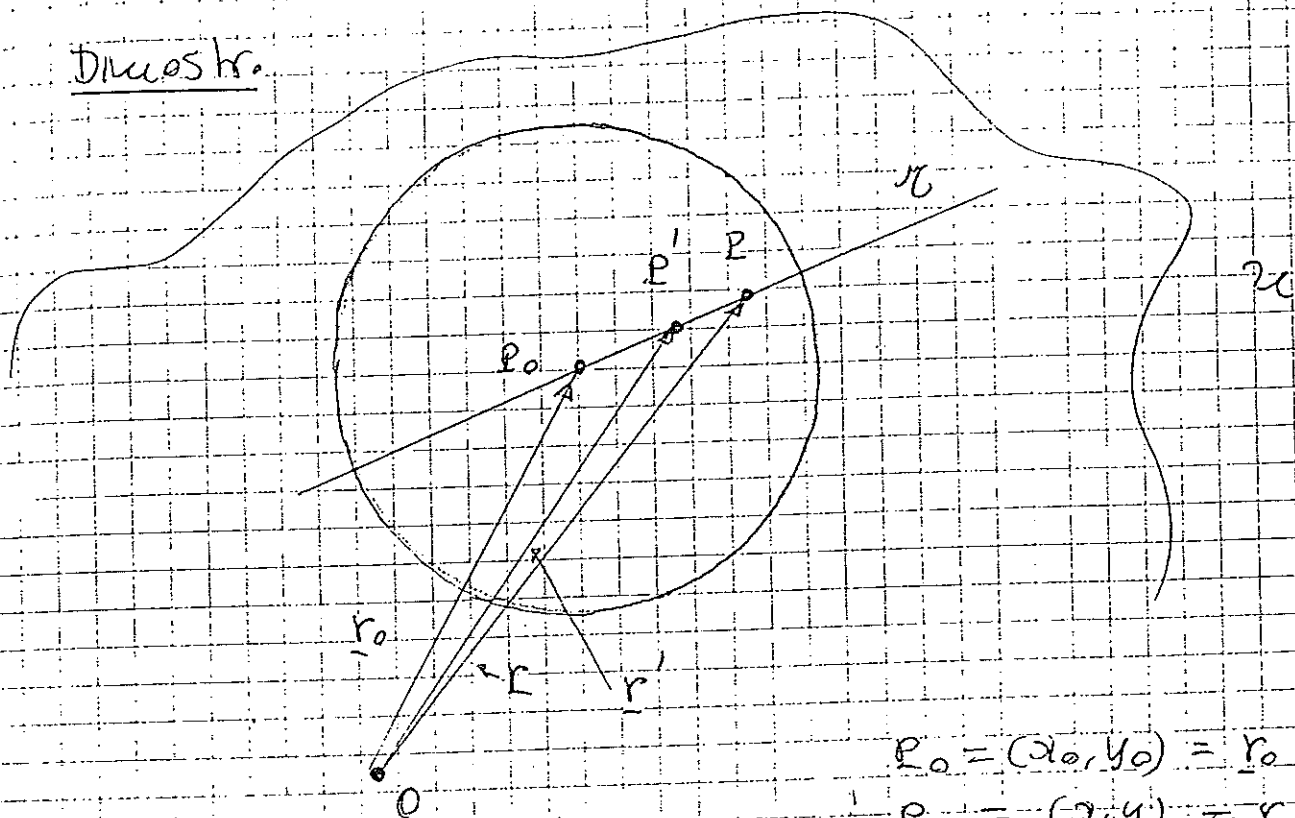
(... condizioni sufficienti...)

[★ Osservazione .. di fatto, se f è una fun.
di Morse .. allora ha punti critici isolati

★ Q_H è non degenerata in tali punti, vale $\Leftrightarrow$
nell'annunciato...] -33-

★ se Q_H è degenere, o $Q_H \equiv 0$
non si può dire nulla !!! come vedremo.

Dimostr.



$$P_0 = (x_0, y_0) = \underline{r}_0$$

$$P = (x, y) = \underline{r} \text{ utq.}$$

$$\underline{r} - \underline{r}_0 = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

Lavoriamo in un opportuno intorno circolare di P_0 ,
in cui scegliamo un punto P , fisso

$$\text{Sia } \underline{r} = \underline{r}(t) = \underline{r}_0 + t(\underline{r} - \underline{r}_0) \quad t=0 \rightarrow P_0$$

$$t=1 \rightarrow P$$

$$\begin{pmatrix} \begin{cases} x = x_0 + t \Delta x \\ y = y_0 + t \Delta y \end{cases} \end{pmatrix}$$

la formula di Taylor applicata, fino
al 1° ordine, a $f(t) := f(\underline{r}(t))$ dà:

$$F(t) = F(0) + F'(0) \cdot t + \frac{1}{2} F''(\xi) t^2$$

formula del
resto di Lagrange

$$F'(0) = \langle \nabla f(\underline{p}_0) | \dot{\underline{r}}(0) \rangle = \langle \nabla f(\underline{p}_0) |$$

in generale

$$F'(t) = \langle \nabla f(\underline{r}(t)) | \underline{r} - \underline{r}_0 \rangle$$

$$= f_x(\underline{r}(t)) \Delta x + f_y(\underline{r}(t)) \Delta y$$

$$\begin{aligned} \overline{F''(t)} &= (f_{xx}(\underline{r}(t)) \Delta x + f_{xy}(\underline{r}(t)) \Delta y) \\ &\quad + (f_{yx}(\underline{r}(t)) \Delta x + f_{yy}(\underline{r}(t)) \Delta y) \Delta \\ &= f_{xx}(\underline{r}(t)) \Delta x^2 + 2f_{xy}(\underline{r}(t)) \Delta x \Delta y + \\ &\quad + f_{yy}(\underline{r}(t)) \Delta y^2 \end{aligned}$$

$$= \langle \underline{r} - \underline{r}_0 | H(\underline{r}(t)) (\underline{r} - \underline{r}_0) \rangle =$$

$$= Q_H(\underline{r}(t)) (\underline{r} - \underline{r}_0)$$

⇒ per $t=1$,

$$\boxed{f(\underline{r}) = f(\underline{r}_0) + \frac{1}{2} Q_H(\underline{r}') (\underline{r} - \underline{r}_0)}$$

☆☆ ora, il carattere di una forma quadratica
non dipende, i cui coefficienti variano con
continuità con continuità localmente

(scegliendo eventualmente un intorno più piccolo)

$\Rightarrow \dots Q_H(r')$ è def. pos., ecc. se P_0 è $Q_H(P_0)$

$\Rightarrow$ segue l'asserto.

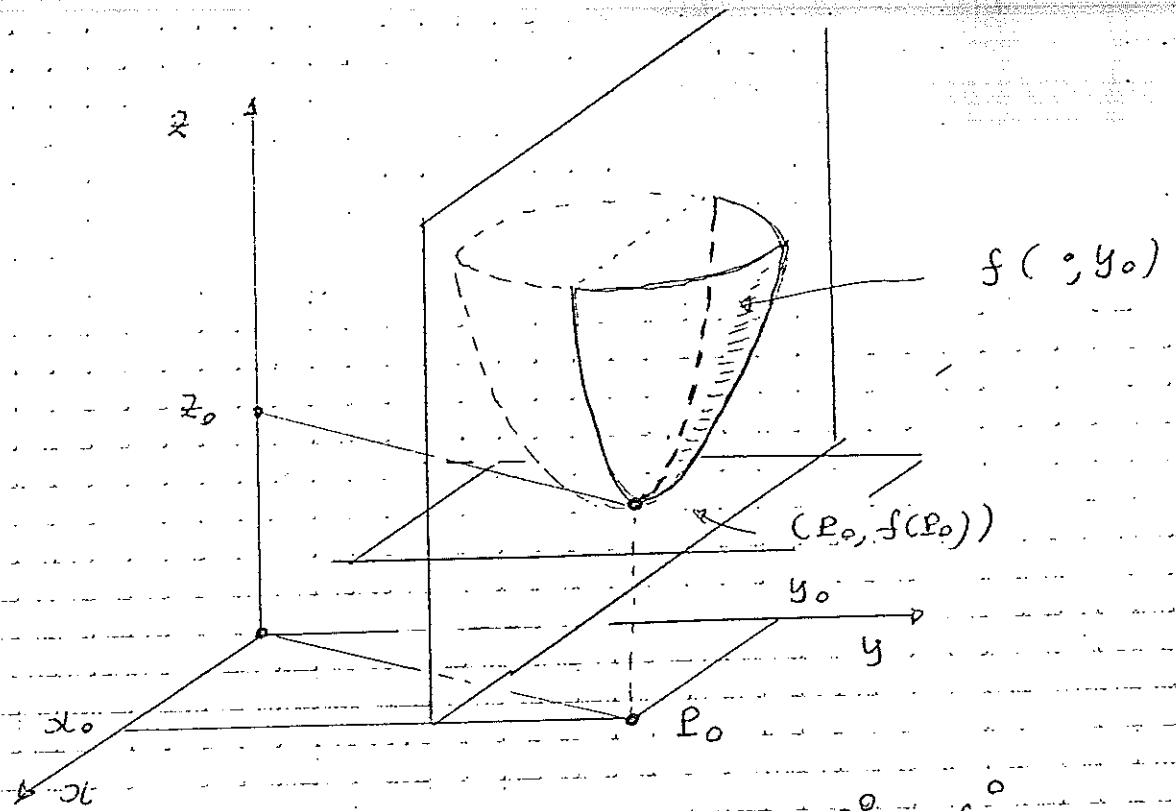
Ricordiamo che (posto sempre $\lambda_1 < \lambda_2$)

☆☆ $Q_H(P_0)$ def. pos. $\Leftrightarrow \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0 \Leftrightarrow$
 $\Downarrow$
 P_0 max. rel. proprio $\begin{cases} f''_{xx} > 0 & (\Rightarrow f''_{yy} > 0) \\ f''_{xx} f''_{yy} - f''_{xy}^2 > 0 \\ = \det H(P_0) \end{cases}$

☆☆ $Q_H(P_0)$ def. neg. $\Leftrightarrow \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0 \Leftrightarrow$
 $\Downarrow$
 P_0 max. rel. proprio $\begin{cases} f''_{xx} < 0 & (f''_{yy} < 0) \\ \det H > 0 \end{cases}$

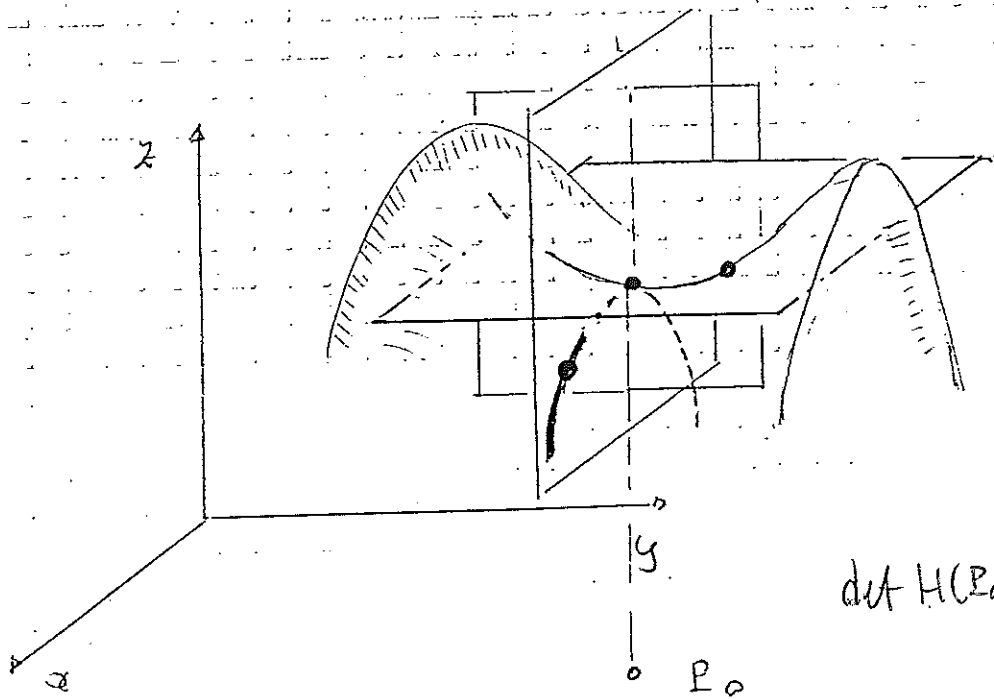
☆☆ $Q_H(P_0)$ indefinita $\Leftrightarrow \lambda_1 < 0 < \lambda_2$
 $\Downarrow$
 P_0 pto di sella $\Leftrightarrow \det H(P_0) < 0$

☆☆ geometricamente... si approssima f in un
 intorno di P_0 al 2° ordine tramite parabole
 (ellittici o iperbolici)
max, min sella



máximo relativo $\therefore f'_x = f'_y = 0$

$\det H(P_0) > 0$ $f''_{xx} > 0$ (e $f''_{yy} > 0$)



$\det H(P_0) < 0$

sela

Attenzione!

★ $z = x^3 + y^2$

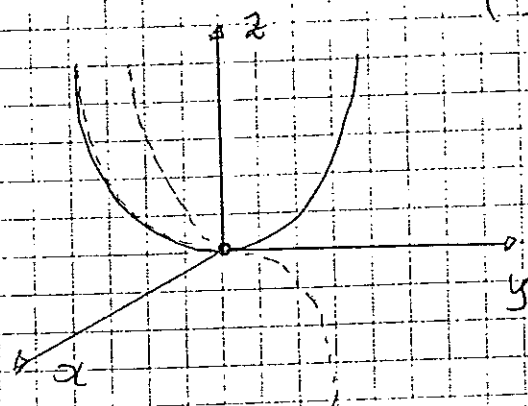
$P_0 = (0,0)$ è critico

$H(P_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 = 0$
 $\lambda_2 = 2$

Q_H semi definita positiva

P_0 ne' max ne' min

(di sella, secondo la nostra def



$z(x,0) = x^3$

$z(0,y) = y^2$

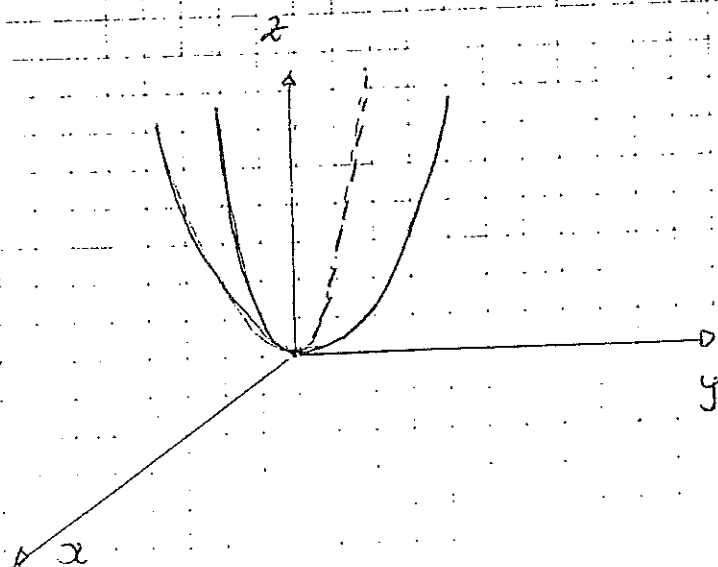
★ $z = x^4 + y^2$

$P_0 = (0,0)$ critico $H(P_0) =$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Q_H come prima ...

P_0 : minimo relativo proprio (di fatto assoluto)



★ $z = y^2$... P_0 : punto di minimo relativo (o
cilindro parabolico)

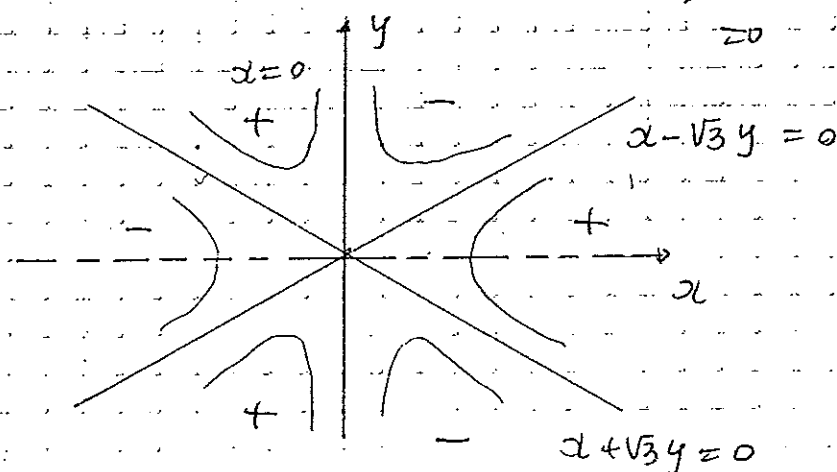
★ $z = x^3 - 3xy^2$ " sella di summa"
(monkey saddle)

$P_0 = (0,0)$ critico $H(P_0) \equiv 0$

Sup. livello

$$\begin{cases} z = x^3 - 3xy^2 \\ z = c \end{cases} \Rightarrow x(x - \sqrt{3}y)(x + \sqrt{3}y) = c$$

$(c=0) \Rightarrow 3$ rette nel piano



... previene la disuguaglianza ...

Esercizio

$f_b: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$b \in \mathbb{R}$
 $b \neq 0$

$$f_b(x, y) = x^2 - by^2 + \sin x^2 y^2$$

- Dimostrare che $(0,0)$ è l'unico pto critico (anche nella striscia $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq |y| < \dots\}$
- Studiare la lettura al variare di b .

4)

$$f_x = 2x + \cos x^2 y^2 \cdot 2x y^2 = 0$$

$$f_y = 2by + \cos x^2 y^2 \cdot 2x^2 y = 0$$

$$f_x = 2x [1 + \cos x^2 y^2 \cdot y^2] = 0$$

$$\Rightarrow 0 \quad x=0, \quad \Rightarrow \quad 2by = 0 \Rightarrow (b \neq 0) \quad y=0$$

$\Rightarrow (0,0)$ è critico

$$\text{oppure } x \neq 0 \Rightarrow 1 + \cos y^2 x^2 \cdot y^2 = 0$$

$$\text{ma } |y^2 \cdot \cos x^2 y^2| \leq |y^2| = y^2 < \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ tale poss. è esclusa. $\square$

Calcoliamo $Q_H \dots$ si può fare direttamente, ma vediamo così...

$$\sin x^2 y^2 = x^2 y^2 - \frac{(x^2 y^2)^3}{6} + \dots \quad (\text{Taylor})$$

$$\Rightarrow \dots Q_H(0,0) = 2(x^2 - by^2)$$

($x, y_0 = (0,0)$ prendo i termini di 2° grado...)

$$\Rightarrow \quad b > 0 \quad \rightarrow \text{sella}$$

$$b < 0 \quad \rightarrow \text{minimo rel. proprio}$$

E se $b=0$?

vediamo direttamente:

$$f_0(x,y) = x^2 + \sin x^2 y^2$$

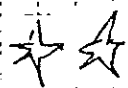
$(0,0)$ è ancora critico e $f_0(0,0) = 0$

in un intorno di $(0,0)$ è $\sin x^2 y^2 \geq 0$

$\Rightarrow$ ho un minimo relativo

Proprio? No:

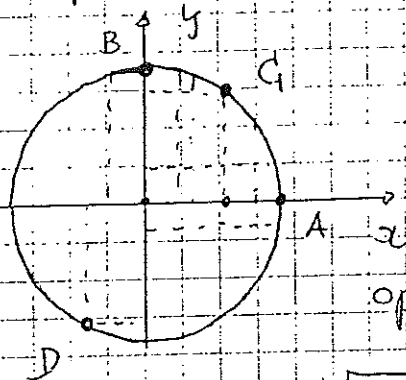
sia $x=0, y \neq 0 \dots$



TEOREMA DEL DIVI

★ $x^2 + y^2 = 1$, e $x^2 + y^2 - 1 = 0$

l'equazione, in forma implicita di una curva



essa può essere esplicitata

in funzione di una, o

più variabili,

opportuno intorno sull'asse x o

ex: $y = \pm \sqrt{1-x^2}$, o $x = \pm \sqrt{1-y^2}$

(scelta opportuna del segno)

(per A ... $x = \sqrt{1-y^2}$, per B ... $y = \sqrt{1-x^2}$

C ... $y = \sqrt{1-x^2}$ oppure $x = \sqrt{1-y^2}$

D : $y = -\sqrt{1-x^2}$ oppure $x = -\sqrt{1-y^2}$...

★ vedremo che " $f(x,y) = 0$ (eq. in forma implicita) descrive, sotto opportune condizioni locali, una curva regolare"

★ Attenzione! Senza ulteriori restrizioni, ogni sottoinsieme E del piano può essere descritto come il luogo dei punti tale che $f(x,y) = 0$ per una qualche f :

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & (x,y) \in E \\ 1 & (x,y) \notin E \end{cases}$$

★ Teorema sul Dm

Sia $U \subset \mathbb{R}^2$ aperto, $f \in C^1(U)$

Sia $P_0 \in U$ tale che $f(P_0) \equiv f(x_0, y_0) = 0$

e tale che $\nabla f(P_0) \neq 0$ (pu fissare le idee sup

poniamo, $\frac{\partial f}{\partial y}(P_0) \neq 0, e > 0$). Allora:

1) $\exists I \subset \mathbb{R}$, intorno di $x_0 \in \mathbb{R}$, ed

$\exists!$ $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$, $y = \varphi(x)$, $y_0 = \varphi(x_0)$

$f(x, \varphi(x)) \equiv 0 \quad \forall x \in I$

2) $\varphi \in C^1(I)$ e vale la formula:

$$\varphi'(x) = - \frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))}, \quad x \in I$$

($\neq 0$)

Osservazioni: *) $f_y(P_0) \neq 0 \Rightarrow f_y \neq 0$ localmente

in un opportuno intorno di P_0

*) nelle ipotesi del teorema, la tesi è:

" $f(x, y) = 0$ rappresenta, localmente, una

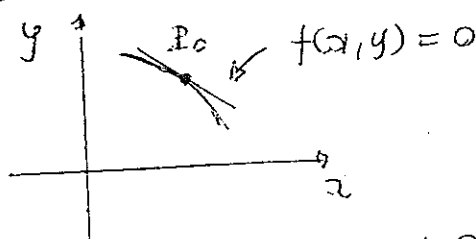
curva regolare

$$C: \begin{cases} x = x \\ y = \varphi(x) \end{cases} \dots e$$

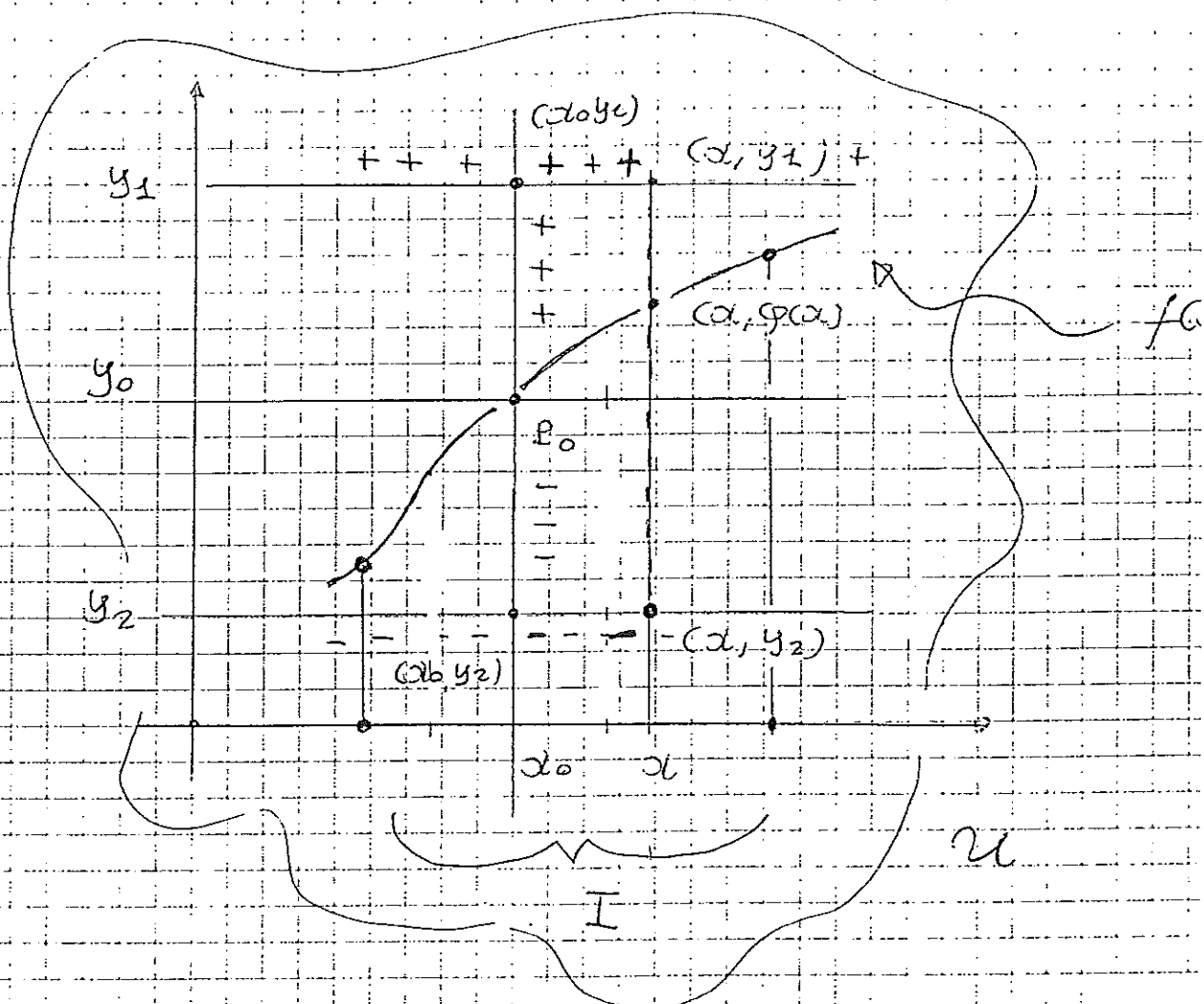
(...volgaro 1, 2, 3.

si può esplicitare risp

a y -- $y = \varphi(x)$



Dimostrazione



$F_{x_0}(y) \equiv f(x_0, y)$ è continua, $F_{x_0}(y_0) = 0$
 nel intorno
 di y_0 sull'asse y .

e $F_{x_0}'(y_0) > 0$ ($1 \equiv \frac{d}{dy}$)
 " $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, e localmente $F_{x_0}'(y)$

$\Rightarrow F_{x_0}$ è strictamente crescente $\Rightarrow \exists y_1, y_2$

con $F_{x_0}(y_1) > 0$, $F_{x_0}(y_2) < 0$
 " " "
 ($f(x_0, y_1) > 0$) ($f(x_0, y_2) < 0$)

Tali disuguaglianze persistono localmente...
 intorno di (x_0, y_1) e (x_0, y_2)

(vedi figura...)

Fissato $\alpha \in I$, si considera

$$F_{\alpha}(y) = f(\alpha, y) \quad y \in [y_2, y_1]$$

F_{α} è continua e assume valori di segno opposto agli estremi $\Rightarrow$ (teor. dei valori) $\exists \bar{y} \in [y_2, y_1]$

tales che $F_{\alpha}(\bar{y}) = 0$. Ma tale $\bar{y}$ è unico

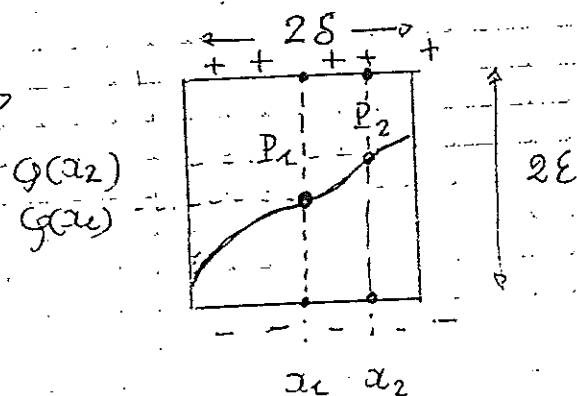
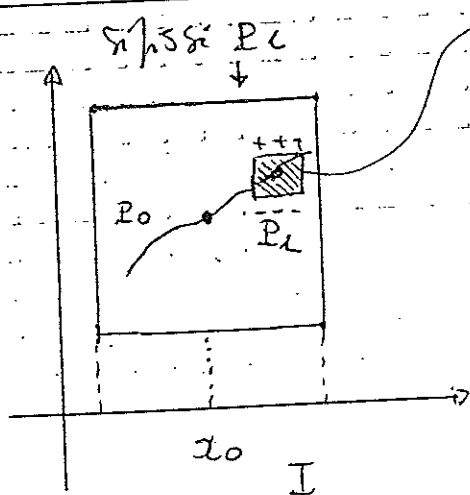
poiché F_{α} è strettamente crescente.

Si pone $\bar{y} = g(\alpha)$ (facendo variare α ...)

★ La funzione $y = g(\alpha)$ è quella cercata.

Per costruzione è $F(\alpha, g(\alpha)) \equiv 0$ in I

g è continua:



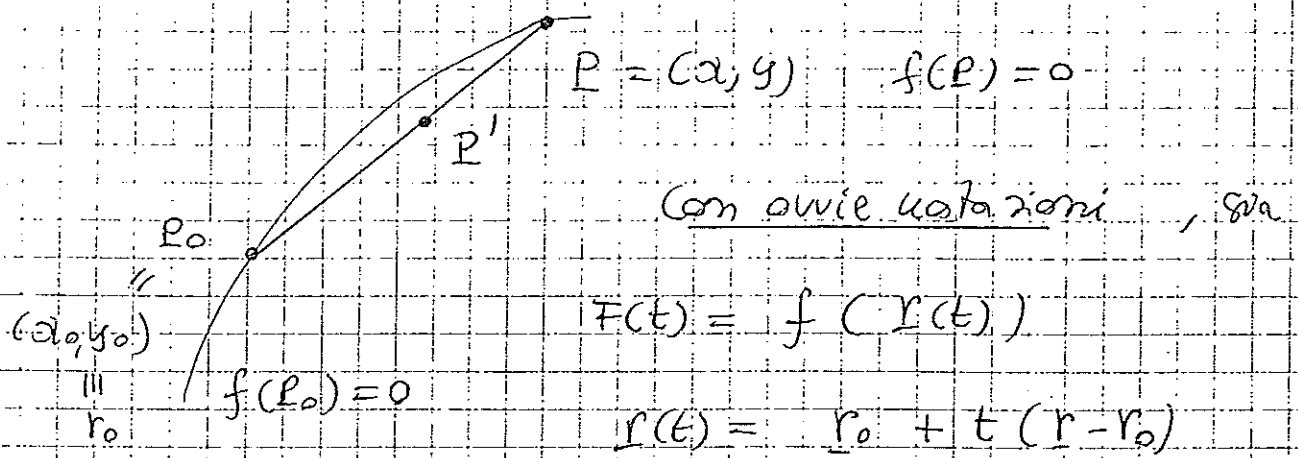
Dato $\varepsilon > 0$ (... suff. piccolo) trovo $\delta > 0$ tale che

$$|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow$$

$$|g(x_1) - g(x_2)| < \varepsilon$$

★ La dimostrazione vale nelle ipotesi più deboli: $f \in C^0(x)$, $f_y \in C^0(x)$

2) Se sapessi già che g è derivabile, la formula per g' ... (... Der. funz. sarebbe una banalità $\rightarrow$ composta)



$$F(t) = f(r(t))$$

$$r(t) = r_0 + t(r - r_0)$$

$$F(1) - F(0) = 0 = F'(\xi) \cdot (1-0) = F'(\xi)$$

$$\begin{matrix} \parallel & \parallel \\ f(P) & f(P_0) \\ \parallel & \parallel \\ 0 & 0 \end{matrix} = f_x(P') \Delta x + f_y(P)$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = - \frac{f_x(P')}{f_y(P')} \quad \neq 0 \dots \text{continuità}$$

$\Rightarrow$, se $\Delta x = x - x_0 \rightarrow 0$, il 2° membro

$$\rightarrow \frac{f_x(P_0)}{f_y(P_0)} = - \frac{f_x(x_0, g(x_0))}{f_y(x_0, g(x_0))}$$

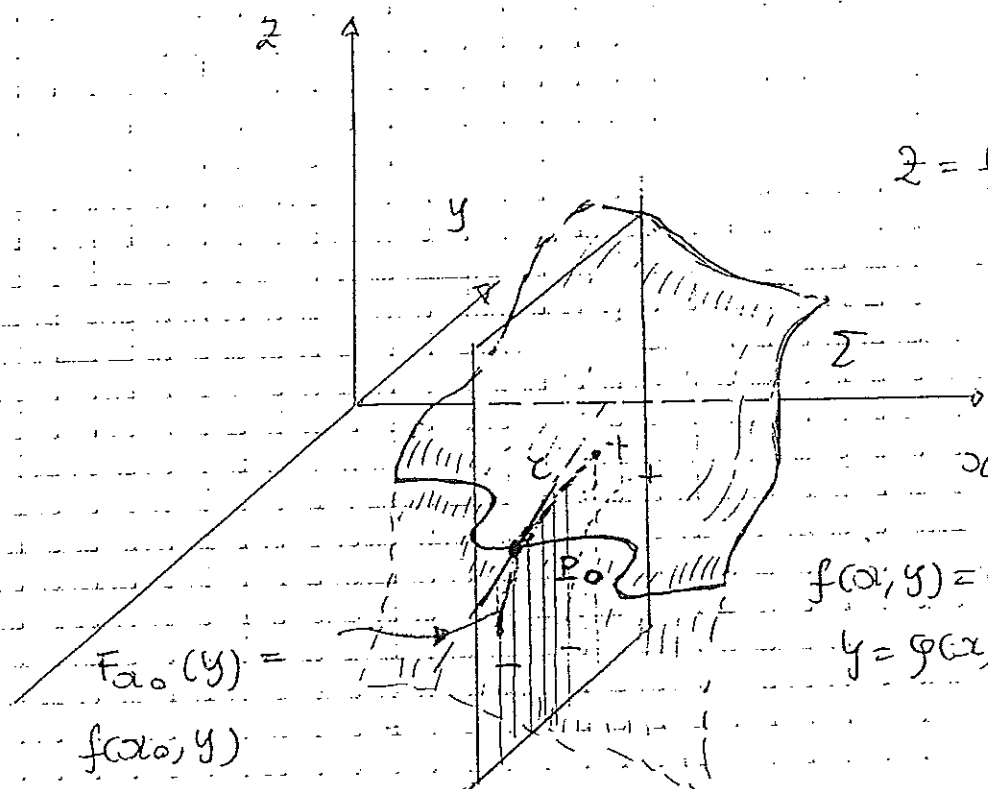
Variazando P_0 si ha l'asserto. $\square$

Eq. retta tangente

$$f'_x(x - x_0) + f'_y(y - y_0) = 0$$

$$m = g' = - \frac{f_x}{f_y}_{x_0} = \frac{y}{x} \quad (\text{in cui per. generica } x \neq 0)$$

★ Interpretazione geometrica della dimostrazione.



$$f(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} z = f(x, y) \\ z = 0 \end{cases}$$

$$y = g(x)$$

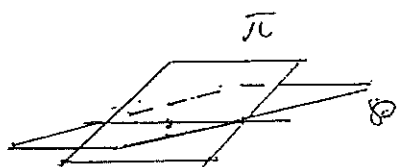
$$f_y(P_0) > 0$$

"coefficiente angolare di r "

$$\underline{z=0} \quad \text{e} \quad \underline{z = f_x^0 (x - x_0) + f_y^0 (y - y_0)}$$

π

π : piano tangente a Σ in $P_0 = (x_0, y_0,$
si intersecano transversalmente



★★ Osservazione: se $f \in C^0(\mathbb{R})$ posso calcolare
tutte le derivate di g derivando successivamente
da $f(x, g(x)) \equiv 0 \dots$

variante (applicazione del teorema di Brouwer - Ca)

$$f: S \rightarrow \mathbb{R} \quad S = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b \}$$

(stiscia)

$$f \in C^1(S) \quad e \quad 0 < m \leq f_y \leq M \quad m$$

$$\Rightarrow \exists! \bar{g} \in C^1([a, b]) \text{ tale che } f(x, \bar{g}(x))$$

$$\forall x \in [a, b].$$

Dim. Consideriamo $(C^0([a, b]), \| \cdot \|_{\sup})$:

come già sappiamo, è uno spazio di Banach

Definiamo $T: V \rightarrow V$ come

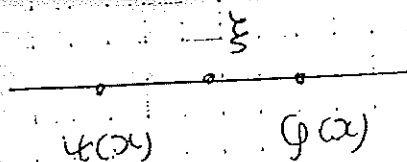
$$(Tg)(x) = g(x) - \frac{1}{M} f(x, g(x)) \quad , \quad \forall g \in V$$

T è ben definito...

★ Facciamo vedere che T è una contrazione

★ In tal caso, il punto fisso $\bar{g}$ di T è la
funzione cercata. Se $\varphi, \psi \in V$

$$\begin{aligned} (T\varphi)(x) - (T\psi)(x) &= \varphi(x) - \psi(x) - \\ &\quad - \frac{1}{M} [f(x, \varphi(x)) - f(x, \psi(x))] = (La \\ &= \varphi(x) - \psi(x) - \frac{1}{M} f_y(x, \xi) (\varphi(x) - \psi(x)) \end{aligned}$$



$$\xi \in (\psi(x), \phi(x))$$

$$(\dots x - \phi(x) > \psi(x) \dots)$$

$$= \left(1 - \frac{f_g(x, \xi)}{M}\right) (\phi(x) - \psi(x))$$

$$0 < \lambda < 1$$

$$\Rightarrow |(\pi \phi)(x) - (\pi \psi)(x)| \leq \left(1 - \frac{m}{M}\right) |\phi(x) - \psi(x)|$$

$$\Rightarrow |(\pi \phi)(x) - (\pi \psi)(x)| \leq \lambda \|\phi - \psi\| \quad \text{sup}$$

$$\Rightarrow \boxed{\|\pi \phi - \pi \psi\| \leq \lambda \|\phi - \psi\|} \quad \forall \phi, \psi$$

$$0 < \lambda < 1$$

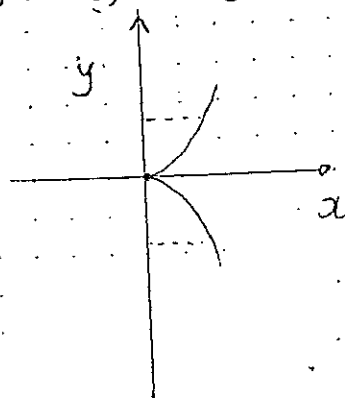
$\Rightarrow$ segue l'asserto. $\square$

★ la differenziabilità di g si dimostra come prima

★★ Commento ... Il lemma del Dini fornisce una condizione sufficiente per l'ispliatività, non necessaria.

$$\text{Sia } f(x, y) = y^2 - x^3 = 0 \quad \Rightarrow$$

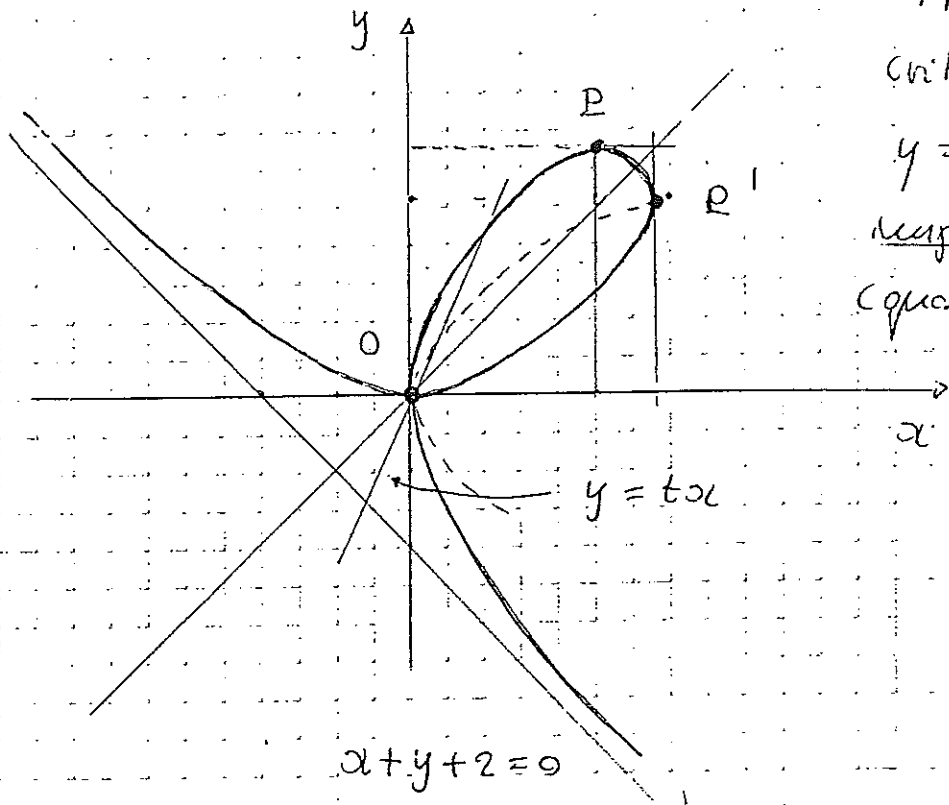
$$x = (y^2)^{\frac{1}{3}}, \quad y \in \mathbb{R}$$



$$\text{ma } f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$$

... Tuttavia $x = (y^2)^{\frac{1}{3}}$ non è $\mathcal{C}^1$...
 (è però $\mathcal{C}^0$.)

◇ Esercizio Sia $f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy =$
(folium di Cartesio)



Trovare i punti
critici delle funzioni
 $y = g(x)$ dei punti
multiplicamente a
(quando è possibile
e prevedere
la natura

$$[\quad x^3 + y^3 - 3a xy = 0$$

$$\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = tx = \frac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$$

$$x + y + a = 0 \quad \text{as. oblig}$$

$$\text{se } t \rightarrow -1 \quad \begin{matrix} x \rightarrow \pm \infty \\ y \rightarrow \mp \infty \end{matrix}$$

$$y = -x + q \quad \text{asintoto } = 0$$

$$tx + x - q = (t+1)x - q = (t+1) \frac{3at}{1+t^3} -$$

$$\text{se } t \rightarrow -1 \quad , \text{ allora } q = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{3at}{1-t+t^2} = -a$$

$$\text{nell'esempio } a = 2$$

Somma

$$f_y(x, y) = 3y^2 - 6x = 0 \quad \text{parabola: } \ell$$
$$y^2 - 2x = 0$$
$$x = \frac{y^2}{2}$$

$f_y \neq 0$ non da ℓ .

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{y^6}{8} + y^3 - 6 \frac{y^2}{2} y = 0$$

$$0 = \frac{y^6}{8} - 2y^3 \Rightarrow y^3(y^3 - 16) = 0$$

$$\Rightarrow y = 0 \quad (3 \text{ volte}) \Rightarrow x = 0 \quad , \Rightarrow \text{origine } 0$$

$$y^3 = 16 \Rightarrow y = 2^{4/3} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \cdot 2^{8/3} = 2^{5/3}$$

$$\Rightarrow P' = (2^{5/3}, 2^{4/3})$$

★ Si può certamente esplicitare y in un intorno

di qualsiasi punto del folium diverso da O e P'

$$\text{Si ha: } 0 = f(x, g(x)) = x^3 + g(x)^3 - 6x g(x) = 0$$

non la determino
esplicitamente!

★ Impongo ora $g'(x) = 0$

Dalla formula precedente ho:

$$0 = 3x^2 + 3g(x)^2 g'(x) - 6g(x) - 6x g'(x)$$

$$\Rightarrow \text{se } g'(x) = 0 \quad \text{ho}$$

$$3x^2 - 6g(x) = 0 \quad \Rightarrow g(x) = \frac{x^2}{2} = y$$

$$\Rightarrow x^3 + \frac{x^6}{8} - 6x \frac{x^2}{2} =$$

$$= -2x^3 + \frac{x^6}{8} = 0 \quad \Rightarrow x^3(x^3 - 16) = 0$$

$$\Rightarrow P = (2^{4/3}, 2^{5/3}) \quad (\text{simmetrico di } P' \text{ a } y=x)$$

Di che tipo di punto si tratta?

No bisogna di $g''(2^{4/3})$

Riprendo

$$3x^2 + 3g(x)^2 g'(x) - 6g(x) - 6x g'(x) =$$

e derivo ancora...

$$6x + 6g(x)g'(x)^2 + 3g(x)^2 g''(x) - 6g' - 6x g''(x) - 6g'(x) = 0$$

Lavoro in $P \dots$

$$6x + 3g(x)^2 g''(x) - 6x g''(x) = 0$$

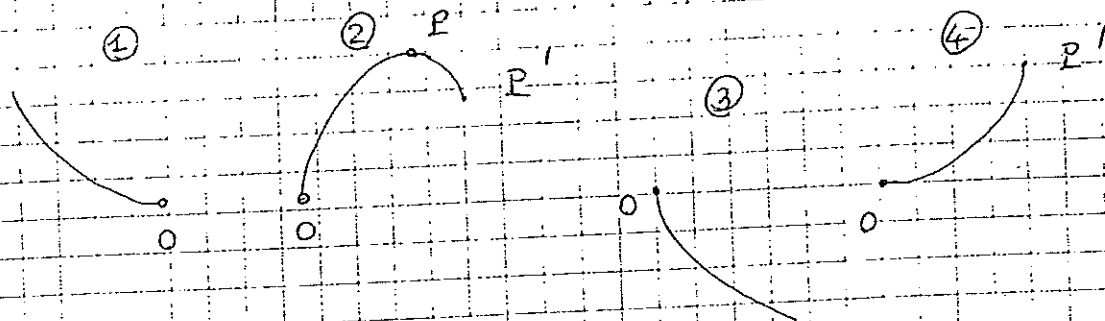
$$2x + [g(x)^2 - 2x] g''(x) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$g''(2^{4/3}) = \frac{-2 \cdot 2^{4/3}}{2^{10/3} - 2 \cdot 2^{4/3}} = \frac{-2^7}{2^{10/3} - 2^{4/3}}$$

$\Rightarrow$ max rel. proprio

Il risultato ottenuto è locale ...
 geometrica ... $y = \phi(x)$ solo quattro funzioni

... Il risultato ottenuto è locale ...



Se studiassi $x = \psi(y)$ sarebbero scambiati i ruoli di P e P' ...



l'origine è un punto (qui l'unico) singolare del folium (singolarità nodale, o nodo, vedi altre non si può esplicitare rispetto ad alcuna delle variabili).

PUNTI SINGOLARI DELLE CURVE PIANE

$C: f(x, y) = 0 \quad (f \in C^2(\mathbb{R}) \dots)$

punti regolari: $\nabla f(P) \neq 0 \quad (f(P) = 0)$

= singolari

$\nabla f(P) = 0$

Dal punto di vista geometrico, si può
 considerare la curva di livello di $z = f(x, y)$
 corrispondente a $c = 0$ in un punto singolare
 $P_0 = (x_0, y_0)$. Sia $P = (x, y) \in C$. Si

$$0 = f(x, y) = f(x_0, y_0) + \underbrace{f_x^0 (x - x_0) + f_y^0 (y - y_0)}_{=0} + f_{xx}^0 (x - x_0)^2 + 2f_{xy}^0 (x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}^0 (y - y_0)^2 + \dots$$

$$0 = f_{xx}^0 (x - x_0)^2 + 2f_{xy}^0 (x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}^0 (y - y_0)^2$$

Sorge spontanea la domanda $Q_H(P_0) \stackrel{?}{=} 0$
 - supponiamo che essa non si risolva localmente.

$$\boxed{f_{xx}^0 (x - x_0)^2 + 2f_{xy}^0 (x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}^0 (y - y_0)^2 = 0}$$

★ Conica degenera: Coppia di rette per P_0

Sia $x - x_0 \neq 0$ si pone $m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$

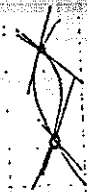
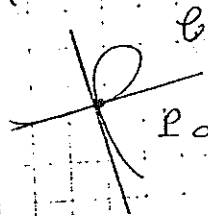
$$\Rightarrow \boxed{f_{yy}^0 m^2 + 2f_{xy}^0 m + f_{xx}^0 = 0}$$

Se $f_{yy}^0 \neq 0$ otteniamo i 3 casi.

(*) "tangenti nel punto singolare"

1. (Due) radici reali e distinte

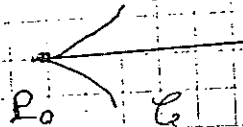
$\Rightarrow P_0$: "nodo"



2. radici reali coincidenti in generale

Si ha una "cuspidale"

$$m_1 = m_2$$



3. radici complesse coniugate

$\Rightarrow P_0$ "punto isolato"



Se $f'_{yy} = 0$ una delle radici diviene infinita ...

una delle tangenti è verticale ...

questo non sorprende ... $\frac{y - y_0}{x - x_0} = m$ descrive

il fascio delle rette passanti per P_0 privato

della retta $x = x_0$

Si può allora avere $\frac{x - x_0}{y - y_0} = m' (= \frac{1}{m})$

★ Osservazioni

$$z = f(x, y) \quad \Sigma$$

$$\nabla f(P_0) = 0$$

* QH def. pos. ($\frac{\max}{\min}$)

* QH indefinita (sella)

* QH semi-definita (?)

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 & \text{e } C \\ \nabla f(P_0) = 0 \end{cases}$$

* P_0 : isolato

* P_0 : "nodo"

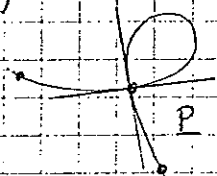
* P_0 può essere cuspidale

★ esame della regolarità per
 $\mathcal{C}$ $f(x, y) = 0$. Si studia

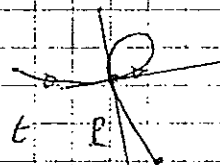
$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ \nabla f(x, y) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

★ Tramite il teor. del Dini, e concett. di regolarità per $\mathcal{C}$ data in forma implicita o tramite un parametro considero...

$$f(x, y) = 0$$



$\mathcal{C}$ non regolare



$\mathcal{C}$ regolare

$$\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}(t_2) \quad t_1 \neq t_2$$

$$Q_H = 0 \Leftrightarrow \text{tangenti} \Leftrightarrow \begin{matrix} \mathbf{r}'(t_1) \\ \mathbf{r}'(t_2) \end{matrix}$$

* il folium $f(x,y) = x^3 + y^3 - 6xy = 0$

i punti critici di $z = f(x,y)$ sono...

$$\begin{cases} f_x = 0 & 3x^2 - 6y = 0 & y = \frac{x^2}{2} \\ f_y = 0 & 3y^2 - 6x = 0 & \\ & (y^2 - 2x) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{x^4}{4} - 2x = 0 \Rightarrow x(x^3 - 8) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \quad x = 2 \Rightarrow$$

$$P_0 = (0,0) \quad P_1 = (2,2) \quad (\text{staccando})$$

$P_0 \in \mathcal{C}$

P_0 è un nodo. Tangenti = assi coordinati.

$$f_{xx} = 6x$$

$$f_{xy} = -6$$

$$f_{yy} = 6y$$

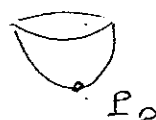
$$\Rightarrow m = 0 \quad (y=0)$$

$$(\dots e \quad x=0 \dots)$$

oppure direttamente da $\boxed{xy=0}$

* $z = x^2 + y^2 \quad ((0,0) \text{ minimo...})$

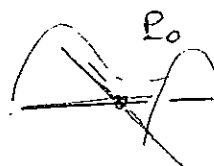
$$x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow (0,0) \text{ punto isolato}$$



* $z = x^2 - y^2$

$$x^2 - y^2 = 0$$

Coppia di rette $\equiv \mathcal{C}$
 $y = x \quad y = -x$



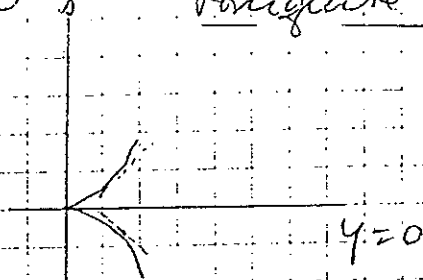
$$* \quad z = y^2 - x^3$$

$$y^2 - x^3 = 0$$

tangente doppia in $(0,0)$

$$\underline{y^2 = 0}$$

cuspide

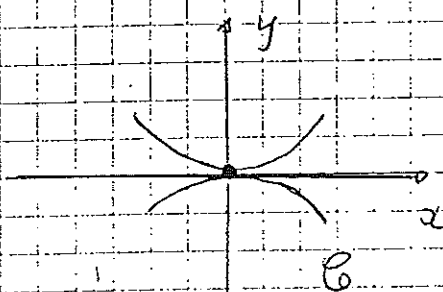


caso più complesso...

[

$$z = y^2 - x^4$$

$$y^2 - x^4 = 0$$



$$z = y^2 + x^4$$

$$\Rightarrow y^2 + x^4 = 0$$

$$\underline{y^2 = 0}$$

$(0,0)$ isolato

$$z = y^2 + y^3$$

$$y^2 + y^3 = 0$$

$$2y + 3y^2 = 0$$

$$y^2(1+y) = 0$$

$$y(2+3y) = 0$$

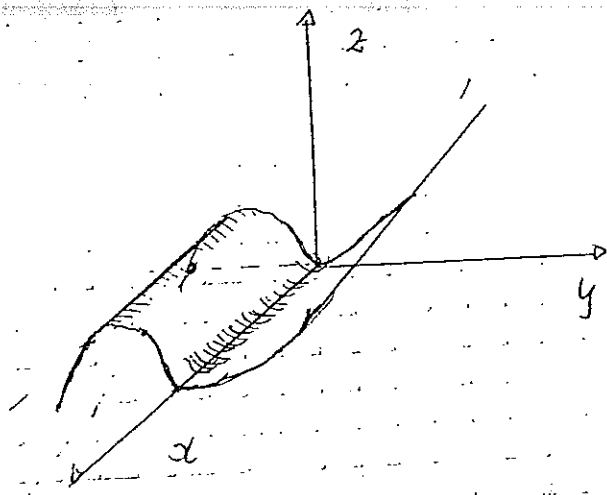
$$y = 0 \quad y = -1$$

doppio

$$\Rightarrow \boxed{y=0}$$

più critica di O: $y = 0$

$$o \quad y = -\frac{2}{3}$$



$$z = y^2 + y^3$$

1

★ Parametrazioni di curve regolari

Sia $\underline{r} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regolare

estendiamo la definizione a $I = [a, b]$.

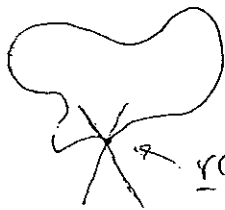
richiedendo 1) $\underline{r} \in C^1([a, b]) \dots$

2) $\underline{r}$ continua con l'unica possibile eccezione
 $\underline{r}(a) = \underline{r}(b)$ (curva chiusa)

3) $\dot{\underline{r}}(t) \neq 0 \quad t \in [a, b]$

(... Posso poi richiedere, nel caso chiuso,

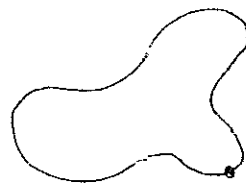
$\dot{\underline{r}}(a) = \dot{\underline{r}}(b)$, cosicché la tangente varia
 ovunque con continuità ...



pto angoloso



o cuspidale



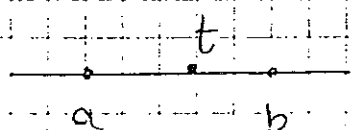
$$\begin{aligned} \underline{r}(a) &= \underline{r}(b) \\ \dot{\underline{r}}(a) &= \dot{\underline{r}}(b) \end{aligned}$$

Cambiamento parametro:

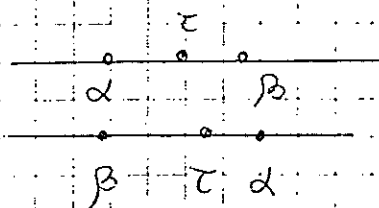
$$\underline{\gamma = \gamma(t) \quad t \in [a, b]}$$

$$\alpha := \gamma(a)$$

$$\beta := \gamma(b)$$



$\xrightarrow{\gamma}$



... o vice

★ Chiediamo

$$\gamma = \gamma(t) \in C^1([a, b]),$$

biunivoca,

$$\gamma' = \frac{d\gamma}{dt} \neq 0 \text{ in}$$

$$\Rightarrow t = t(\gamma) \in C^1([\alpha, \beta] \cup [\beta, \alpha])$$

$$t' = \frac{dt}{d\gamma} \neq 0 \text{ in } [\alpha, \beta] \cup [\beta, \alpha]$$

Tutto questo definisce un cambiamento

regolare di parametro, o una riparametrizzazione regolare della curva

★ se $\frac{d\gamma}{dt} > 0$ ($\Rightarrow \alpha < \beta$), $\Rightarrow \frac{dt}{d\gamma} =$

si dice che t e γ definiscono lo stesso orientamento di γ .

★ se $\frac{d\gamma}{dt} < 0$ ($\Rightarrow \beta < \alpha$) $\Rightarrow \frac{dt}{d\gamma} < 0$

si dice che t e γ definiscono orientamenti opposti su γ .

è una curva considerata a meno di una riparametrizzazione regolare che conserva l'orientamento ...

Osserviamo che tale definizione ha senso perché

★ il concetto di regolarità è invariante per trasformazioni regolari del parametro (riparametrizzazioni regolari).

$$R: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

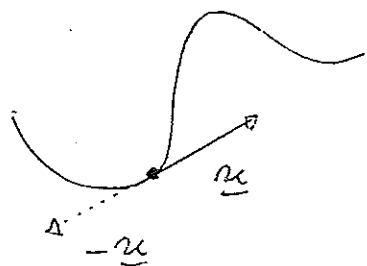
$$\underline{R}(\tau) := \underline{r}(t(\tau))$$

$$\frac{d\underline{R}}{d\tau} = \left(\frac{d\underline{r}}{dt} \right) \left(\frac{dt}{d\tau} \right) \Rightarrow \frac{d\underline{R}}{d\tau} \neq 0$$

$\neq 0 \quad \neq 0$

Es: $t \in [0, 1]$ $\tau: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$
 $\tau = 1 - t$ $\tau(0) = 1, \tau(1) = 0$

t e τ definiscono orientamenti opposti



L'orientamento è precisato dal vettore tangente

$$\underline{u} = \underline{u}(t) = \frac{\underline{\dot{r}}(t)}{\|\underline{\dot{r}}(t)\|}$$

$t \rightarrow \tau = -t$ ma $\underline{u}$ in $-\underline{u}$

Esercizio

$$(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$$

$$a > 0$$

(Lemniscata di Bernoulli)

Passaggio in coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases} \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

$$\rho^4 - a^2(-\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \rho^2 = 0$$

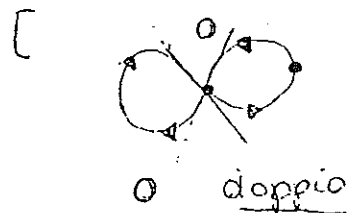
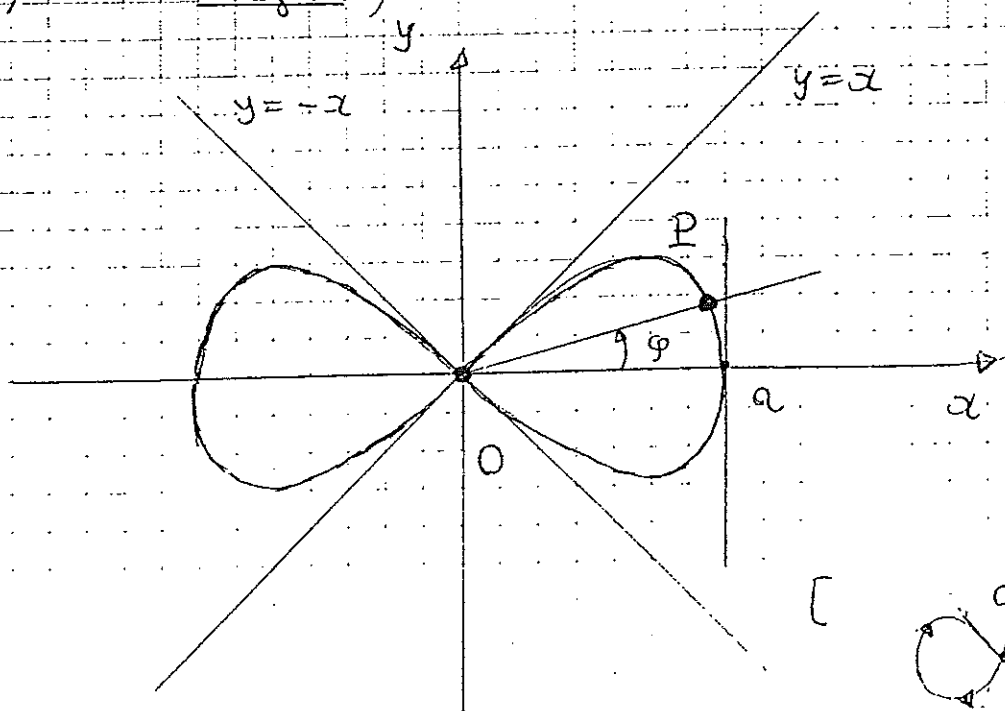
$$\Rightarrow \rho^2 [\rho^2 - a^2 \cos 2\varphi] = 0$$

(per $\rho > 0$)

$$\rho = \rho(\varphi) = a \sqrt{\cos 2\varphi}$$

($\rho = 0$ - origine)

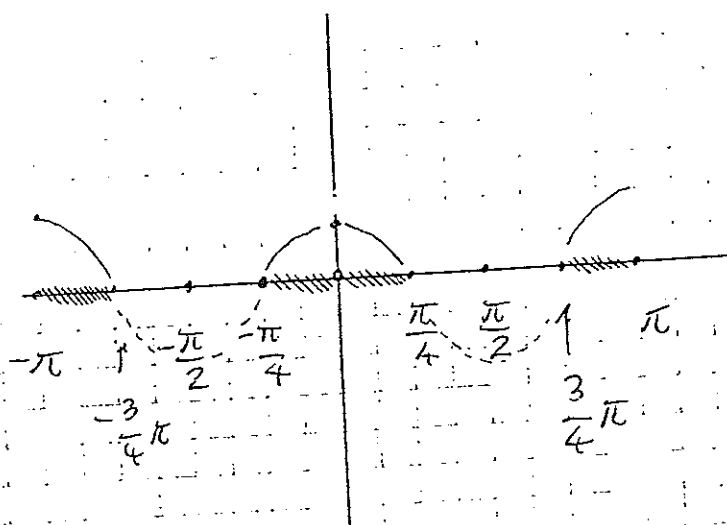
$$\cos 2\varphi > 0$$



Punti singolari

0 è un nodo

$$x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow (x-y)(x+y) = 0$$



$$\varphi \in [-\pi, -\frac{3\pi}{4}] \cup$$

$$[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \cup$$

$$[\frac{3\pi}{4}, \pi]$$

$$\varphi \in [0, \frac{\pi}{4}) \quad \varphi \leftrightarrow P.$$

il coefficiente angolare di OP è

$$\frac{y}{x} = \frac{\rho(\varphi) \sin \varphi}{\rho(\varphi) \cos \varphi} = \tan \varphi \rightarrow 1 \text{ se } \varphi \rightarrow \frac{\pi}{4}$$

Regolarità (per φ in $(0, \frac{\pi}{4})$)

$$\begin{cases} x = \rho(\varphi) \cos \varphi \\ y = \rho(\varphi) \sin \varphi \end{cases}$$

$$t = \frac{d}{d\varphi}$$

$$x' = \rho' \cos \varphi - \rho \sin \varphi$$

$$y' = \rho' \sin \varphi + \rho \cos \varphi$$

$$\|x'\|^2 = x'^2 + y'^2 = \rho^2 + \rho'^2 > 0$$

Verifichiamo che in $(a, 0)$ la tangente è
verticale

$$f_x = 2(x^2 + y^2) \cdot 2x - 2a^2 x$$

$$f_y = 2(x^2 + y^2) \cdot 2y + 2a^2 y$$

$$(x, y) = (a, 0) \Rightarrow$$

$$f_x(a, 0) = \dots 2a^3 > 0$$

$$f_y(a, 0) = 0 \Rightarrow \text{si ma "isplata"}$$

rispetto a x

equatione della tangente:

$$f'_x(x_0 - x_0) + f'_y(y - y_0) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{x = a}$$

oppure:

$$x'(0) = p'(0) = \frac{1}{2\sqrt{\cos 2 \cdot 0}} (-2 \sin 0) = 0$$

$$y'(0) = p(0) = a$$

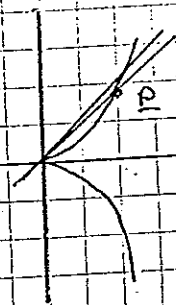
$$\Rightarrow \begin{cases} x = a + x'(0) \varphi = a \\ y = y'(0) \varphi = a \varphi \end{cases} \Rightarrow x = a$$



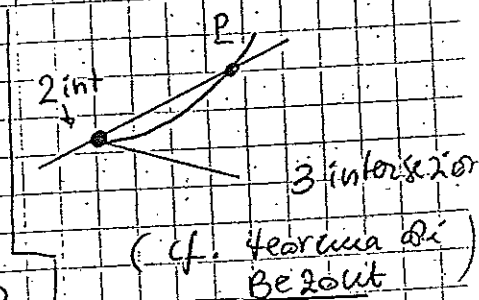
ancora una singolarità di curve piane

$$x^3 - y^2 = 0$$

0 : Cuspide $y^2 = 0$ tg. doppia orizzontale



Sia $y = tx$. S ha



$$x^3 - t^2 x^2 = x^2 (x - t^2) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = 0 \quad x = 0 \text{ (due volte)} \quad x = t^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = t^2 \\ y = tx = t^3 \end{cases} \quad r = r(t)$$

Sia $I \ni 0$, $t \in I$
aperto

$$\dot{x} = 2t \quad \Rightarrow \quad \dot{r} = 0 \quad \text{ssx } t = 0$$

$$\dot{y} = 3t^2$$

osserviamo che $r = r(t)$ e $r \in \mathbb{R}^n$ e r è $r(t)$

$$t_1^2 = t_2^2 \quad t_1^3 = t_2^3 \quad \Rightarrow$$

$$t_2 = \pm t_1 \quad \Rightarrow \quad t_2 = t_1$$

=> ritrovo 0 come pto singolare

★ espressioni il follone .. e la derivata
(attenzione ...)

★ Coniche in coordinate polari
(origine in un fuoco)

$$\rho = \frac{d}{1 + e \cos \varphi} \quad d > 0$$

$e = \text{eccentricità}$
 $e \geq 0$

perché è una conica? ... (calcolo diretto)

e è regolare

Si deve imporre la condizione

$$1 + e \cos \varphi > 0$$

$$e = 0$$

$$\rho = d$$

circonferenza

• $0 \leq e < 1 \quad \varphi \in [0, 2\pi]$

ellisse

• $e = 1$

$$\varphi \neq \pi$$

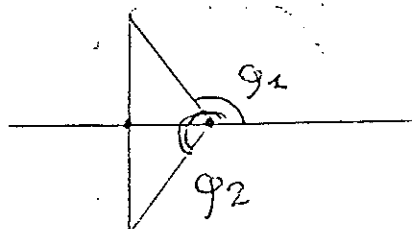
parabola

• $e > 1$

$$\cos \varphi > -\frac{1}{e}$$

iperbole

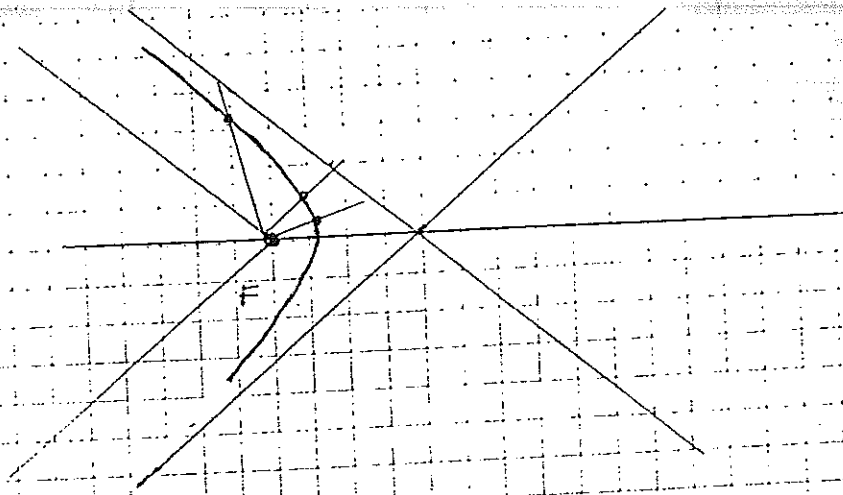
(angolo di



$$0 \leq \varphi < \varphi_1$$

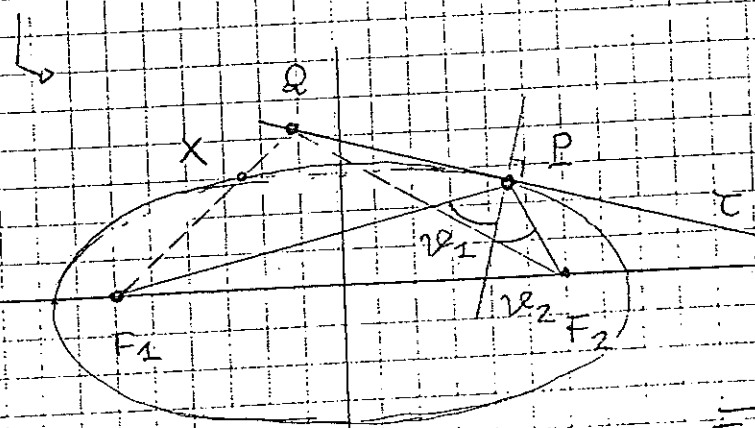
$$\varphi_2 < \varphi \leq 2\pi$$

φ_i : direzioni dei gi asintoti?



esercizio

$$v_1 = v_2$$



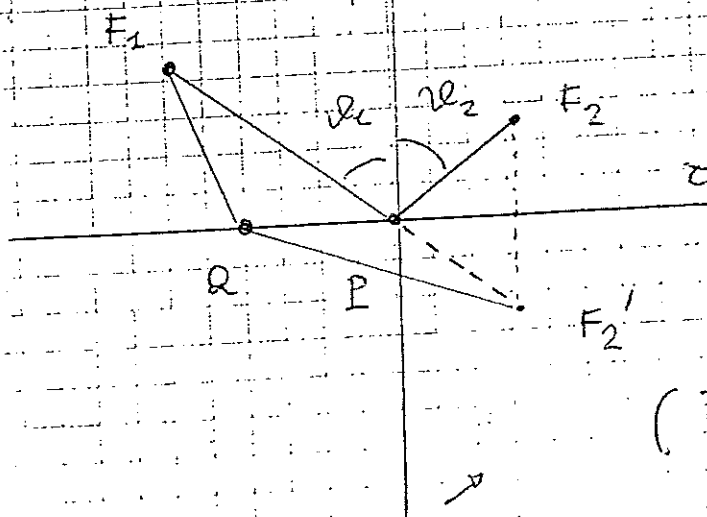
si ha:

$$\overline{F_1 Q} + \overline{F_2 Q} \geq$$

$$\overline{F_1 X} + \overline{F_2 X} =$$

$$\overline{F_1 P} + \overline{F_2 P}$$

$$(\text{per } P =$$



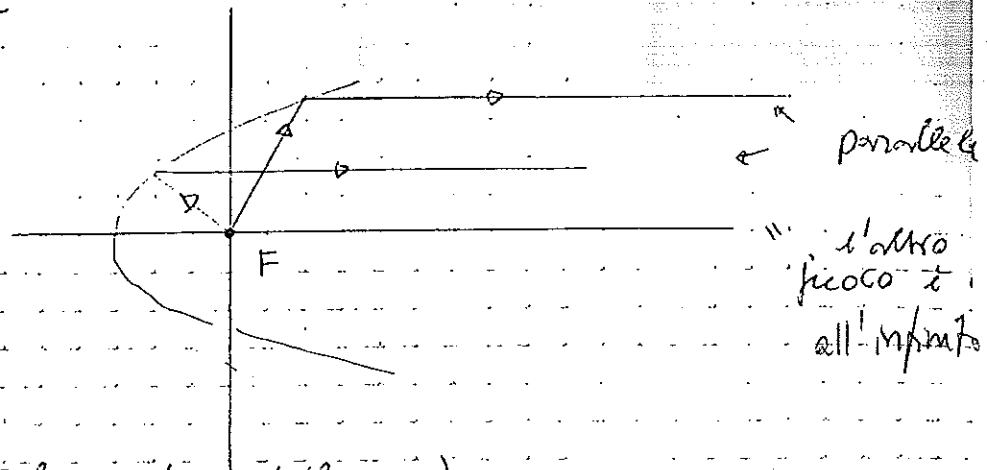
$$\Rightarrow v_1 = v_2$$

$$\begin{aligned} (\overline{F_1 Q} + \overline{F_2 Q} &= \overline{F_1 Q} + \overline{F_2 Q} \\ &\geq \overline{F_1 F_2'} = \overline{F_1 P} + \overline{F_2 P} \end{aligned}$$

Dimostrazione elementare:

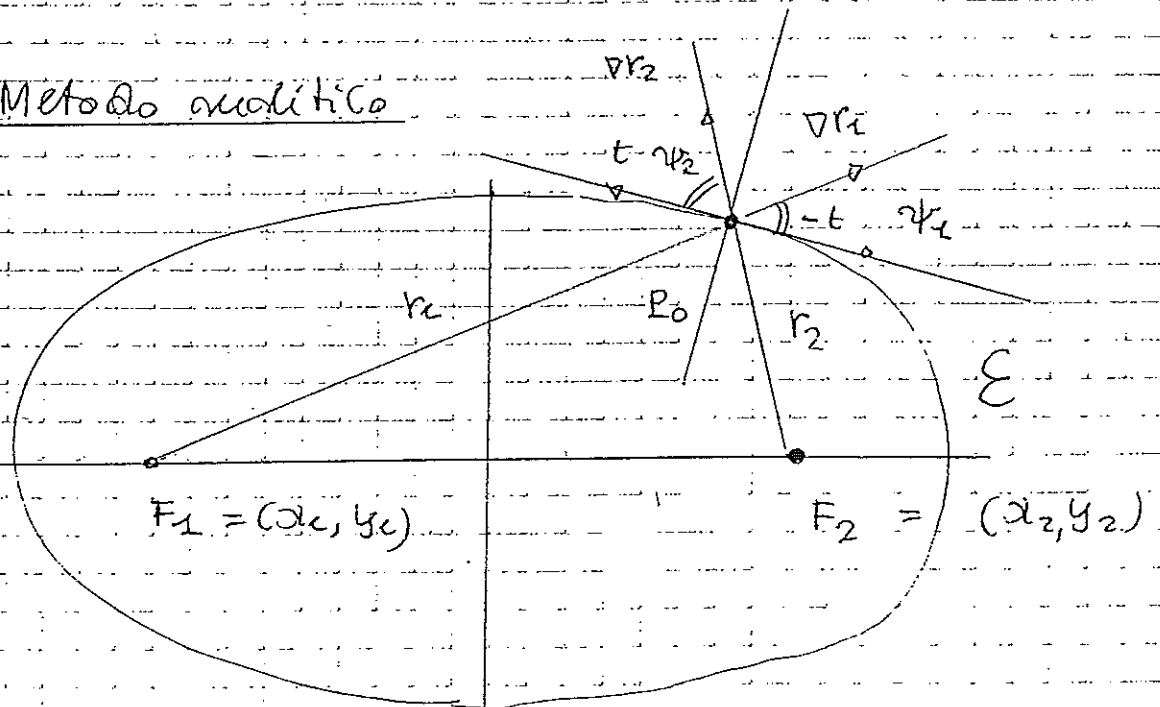
"... legge della riflessione della luce"
(Fermat)

... parabola



(... t. fori delle automobili ...)

Metodo analitico



Vogliamo provare che $\psi_1 = \psi_2$.

$$r_1 = r_1(x, y) = d(P, F_1) = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$$

$$r_2 = r_2(x, y) = d(P, F_2) = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}$$

$$f = r_1 + r_2 = \text{cost} = 2a \quad \text{(lunghezza asse maggiore)}$$

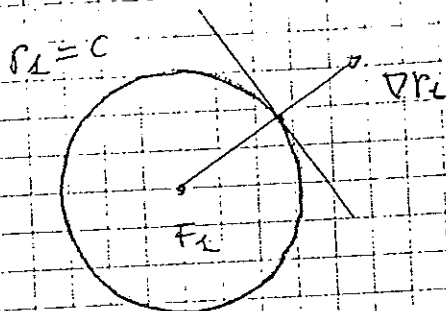
(ellisse = curva di livello $f = 2a$)

$$P_0 = (x_0, y_0) \equiv I_0$$

eq. retta tangente a c.

$$\langle \underline{r} - \underline{r}_0 \mid \nabla f(\underline{r}_0) \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle \underline{r} - \underline{r}_0 \mid \nabla r_1(\underline{r}_0) \rangle = - \langle \underline{r} - \underline{r}_0 \mid \nabla r_2(\underline{r}_0) \rangle$$



∇r_2 sul prolungamento del raggio
 $\Rightarrow 0$

$$\langle -\underline{t} \mid \nabla r_2(\underline{r}_0) \rangle = \langle \underline{t} \mid \nabla r_2(\underline{r}_0) \rangle$$

$$\Rightarrow \|\nabla r_1(\underline{r}_0)\| \cos \psi_1 = \|\nabla r_2(\underline{r}_0)\| \cos \psi_2$$

gli angoli
(ψ_i sono acuti...)

$$\nabla r_1(\underline{r}_0) =$$

$$= \left(\frac{x_0 - x_1}{d(\underline{r}_0, F_c)}, \frac{y_0 - y_1}{d(\underline{r}_0, F_c)} \right)$$

$$\Rightarrow \|\nabla r_1(\underline{r}_0)\| = \|\nabla r_2(\underline{r}_0)\| = 1$$

$$\Rightarrow \cos \psi_2 = \cos \psi_1 \Rightarrow \psi_2 = \psi_1 \quad \square$$