Appunti del corso di GEOMETRIA
prof. M. Spera

Lezione XI

☆ Equazioni di Lagrange e principio di Hamilton (azione stazionaria(*))

(appendice alla Lezione X)

[(*) meno precisamente .. di minima azione)

Sia $q = q(t) \in \mathcal{C}^2([a,b])$

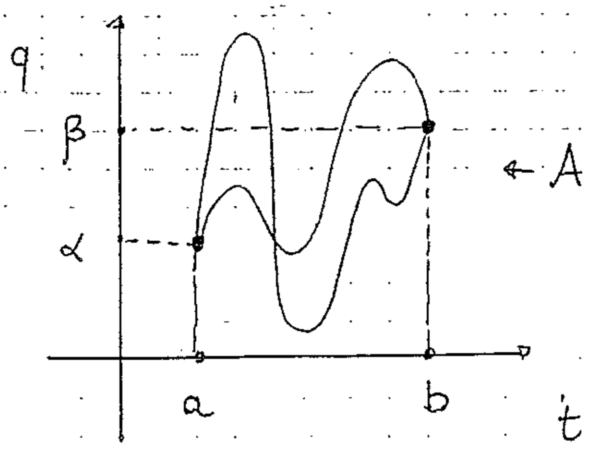
Sia $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $L \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$

L: funzione di Lagrange o Lagrangiana

$$S = S(q) := \int_a^b L(q(t), \dot{q}(t))\, dt$$

azione

Sia $A = \left\{ q_t \in \mathcal{C}^2([a,b]) \;/\; \begin{matrix} q_t(a) = \alpha \\ q_t(b) = \beta \end{matrix} \right\}$ fissati



☆ $S : A \to \mathbb{R}$
$\quad q \mapsto S(q)$

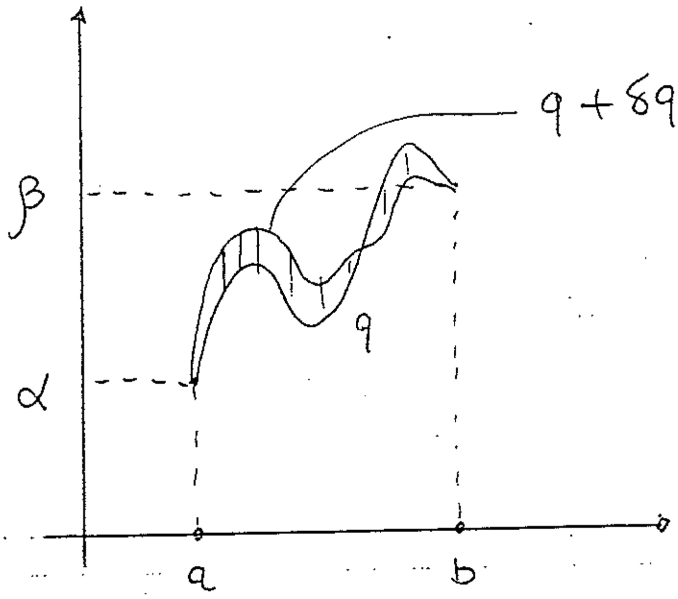
è un "funzionale (funzione che ha come dominio un insieme di funzioni

Consideriamo il "differenziale" o variazione prima di S in $q \in A$

Sia $\delta q \in C^1([a,b])$ tale che

$$\delta q(a) = \delta q(b) = 0$$

Allora $q + \delta q \in A$



Poniamo

$$\delta S := \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial q}\,\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot q}\,\delta \dot q \right) dt$$

viste come variabili indipendenti

$$\delta \dot q = \dot{\overline{\delta q}}$$

$$= \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial q}\,\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot q}\,\dot{\overline{\delta q}} \right) dt =$$

$$= \int_a^b \frac{\partial L}{\partial q}\,\delta q \, dt + \frac{\partial L}{\partial \dot q}\,\delta q \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}\,\delta q \, dt$$

$=$

$$= \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot q} \right) \delta q \, dt \qquad \diamond$$

☆ Principio di Hamilton (di azione stazionaria)
(in modo più impreciso .. di minima azione

Si richiede che la legge del moto $q = q(t)$ sia tale che

☆ $\overline{\delta S = 0}$ (per un'opportuna L (vedi oltre..)

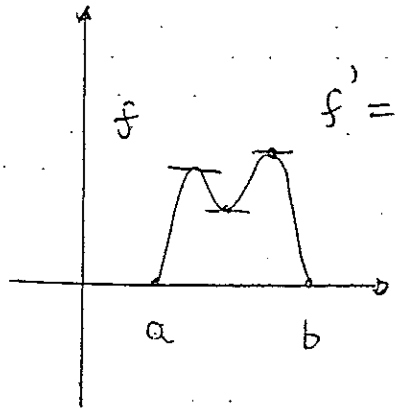
ovvero: $\diamond = 0 \quad \forall \; \delta q$

$\Rightarrow$ (lemma fondamentale del calcolo delle variazioni)

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot q} = 0}$$

Eq. di Eulero-Lagrange

☆ commento: Si ha una profonda analogia con il teorema di Rolle (e Fermat)



$f' = 0$:

$f \dashrightarrow S$

$[a,b] \dashrightarrow A$

$f' = 0$ diventa E. L.

☆ Detto in modo informale,

se "$b-a$ è piccolo" la soluzione fornita da E.L. è un minimo

In generale, si può ottenere la "matrice Hessiana" corrispondente a S.

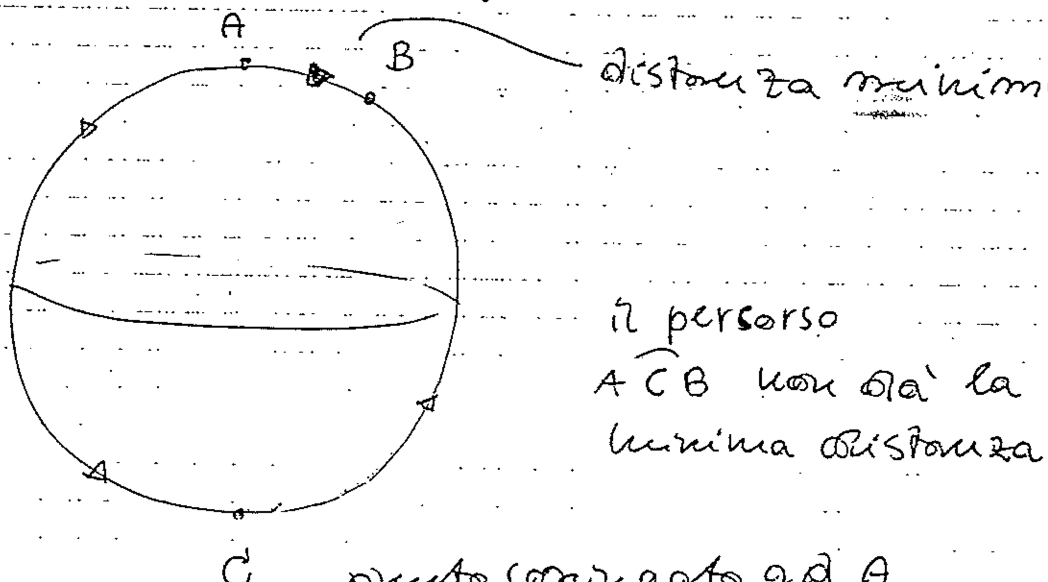
[si giungerebbe al

Teorema di Morse

l'indice della traiettoria critica
(≡ # autovalori negativi dell'Hessiana)

uguaglia il numero dei pti coniugati (al punto iniziale) sulla traiettoria data]
vedi anche oltre

Esempio: il problema geodetico (dispensa 3)



☆ Questo è il calcolo delle variazioni "in grande"

☆ Esempio classico di Lagrangiana

$$L = T - E = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - U(q)$$

energia cinetica — energia potenziale

(particella di massa m in movimento su una retta sotto l'azione di una forza conservativa

$$f = f(q) = -\frac{\partial U}{\partial q}$$

Si ha:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\ddot{q} = f(q) = \frac{\partial L}{\partial q}$$

☆ ovvero, le eq di Lagrange riproducono la legge di Newton

☆ Teoria di Hamilton

$$p := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$ impulso generalizzato

$\left(\dot{q} \leftrightarrow p \quad \text{se} \quad \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} \neq 0 \ldots \right)$

$$H = H(p,q) := p\dot{q} - L$$

Hamiltoniana

(..energia) Si ha successivamente, usando le eq. di Lagrange

$$dH = -dL + dp\,\dot q + p\,d\dot q$$

$$= -\frac{\partial L}{\partial q}dq - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot q}}_{= p} d\dot q + dp\,\dot q + p\,d\dot q =$$

$$= -\frac{\partial L}{\partial q}dq + \dot q\,dp =$$

$$= \dot q\,dp - \dot p\,dq = H_q\,dq + H_p\,dp$$

ovvero:

$$\begin{cases} \dot q = \dfrac{\partial H}{\partial p} \\[2ex] \dot p = -\dfrac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$$

☆ equazioni di Hamilton

sistema hamiltoniano

sistema di eq. diff del 1° ordine

Le soluzioni sono curve $q = q(t)$, $p = p(t)$ nello spazio delle fasi (in generale)

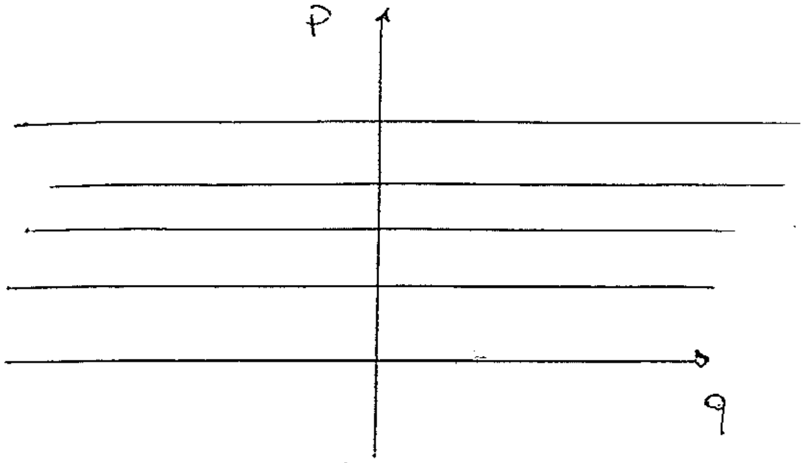
Esempi 1. particella libera

$$H = \frac{p^2}{2m} \qquad p = mv$$

$$\begin{cases} \dot q = \dfrac{p}{m} = v \\ \dot p = 0 \end{cases} \Rightarrow p = \text{costante}$$

(v = costante)

(v è un integrale primo)



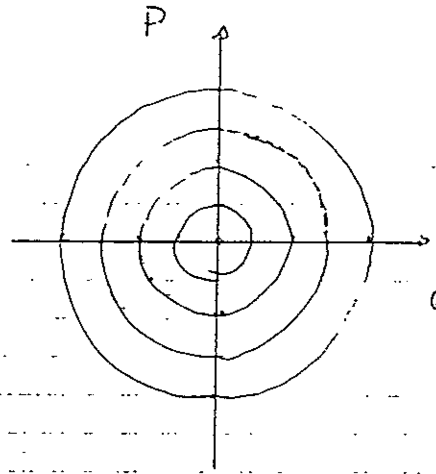
$$q = q_0 + \underset{\substack{\| \\ v}}{\frac{p}{m}} (t - t_0)$$

2. <u>oscillatore armonico</u>

$$H = \frac{1}{2}(q^2 + p^2)$$

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -q \end{cases}$$

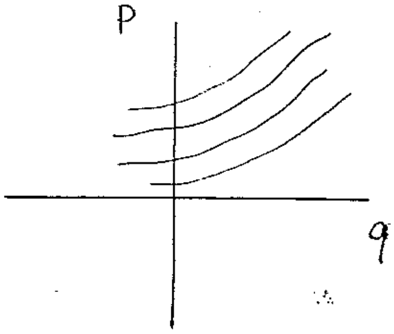
$$\Rightarrow \ddot{q} + q = 0$$



☆ Interpretazione geometrica delle equazioni di Hamilton

H di classe almeno C^2

$$\begin{cases} \dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$$



$\omega := dq \wedge dp$

2-forma d'area $\equiv$ elemento d'area orientata

☆ Teorema (caso particolare del teorema di Liouville)

Il flusso hamiltoniano conserva le aree

(.. ω è invariante per il flusso hamiltoniano)

Dim. $\dot{\omega} = \dot{\widehat{dq \wedge dp}} = d\dot{q} \wedge dp + dq \wedge d\dot{p} =$

$= d\left(\dfrac{\partial H}{\partial p}\right) \wedge dp + dq \wedge d\left(-\dfrac{\partial H}{\partial q}\right) =$

$= \dfrac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} dq \wedge dp - \dfrac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} dq \wedge dp$

$= \ldots = 0$

□

☆ Il teorema di E. Noether

" Ogni simmetria di L dà luogo ad un principio di conservazione

(ovvero .. ad un integrale primo)
= integrale del moto

Esempi

a) L invariante per traslazioni temporali
(ovvero L non dipende esplicitamente da t ... come abbiamo supposto dall' inizio)

.. si conserva l' energia

b) L invariante per traslazioni spaziali

.. si conserva l' impulso totale
(.. quantità di moto totale)

c) L invariante per rotazioni

.. si conserva il momento angolare totale

☆ Dunque : i principi di conservazione hanno un' origine geometrica

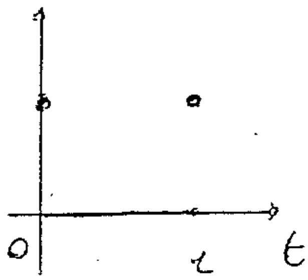
Esempi

1. $[a,b] = [0,1]$

$$\alpha = \beta = 1$$

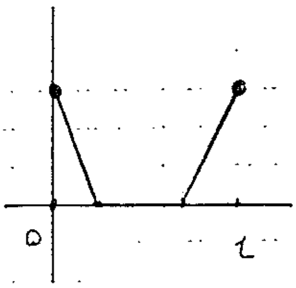
$$L(q,\dot q) = q^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot q} = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial q} = 2q$$



$$\Rightarrow \quad q = 0$$
in $(0,1)$

.. la soluzione è <u>discontinua</u>



2. Se L non dipende da t sussiste la conservazione dell'"energia" $E = L - \dot q L_{\dot q}$.

Infatti $(L = L(q, \dot q))$

$$\frac{d}{dt}\left(L - \dot q L_{\dot q}\right) = L_q \dot q + L_{\dot q}\ddot q - \ddot q L_{\dot q} - \dot q \frac{d}{dt} L_{\dot q} = \underset{(E.L.)}{L_q \dot q - \dot q L_q} = 0$$

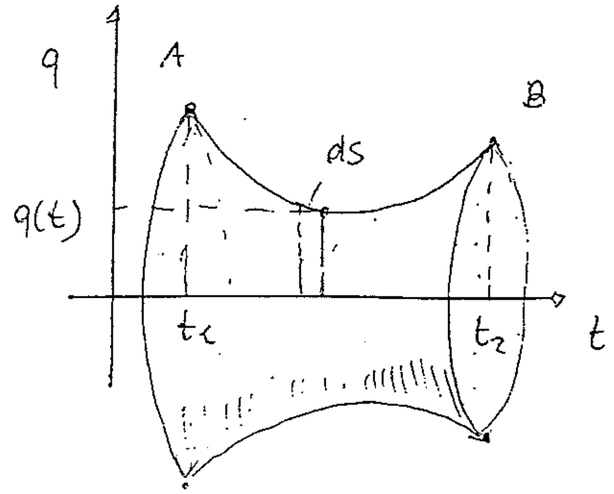
$$\Rightarrow \quad \underline{L - \dot q L_{\dot q} = \text{cost.}}$$

Diamo due applicazioni:

2.1 la catenoide (v. dispensa 3)

sup. di rivoluzione di area minima

e .. la catenaria (en. potenziale minima)



$$S(q) = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} q(t)\sqrt{1+\dot q(t)^2}\, dt$$

(il d'area = $2\pi \cdot q(t) \cdot ds \Rightarrow \dots$)

☆ L'integrale primo è

$$q\sqrt{1+\dot q^2} - \dot q^2 \frac{q}{\sqrt{1+\dot q^2}} = C_1$$

ovvero

$$\dots \quad \frac{q}{\sqrt{1+\dot q^2}} = C_1$$

si pone $\dot q = \mathrm{sh}\, x$

$\Rightarrow q = C_1 \,\mathrm{ch}\, x$

$$dt = \frac{dq}{\dot q} = \frac{C\,\mathrm{sh}\,x\, dx}{\mathrm{sh}\,x} = C_1\, dx$$

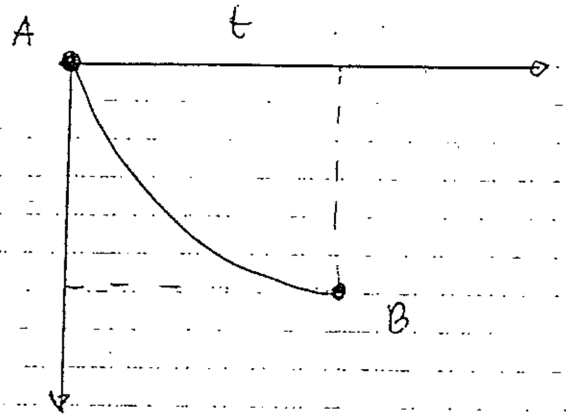
$$\Rightarrow \quad t = c x + D$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} t = c_1 x + D \\ q = q(t) = c \; ch \, . \, x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{q = c_1 \; ch \; \frac{t - D}{c_1}}$$

famiglia di catenarie
(c e D sono scelti in modo che la curva passi per A e B ...)

2.2 La brachistocrona (= cicloide)



$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2gq}$$

$$T(q) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{t_1} \frac{\sqrt{1+\dot{q}^2}}{\sqrt{q}} \, dt \quad \leftarrow \text{qui } t \text{ non è il tempo!!}$$

"tempo"

Integrale primo:

$$\frac{\sqrt{1+\dot q^2}}{\sqrt{q}} - \frac{\dot q^2}{\sqrt{q(1+\dot q^2}} = c_1$$

....

$$q(1+\dot q^2) = c_1 \qquad \overset{>0}{(\text{non è lo stesso } c_1 \ldots)}$$

sia $\dot q = \cot x$

$$q = \frac{c}{1+\cot^2 x} = c_1 \sin^2 x = \frac{c_1}{2}(1-\cos 2x)$$

$$dt = \frac{dq}{\dot q} = 2c_1 \frac{\sin x \cos x \, dx}{\cot x} =$$

$$= 2c_1 \sin^2 x \, dx = c_1 (1-\cos 2x)\, dx$$

$$\Rightarrow t = c_1 \left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right) + D$$

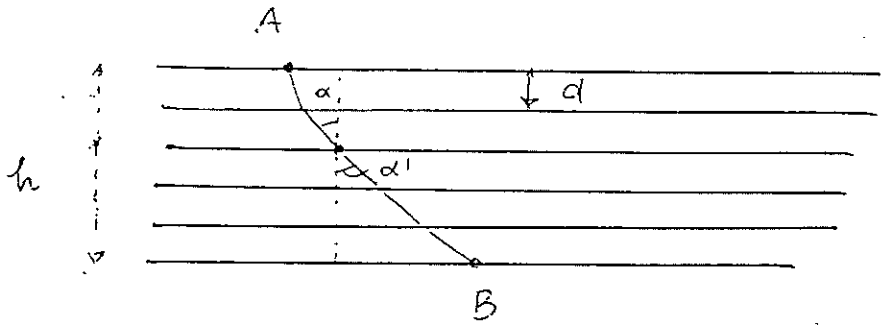
$\Rightarrow$

$$\begin{cases} t - D = \frac{c}{2}(2x - \sin 2x) \\ q = \frac{c}{2}(1-\cos 2x) \end{cases}$$

$2x = \xi$

se $D = 0$:
$$\begin{cases} t = \frac{c}{2}(\xi - \sin \xi) \\ q = \frac{c}{2}(1-\cos \xi) \end{cases}$$

5/V "Soluzione" di <u>Bernoulli</u> del problema della brachistocrona

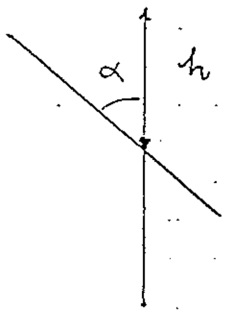


$v = c\sqrt{h} \qquad (c = \sqrt{2g})$

velocità

$v_n = c\sqrt{nd}$

"legge della rifrazione":



$$\frac{\sin\alpha}{\sqrt{nd}} = \frac{\sin\alpha'}{\sqrt{(n+1)d}}$$

al limite per $d \to 0$

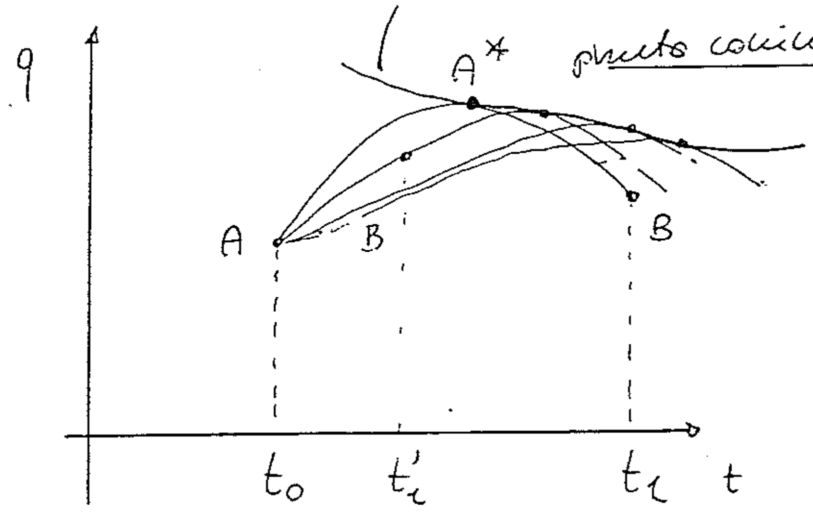
$$\Rightarrow \quad \frac{\sin\alpha}{\sqrt{h}} = \text{costante}$$

... è la <u>cicloide</u>

V. anche Lezione V

Matita (o ventaglio) di Jacobi

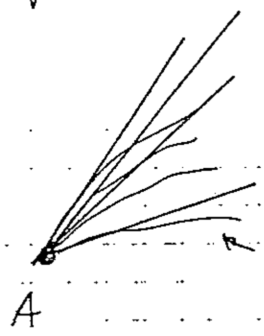
c_1 – discriminante



A^* punto coniugato ad A lungo la traiettoria (sol.) da A a B

$$q = q(t, c_1) \quad = \text{"campo di estremali"}$$

c_1 = coeff. angolare della tangente alla curva in A



c_1 – discriminante

$$\begin{cases} q = q(t, c_1) \\ \dfrac{\partial q(t, c_1)}{\partial c_1} = 0 \end{cases}$$

La natura della traiettoria critica tra A e B è legata al numero dei punti coniugati tra A e B (teorema di Morse)