

Formule di Weingarten

Conviene di esprimere S rispetto alla base $\{\underline{r}_u, \underline{r}_v\}$: S dipenderà dai coefficienti delle due forme fondamentali.

Scriviamo:

$$\underline{N}_u = a_{11} \underline{r}_u + a_{21} \underline{r}_v$$

$$\underline{N}_v = a_{12} \underline{r}_u + a_{22} \underline{r}_v$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Moltiplicando anche i membri scalarmente sia per $\underline{r}_u$ che per $\underline{r}_v$, si ottiene un sistema (non omogeneo) lineare di 4 equazioni in 4 incognite, invocabilmente risolvibile ($\{\underline{r}_u, \underline{r}_v\}$ formano una base!). Si ottiene

$$a_{11} = \frac{fF - eG}{EG - F^2}$$

$$a_{12} = \frac{gF - fG}{EG - F^2}$$

$$a_{21} = \frac{eF - fE}{EG - F^2}$$

$$a_{22} = \frac{fF - gE}{EG - F^2}$$

formule di
Weingarten

in modo più compatto:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = - \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} E & F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix} E & F \\ F & E \end{pmatrix} \right)^{-1}$$

A titolo di controllo, pobiamoci nel caso

$F = 0$ e verifichiamo che, posto

$$e = (\underline{r}_u, \underline{r}_v) \quad e' = \left(\frac{\underline{r}_u}{\sqrt{E}}, \frac{\underline{r}_v}{\sqrt{G}} \right)$$

base ortogonale

la matrice $_{-dX}$

$m_{e'e'} (\$)$ è simmetrica (e calcoliamola!)

compo. di base

$$m_{e'e'} (\$) = m_{e'e} (I) \cdot m_{ee} (\$) = m_{ee'} (I)$$

$$\begin{array}{l} e \\ \underline{r}_u \mapsto \\ \underline{r}_v \mapsto \end{array} \begin{array}{l} e' \\ \frac{\underline{r}_u}{\sqrt{E}} \\ \frac{\underline{r}_v}{\sqrt{G}} \end{array} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{E}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{G}} \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \sqrt{E} & 0 \\ 0 & \sqrt{G} \end{pmatrix}}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{e}{E} & \frac{f}{E} \\ \frac{f}{G} & \frac{g}{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{E}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{G}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{E} & 0 \\ 0 & \sqrt{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{e}{E\sqrt{E}} & \frac{f}{E\sqrt{G}} \\ \frac{f}{\sqrt{E}G} & \frac{g}{G\sqrt{G}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e}{E} & \frac{f}{\sqrt{E}G} \\ \frac{f}{\sqrt{E}G} & \frac{g}{G} \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

— • — • —

Variante:

$$\begin{array}{l} dX: \underline{r}_u \mapsto a_{11} \underline{r}_u + a_{21} \underline{r}_v \\ \underline{r}_v \mapsto a_{12} \underline{r}_u + a_{22} \underline{r}_v \end{array}$$

$$IX - I'$$

$$\frac{r_u}{\sqrt{E}} \mapsto a_{11} \left(\frac{r_u}{\sqrt{E}} \right) + \frac{a_{21} \sqrt{E}}{\sqrt{E}} \left(\frac{r_v}{\sqrt{E}} \right)$$

$$\frac{r_v}{\sqrt{E}} \mapsto \frac{a_{12} \sqrt{E}}{\sqrt{E}} \left(\frac{r_u}{\sqrt{E}} \right) + a_{22} \left(\frac{r_v}{\sqrt{E}} \right)$$

ora $a_{21} = -\frac{f}{E}$ $a_{12} = -\frac{f}{E}$

$$a_{21} \sqrt{\frac{E}{E}} = -\frac{f}{E} \sqrt{\frac{E}{E}} = \left(-\frac{f}{\sqrt{E}E} \right)$$

$$a_{12} \sqrt{\frac{E}{E}} = -\frac{f}{E} \sqrt{\frac{E}{E}} = \left(-\frac{f}{\sqrt{E}E} \right)$$

✓

IX-1''

*** I teoremi di Gauss e di Codazzi - Mainardi

(Egregium)

** Strategia generale

$$u \leftrightarrow 1$$

$$v \leftrightarrow 2$$

Si parte da

$$(\diamond) \begin{cases} r_{uu} = \Gamma_{12}^1 r_u + \Gamma_{12}^2 r_v + e \underline{N} \\ r_{uv} = \Gamma_{12}^1 r_u + \Gamma_{12}^2 r_v + f \underline{N} \\ r_{vv} = \Gamma_{22}^1 r_u + \Gamma_{22}^2 r_v + g \underline{N} \end{cases} = r_{vu}$$

Γ : simboli di Christoffel

♦ i Γ dipendono dalla 1^a f. fond. (metrica) e dalle sue derivate (parziali) prime

$$\Gamma_{12}^a = \Gamma_{21}^a$$

Si ricordi, per il seguito, che:

♦ la matrice di S rispetto a (r_u, r_v) è descritta dalle formule di Weingarten ($S = -dN$)

Si calcolino termini in $(\diamond)$

$$r_{uu}v = r_{uv}u$$

(Scharz)

$$r_{uv}v = r_{vv}u$$

e si egualino le rispettive componenti rispetto a $(r_u, r_v, \underline{N})$

componenti
normali

$$\left\{ \begin{aligned} e v - f u &= e \Gamma_{12}^1 + f (\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g \Gamma_{11}^2 \\ f v - g u &= e \Gamma_{22}^1 + f (\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g \Gamma_{12}^2 \end{aligned} \right.$$

★ Codazzi -

★ Mainardi

Componenti

tangenziale

$$\Rightarrow K = K(E, F, G, E_u, E_v, \dots, E_{uu}, E_{uv}, E_{vv}, \dots)$$

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

$$E_{uu}, E_{uv}, E_{vv}, \dots)$$

Weingarten

formule di Gauss

$\Rightarrow$ Theorema Egregium

$$\text{ex: } EK = \left(\Gamma_{11}^2 \right)_{vv} - \left(\Gamma_{12}^2 \right)_{uu} + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{11}^2$$

Le eq. di Gauss e Codazzi-Mainardi sono nec. e sufficienti per la costruzione di una superficie di I^a e II^a forma fondamentale assegnate (eq. di compatibilit ). Questo   il teorema di Bonnet (o teor. fond. della teoria delle superfici).

Se $F = 0$, si trova

$$K = - \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right) - \left(\Gamma_{12}^2 \right)^2$$

ulteriormente caso particolare importante: $E = 1$, $G = G(u, v)$

$$K = - \frac{1}{2\sqrt{G}} \left(\frac{G_u}{\sqrt{G}} \right)_u = - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{G}} (4.2) (\sqrt{G})_{uu} = - \frac{(\sqrt{G})_{uu}}{\sqrt{G}}$$

$$K = - \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}$$

* (per le coord. geodetiche e le coord. polari (per queste ultime   $G = G(u)$)

* metriche conformemente piatte: $E = G = \lambda(u, v) (> 0)$

$$K = - \frac{1}{2\lambda} \left[\left(\frac{\lambda_v}{\lambda} \right)_v + \left(\frac{\lambda_u}{\lambda} \right)_u \right] = - \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial u^2} \right) = - \frac{1}{2\lambda} \Delta \log \lambda$$

★ La connessione di Levi Civita

Essendo $\underline{e}$, $\{\underline{r}_u, \underline{r}_v, \underline{N}\}$ formano una base di $\mathbb{R}^3$.

Dunque:

$$\diamond \begin{cases} \underline{r}_{uu} = \Gamma_{11}^1 \underline{r}_u + \Gamma_{11}^2 \underline{r}_v + L_1 \underline{N} \\ \underline{r}_{uv} = \Gamma_{12}^1 \underline{r}_u + \Gamma_{12}^2 \underline{r}_v + L_2 \underline{N} \\ \underline{r}_{vu} = \Gamma_{21}^1 \underline{r}_u + \Gamma_{21}^2 \underline{r}_v + L_2' \underline{N} \\ \underline{r}_{vv} = \Gamma_{22}^1 \underline{r}_u + \Gamma_{22}^2 \underline{r}_v + L_3 \underline{N} \end{cases}$$

Si ottiene facilmente $L_1 = e$, $L_2 = L_2' = f$, $L_3 = g$

$$\{ \Gamma_{jk}^i \}_{\substack{i=1,2 \\ j=1,2 \\ k=1,2}}$$

sono detti simboli di Christoffel

Si trova subito, da $\underline{r}_{uv} = \underline{r}_{vu}$,

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2$$

★ I simboli di Christoffel possono ottenersi prendendo i prodotti scalari delle $\diamond$ con $\underline{r}_u$ e $\underline{r}_v \dots$: essi dipendono dai coefficienti della metrica e dalle loro derivate

Per esempio $\langle \underline{r}_u | \underline{r}_{uu} \rangle = \frac{1}{2} E_u \dots$

In generale si ottiene ...

Qualche dettaglio sul calcolo dei simboli di Christoffel

$$\underline{r}_{xx} = \Gamma_{11}^1 \underline{r}_x + \Gamma_{11}^2 \underline{r}_y + e \underline{w} \quad \text{sim:}$$

$$\langle \underline{r}_{xx}, \underline{r}_x \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \langle \underline{r}_x, \underline{r}_x \rangle = \frac{1}{2} E_x \quad \text{e, d'altro canto:}$$

$$\langle \underline{r}_{xx}, \underline{r}_x \rangle = \Gamma_{11}^1 \underbrace{\langle \underline{r}_x, \underline{r}_x \rangle}_E + \Gamma_{11}^2 \underbrace{\langle \underline{r}_y, \underline{r}_x \rangle}_F$$

$$= \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F \quad (*) \quad \boxed{\frac{1}{2} E_x = \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F}$$

calcoliamo ora

$$\begin{aligned} \langle \underline{r}_{xx}, \underline{r}_y \rangle &= \frac{\partial}{\partial x} \underbrace{\langle \underline{r}_x, \underline{r}_y \rangle}_F - \langle \underline{r}_x, \underline{r}_{yx} \rangle \\ &= F_x - \langle \underline{r}_x, \underline{r}_{yx} \rangle = F_x - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \underbrace{\langle \underline{r}_x, \underline{r}_x \rangle}_E \end{aligned}$$

Ma è pure:

$$\langle \underline{r}_{xx}, \underline{r}_y \rangle = \Gamma_{11}^1 \underbrace{\langle \underline{r}_x, \underline{r}_y \rangle}_F + \Gamma_{11}^2 \underbrace{\langle \underline{r}_y, \underline{r}_y \rangle}_G \quad \boxed{= F_x - \frac{1}{2} E_x}$$

$$\Rightarrow \boxed{F_x - \frac{1}{2} E_x = \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G} \quad (**)$$

Le (*) e (**) forniscono un sistema lineare nelle incognite

Γ_{11}^1 e Γ_{11}^2 , univocamente risolvibile ($E G - F^2 > 0$)

ecc. ecc.

In generale

Si pone $g_{im} = \langle \underline{r}_i | \underline{r}_m \rangle$

qui $i=1,2 \quad m=1,2$ etc... ma le formule hanno validità generale per una varietà riemanniana

$$g_{im,k} = \langle \underline{r}_{ik} | \underline{r}_m \rangle + \langle \underline{r}_i | \underline{r}_{mk} \rangle$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_k} g_{im} \right)$$

Si arriva a

$$\langle \underline{r}_{ik} | \underline{r}_m \rangle = \frac{1}{2} (g_{im,k} + g_{mk,i} - g_{ki,m}) \equiv \Gamma_{ikm}$$

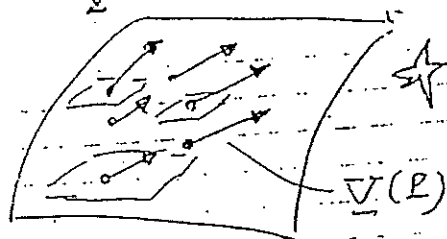
e $\Gamma_{ikm} = g^{lm} \Gamma_{iklm}$ ← si somma su m:
Convoluzione di
Einstein

(g^{em}) : inversa di (g_{ij})

Sia $\underline{V}$ un campo vettoriale $\underline{V} \text{ su } \Sigma : \underline{V} : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ (tangente)

$$\underline{V} = \underline{V}(u,v) \equiv \underline{V}(P) \quad \text{e } T_P \Sigma$$

★ Derivata covariante ("connessione",
 (Levi Civita) (risp. a u)

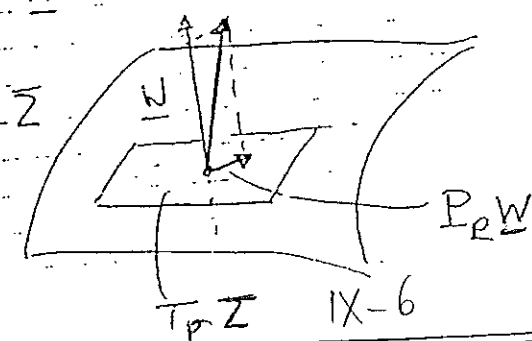


$$(\nabla_u \underline{V})(P) = P_P(\underline{V}_u(P))$$

$$(V_u = \frac{\partial V}{\partial u} \text{ etc.})$$

$$P \underline{W} = \underline{W} - \langle \underline{W} | \underline{N} \rangle \underline{N}$$

proiezione
ortogonale
su $T_P \Sigma$



(soppresso P
 omissso)

" Se ∇ è un campo vettoriale tangente a Σ ,
non è detto che ∇u , ∇v , etc. lo siano:
 ∇ produce un nuovo campo vettoriale tangente
assumendo. $P \rightarrow \Gamma_u(P)$ è un tale campo,
 $P \rightarrow \Gamma_v(P)$ non è tangente a Σ in generale

ma

$$\nabla_u \Gamma_v = P \Gamma_v = \Gamma_{uu}^1 \Gamma_u + \Gamma_{uv}^2 \Gamma_v$$

lo è.

Si ha

$$\nabla_u \Gamma_v = \nabla_v \Gamma_u \quad (\text{"assenza di torsione"})$$

Inoltre:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \langle \Gamma_i | \Gamma_j \rangle = \langle \Gamma_{ik} | \Gamma_j \rangle + \langle \Gamma_i | \Gamma_{jk} \rangle$$

$$= (\text{dato che } \Gamma_j \perp N) =$$

$$\langle \nabla_k \Gamma_i | \Gamma_j \rangle + \langle \Gamma_i | \nabla_k \Gamma_j \rangle$$

("compatibilità con la metrica"
"connessione metrica")

★ Il "Theorema Egregium" di Gauss

"K è invariante per isometrie, ovvero, dipende solo dai coefficienti della metrica e dalle loro derivate (fino al 2° ordine).

Dimostrazione consideriamo

$$[\nabla_u, \nabla_v] \underline{r}_u := \\ := \nabla_u(\nabla_v \underline{r}_u) - \nabla_v(\nabla_u \underline{r}_u)$$

Tale quantità è della forma $\alpha \underline{r}_u + \beta \underline{r}_v$,

dove α e β dipendono dalla metrica e dalle derivate di questa, fino all'ordine 2.

Calcoliamola ora esplicitamente, osservando che la derivata covariante può applicarsi anche a campi vettoriali locali tangenti.

$$\begin{aligned} \nabla_u(\nabla_v \underline{r}_u) &= \nabla_u(\underline{r}_{uv} - \langle \underline{r}_{uv} | \underline{N} \rangle \underline{N}) = \\ &= \nabla_u(\underline{r}_{uv}) - \nabla_u(\langle \underline{r}_{uv} | \underline{N} \rangle \underline{N}) = \\ &= \underline{r}_{uvu} - \langle \underline{N} | \underline{r}_{uvu} \rangle \underline{N} - \underline{P}(\langle \underline{r}_{uv} | \underline{N} \rangle_u \underline{N} + \\ &\quad + \langle \underline{r}_{uv} | \underline{N} \rangle \underline{N}_u) \\ &= \underline{r}_{uvu} - \langle \underline{N} | \underline{r}_{uvu} \rangle \underline{N} - \langle \underline{r}_{uv} | \underline{N} \rangle \underline{N}_u \end{aligned}$$

Da ciò si ottiene facilmente

$$[\nabla_u, \nabla_v] \underline{r}_u = \langle \underline{r}_{uu} | N \rangle \underline{N}_v - \langle \underline{r}_{uv} | N \rangle \underline{N}_u \\ = e \underline{N}_v - f \underline{N}_u.$$

Utilizzando le formule di Weingarten,
si ottiene

$$[\nabla_u, \nabla_v] \underline{r}_u = \underbrace{KF}_{\alpha} \underline{r}_u - \underbrace{KE}_{\beta} \underline{r}_v,$$

Da cui l'asserto $\square$

Nel caso in cui $F = 0$ si ottiene

$$\star \quad K = - \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left[\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{Ev}{\sqrt{EG}} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{Gu}{\sqrt{EG}} \right) \right]$$

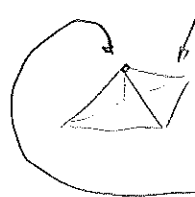
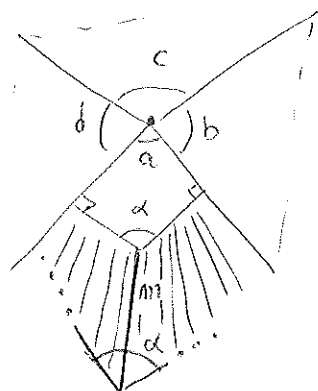
formula
che utilizzeremo in seguito

$\star \star$ Il "Theorema Egregium" sancisce

l'impossibilità di risolvere il "problema
geografico" $\equiv$ la possibilità di rappresentare
fedelmente (ossia isometricamente)
la superficie terrestre su una carta.
($\therefore K_{S^2} = +1 \quad K_{\text{piana}} = 0 \dots$)

44

Discussione euclidea del Theorema Egregium (Hilbert)



appross. poligonale della superficie
la curvatura è
concentrata nel vertice

a, b, c, d

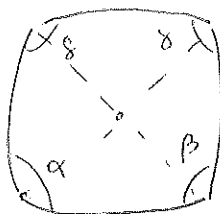
non cambia

per

flessione

(isometrie)

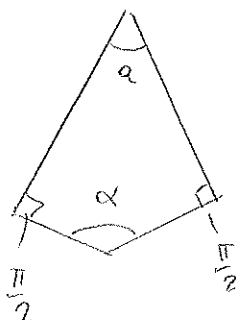
per (*)



$\alpha, \beta, \gamma, \delta$

non cambia

per flessione



(*)

$$\alpha + \alpha = \pi$$

Ma l'area di un triangolo
storico (geodetico) dipende
solo dalla somma degli angoli
(Harnot, Conchieri, Lizard)

$$A = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

v. anche oltre...



$\Rightarrow$ la curvatura gaussiana
è invariante per isometrie

★ trasporto parallelo (Levi-Civita)

Discussione euristica (si può omettere)

$f \in C^\infty(\mathbb{R})$ $\alpha \quad \alpha+h$ trasliamo

$$(T_h f)(\alpha) = f(\alpha+h) = f(\alpha) + f'(\alpha)h + \dots$$

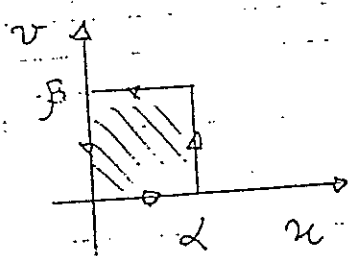
$\Rightarrow \frac{d}{dx} =$ operatore di "traslazione infinitesimale"
 $\equiv$ generatore del gruppo delle traslazioni

$$(T_h f)(\alpha) \approx \left[\left(I + h \frac{d}{dx} \right) f \right](\alpha)$$

piccolo

★ $T_h = \exp\left(h \frac{d}{dx}\right)$

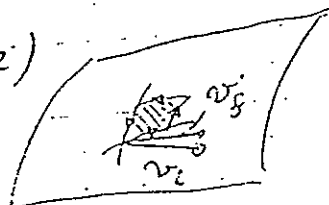
insieme ∇ : traslare con $\nabla \equiv$ trasporto parallelo



$$\begin{aligned} & \left(1 + \alpha \nabla_x + \frac{1}{2} \alpha^2 \nabla_x^2\right) \left(1 + \beta \nabla_v + \frac{1}{2} \beta^2 \nabla_v^2\right) \\ & - \left(1 + \beta \nabla_v + \frac{1}{2} \beta^2 \nabla_v^2\right) \left(1 + \alpha \nabla_x + \frac{1}{2} \alpha^2 \nabla_x^2\right) \end{aligned}$$

$\equiv$ (comutando i termini del 2° ordine)

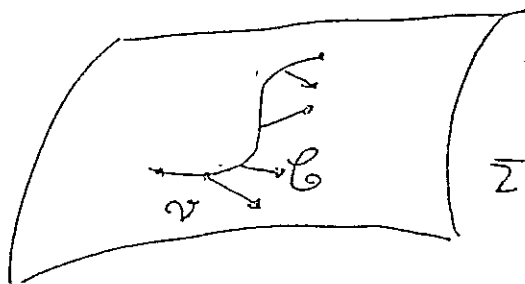
$$I + \alpha \beta [\nabla_x, \nabla_v] + \dots$$



curvatura $\equiv$ misura della non commutatività

delle derivate covarianti = "rotazione infinitesimale"
 di un vettore trasportato su un circuito "infinitesimo"
 chiuso

★ Trasporto parallelo



$$\begin{aligned} \gamma &: I \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\rightarrow \gamma(t) \end{aligned}$$

curva su Σ

$$\begin{aligned} \underline{v} &: I \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\rightarrow \underline{v}(t) \end{aligned}$$

$$, \underline{v}(t) \in T_{\gamma(t)} \Sigma$$

campo vettoriale su γ (di vettori tangenti a Σ)

se

" $\underline{v}$ è parallelo su γ

$$\frac{D}{dt} \underline{v} = 0$$

★

$$\langle \dot{\gamma} | \underline{v} \rangle = \langle \underline{v} | \dot{\gamma} \rangle = 0$$

$$(\underline{r}_\Sigma = \underline{r}_\Sigma(t) \dots \text{etc})$$

$$\text{ovvero } \dot{\gamma} \perp T_{\gamma(t)} \Sigma$$

o.t.

Dato $\underline{v}_0$, si può definire il trasporto parallelo di $\underline{v}_0$ lungo γ tramite

Osservazione

La condizione di parallelismo su γ

suppone che $t \dots$

cioè eq. a risolvere un problema di Cauchy per un sistema di equazioni diff. lineari del 1° ordine

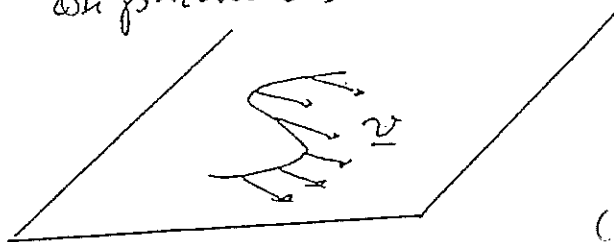
ovvero
 $\exists! \underline{v} = \underline{v}(t)$
 su γ ,
 $\underline{v} \in T\Sigma$,
 $\underline{v}$ parallelo
 su γ ,
 con
 $\underline{v}(0) = \underline{v}_0$

★

Il trasporto parallelo conserva i prodotti scalari (e quindi le lunghezze e gli angoli...)
 ovvero: siano dati $\underline{v}$ e $\underline{w}$ paralleli: allora

$$\frac{d}{dt} \langle \underline{v} | \underline{w} \rangle = \underbrace{\langle \dot{\underline{v}} | \underline{w} \rangle}_{\perp T\Sigma} + \underbrace{\langle \underline{v} | \dot{\underline{w}} \rangle}_{\perp T\Sigma} = 0$$

★ Nel piano viene riprodotta l'usuale condizione di parallelismo:



$$\langle \underline{\hat{v}} | \frac{\underline{r}_x}{\underline{r}_y} \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\hat{v}} = 0 = \underline{v} = \text{costante}$$

(attenzione...)

Sia ora $\|\underline{v}\| \equiv 1$

$$F = \langle \underline{r}_x | \underline{r}_y \rangle = 0$$

$$\underline{v} = v_1 \underline{r}_x + v_2 \underline{r}_y =$$

$$= \cos \omega \frac{\underline{r}_x}{\sqrt{E}} + \sin \omega \frac{\underline{r}_y}{\sqrt{E}}$$

questo porta i più

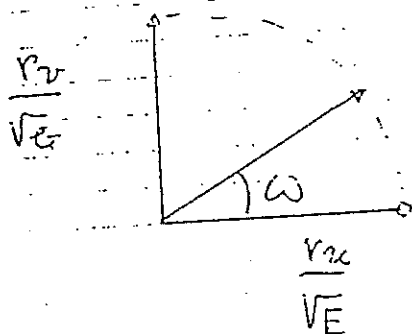
$$\langle \underline{v}, \underline{N} \rangle \neq 0 \Rightarrow$$

$$\langle \underline{\hat{v}}, \underline{N} \rangle + \langle \underline{v}, \underline{\hat{N}} \rangle = 0$$

$$\begin{matrix} \parallel \\ 0 \end{matrix} \begin{matrix} p_{\theta} r_{\theta} \\ N \equiv 0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\hat{v}} \perp \underline{N}$$

$$\Rightarrow \underline{\hat{v}} = 0$$



Si calcoli $\underline{\hat{v}}$ e si imponga la condizione di parallelismo (*); risulta

$$\sin \omega \left(-\dot{\omega} \sqrt{E} + \frac{1}{\sqrt{E}} \langle \underline{r}_x | \underline{\hat{r}}_y \rangle \right) = 0$$

$$\cos \omega \left(\dot{\omega} \sqrt{E} + \frac{1}{\sqrt{E}} \langle \underline{\hat{r}}_x | \underline{r}_y \rangle \right) = 0$$

$\Rightarrow$ (ricordando che $F=0$...)

$$\dot{\omega} = \frac{1}{\sqrt{E}} \langle \underline{r}_x | \underline{\hat{r}}_y \rangle =$$

$$\langle \underline{r}_x, \underline{r}_{xy} \dot{\omega} + \underline{r}_{yy} \dot{\omega} \rangle =$$

$$= \langle \underline{r}_x, \underline{r}_{xy} \rangle \dot{\omega} + \langle \underline{r}_x, \underline{r}_{yy} \rangle \dot{\omega}$$

$$\frac{1}{2} E_r \dot{\omega} \left[\frac{F_r - \langle \underline{r}_{xy}, \underline{r}_y \rangle}{\sqrt{E}} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{E}} \cdot \frac{1}{2} \cdot (E_r \dot{\omega} - E_{rx} \dot{\omega})$$

$$- \frac{1}{2} E_{rx} \dot{\omega}$$

(*) Delta gli

$$\underline{v} = \cos \omega \left(\frac{\underline{r}_u}{\sqrt{E}} \right) + \sin \omega \left(\frac{\underline{r}_v}{\sqrt{E}} \right)$$

← sono vettori



importante, per
simplificare il calcolo

$$\dot{\underline{v}} = -\sin \omega \cdot \dot{\omega} \frac{\underline{r}_u}{\sqrt{E}} + \cos \omega \left(\frac{\dot{\underline{r}}_u}{\sqrt{E}} \right) \quad \leftarrow \quad \underline{r} \perp \frac{\underline{r}_u}{\sqrt{E}} \Rightarrow \perp \underline{r}_u$$

$$+ \cos \omega \dot{\omega} \frac{\underline{r}_v}{\sqrt{E}} + \sin \omega \left(\frac{\dot{\underline{r}}_v}{\sqrt{E}} \right) \quad \leftarrow \quad \underline{r} \perp \frac{\underline{r}_v}{\sqrt{E}} \Rightarrow \perp \underline{r}_v$$

imponiamo la condizione di parallelismo

$$(1) \quad \langle \dot{\underline{v}}, \underline{r}_u \rangle = 0$$

$$(2) \quad \langle \dot{\underline{v}}, \underline{r}_v \rangle = 0$$

si ricordi che
si è supposto
 $F = \langle \underline{r}_u, \underline{r}_v \rangle = 0$

$$(1) \quad -\sin \omega \dot{\omega} \sqrt{E} + \sin \omega \frac{\langle \dot{\underline{r}}_v, \underline{r}_u \rangle}{\sqrt{E}} = 0$$

$$\sin \omega \left[-\dot{\omega} \sqrt{E} + \frac{1}{\sqrt{E}} \langle \underline{r}_u, \dot{\underline{r}}_v \rangle \right] = 0$$

e.c.

(2) è analoga!

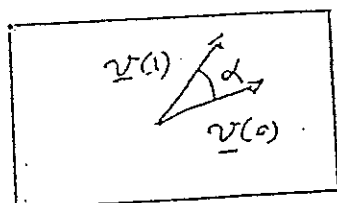
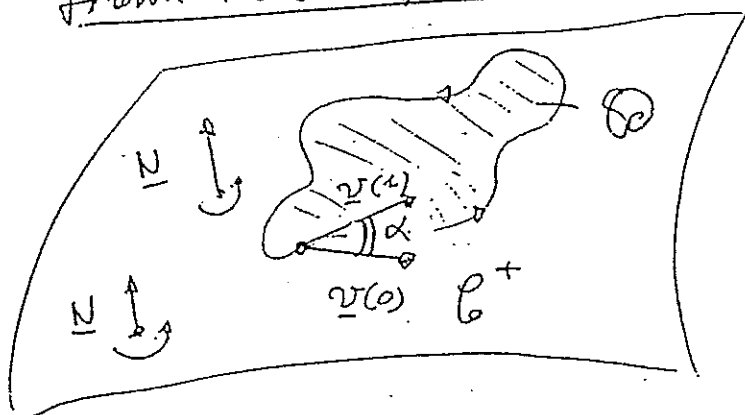
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\underline{r}_v}{\sqrt{E}} \right) = \frac{\dot{\underline{r}}_v \sqrt{E} - \underline{r}_v \frac{1}{2\sqrt{E}} \dot{E}}{E}$$

$$= \frac{\dot{\underline{r}}_v}{\sqrt{E}} - \underline{r}_v \frac{\dot{E}}{2E^{3/2}}$$

$$\left\langle \frac{d}{dt} \left(\frac{\underline{r}_v}{\sqrt{E}} \right), \underline{r}_u \right\rangle = \frac{\langle \dot{\underline{r}}_v, \underline{r}_u \rangle}{\sqrt{E}}$$

★ Formula di Levi-Civita

Sia ora $\mathcal{C}$ chiusa (orientata) in senso naturale ($I = [a, b]$)
frontiera (completa) di $\mathcal{D}$



$$\alpha = \int_0^1 \dot{\omega} dt = \int_{\mathcal{C}^+} d\omega = -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{C}^+} \left(-\frac{E_v}{\sqrt{EG}} dx + \frac{G_u}{\sqrt{EG}} dv \right)$$

(Green)

$$= -\frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}} \left[\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right] dx dv =$$

$$= \iint_{\mathcal{D}} K \sqrt{EG} dx dv = \iint_{\mathcal{D}} K d\sigma$$

$$\boxed{\alpha = \iint_{\mathcal{D}} K d\sigma}$$

formula di
Levi-Civita

(cf. la discussione essenziale sul trasporto parallelo...
... si "rappresenta" la formula di Levi-Civita ...)

Ritorniamo al teorema di Green

$$\int_{\mathcal{C}} P dx + Q dy = \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$



★ Ancora sul trasporto parallelo

Sia $\underline{v}(t) = v^1(t) \underline{r}_x + v^2(t) \underline{r}_y$ ($\underline{r}_x = \underline{r}_x(t)$ etc.)

da $\langle \underline{\dot{v}} | \underline{r}_x \rangle = 0$

si ha) osservato che $\underline{\dot{v}} = \dot{v}^1 \underline{r}_x + \dot{v}^2 \underline{r}_y + v^1 \dot{\underline{r}}_x + v^2 \dot{\underline{r}}_y$

$$\dot{v}^i g_{ij} + v^i \alpha_{ij} = 0 \quad \begin{matrix} i=1,2 \\ j=1,2 \end{matrix}$$

$$\langle \dot{\underline{r}}_i | \underline{r}_j \rangle$$

(convenzione di Einstein)

ora, $\dot{\underline{r}}_i = \underline{r}_{ij} \dot{x}^j$ ($u = x^1$
 $v = x^2$)

e $\langle \underline{r}_{ij} | \underline{r}_k \rangle = \dots \Gamma_{ij}^l g_{lk}$

$$\dot{v}^n = \dot{x}^i v^j \Gamma_{ij}^n = 0 \quad n=1,2$$

$$\dot{v}^l g_{lk} + v^i \dot{x}^j \Gamma_{ij}^l g_{lk} = 0 \quad k=1,2$$

eq. trasporto parallelo

1 - Sistema di eq. diff. lineari omogenee del 1° ordine

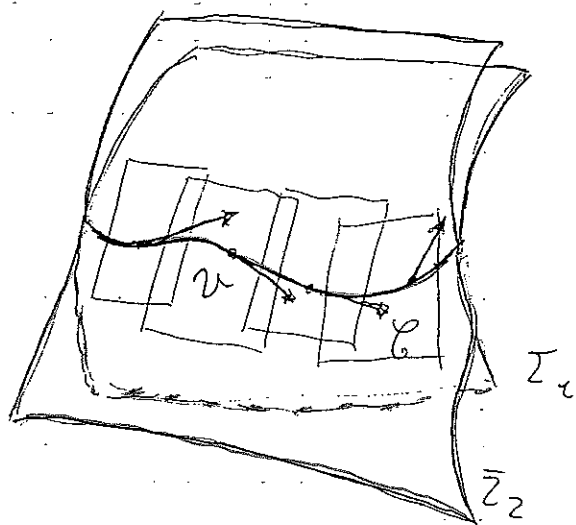
2 - ... vale il teorema di Cauchy...

(applicandolo per (g^{ij}) ...

v. anche altre, pag. XI-21

★ Ancora sul trasporto parallelo:

★★ interpretazione geometrica (è l'idea originale di
Levi-Civita ★★★)



Siano Σ_1 , Σ_2 tangenti lungo C

★ Il trasporto parallelo lungo C è allora
il medesimo su le due superficie.
v. anche poco oltre

Applicazione: trasporto parallelo sulla sfera →



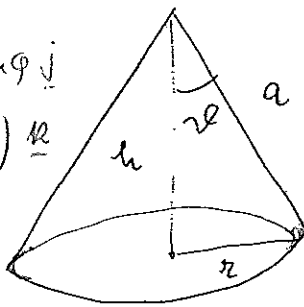
Trasporto parallelo sulla Sfera

$$h = r \cotan \vartheta$$

Area laterale di una
porzione di cono

$$\underline{r} = \underline{r}(\varphi) =$$

$$r \cos \varphi \underline{i} + r \sin \varphi \underline{j} + h \left(1 - \frac{r}{R}\right) \underline{k}$$



$$dA = \Delta \varphi \cdot \alpha \cdot ds =$$

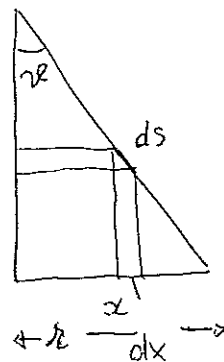
$$\underline{r}_\varphi = \cos \varphi \underline{i} + \sin \varphi \underline{j} - \frac{h}{r} \underline{k}$$

$$\underline{r}_\varphi = -r \sin \varphi \underline{i} + r \cos \varphi \underline{j}$$

$$E = 1 + \cotan^2 \vartheta$$

$$E = r^2$$

$$\sqrt{EG} = \sqrt{1 + \cotan^2 \vartheta} \cdot r \Rightarrow \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{EG} \, d\varphi \, d\varphi =$$

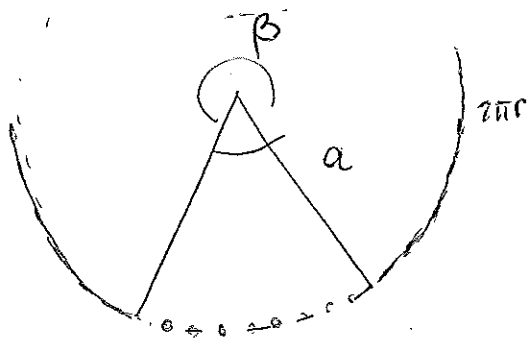


$$= \frac{\Delta \varphi}{\sin \vartheta} \alpha \, d\alpha$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} a^2 \beta &= 2\pi r \frac{a}{2} \\ a\beta &= 2\pi r \\ \beta &= 2\pi \frac{r}{a} = 2\pi \sin \vartheta \end{aligned}$$

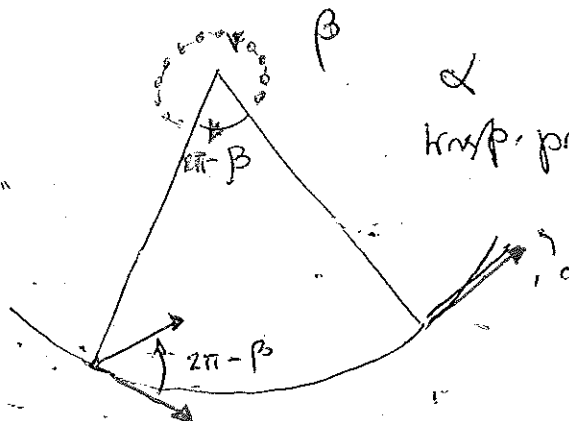
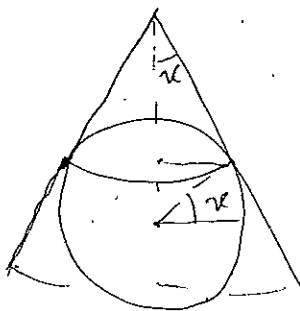
$$\Rightarrow A = \Delta \varphi \cdot \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{r^2}{2} = \frac{1}{2} a^2 \beta$$

$$= \frac{1}{2} \frac{r^2}{(\sin \vartheta)^2} \beta$$



$$\Rightarrow \boxed{\beta = \sin \vartheta \cdot \Delta \varphi}$$

Sia $\Delta \varphi = 2\pi \Rightarrow \beta = 2\pi \sin \vartheta$



$$\alpha = 2\pi - \beta$$

$$km/p.p.m. = 2\pi (1 - \sin \vartheta)$$

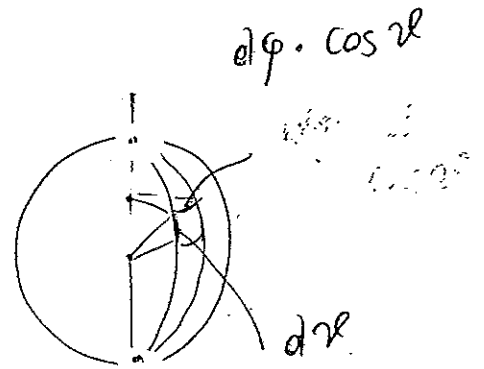
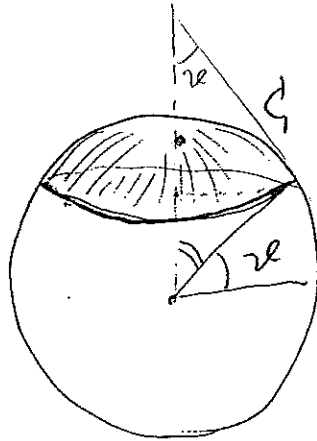
$$r \rightarrow 0$$

$$2\pi - \beta \rightarrow 2\pi \quad \beta \rightarrow 0$$

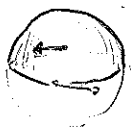


Ma

area calotta: ζ



$$C = 2\pi \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = 2\pi (1 - \sin \theta) = 2\pi - \beta$$

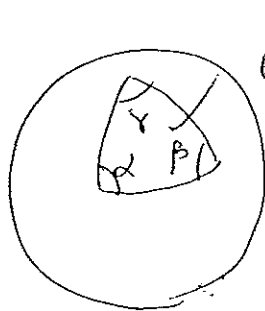


Caso particolare: $\beta = 0 \Rightarrow \alpha = 2\pi$
 = area semisfera

In accordo con la formula generale di
 Lavi - Arista

* Dare una dim. diretta, per la sfera,

$$\text{di } \alpha + \beta + \gamma - \pi = A \quad (\text{area})$$



A

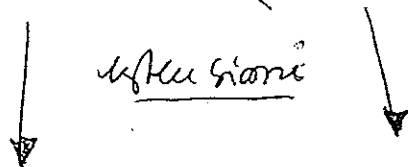
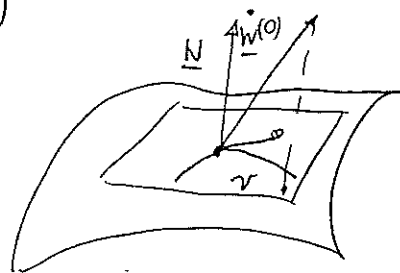
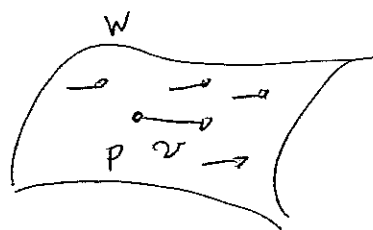
Cavalieri	1638
Girard	1625
Harriot	1603

Approfondimenti

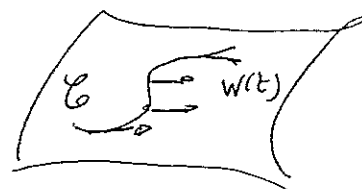
① Derivata covariante (su Σ)

①

$$(\nabla_v W)(P) \quad W \in \mathcal{X}(\Sigma)$$



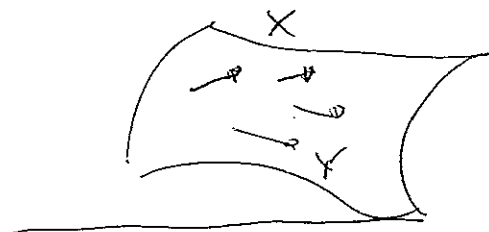
③



②

$$\nabla_X Y$$

$$X, Y \in \mathcal{X}(\Sigma)$$



$$\nabla_{\frac{d}{dt}} W$$

W def.

su $\mathcal{C}$:

$$\alpha = \alpha(t)$$



④

Sia



$$\mathcal{C}: \underline{p} = \underline{r}(t)$$

$\mathcal{C}$

$$\dot{\underline{r}}(0) = \underline{v}$$

$$\underline{W}(\kappa, \nu) := W^i \underline{r}_i$$

$$\underline{r}_i \equiv \frac{\partial \underline{r}}{\partial \kappa_i} \equiv \underline{r}_{\underline{e}_i}$$

$$\underline{\text{campo vettoriale}} \equiv W^i(\kappa, \nu) \underline{r}_i(\kappa, \nu)$$

(convenzione di Einstein)

raffigurando a $\mathcal{C}$: affinamento $\underline{W}(t) \equiv$

$$W^i(\kappa(t), \nu(t)) \underline{r}_i(\kappa(t), \nu(t))$$

Cominciamo $\dot{\underline{w}}(0) = \left. \frac{d\underline{w}}{dt} \right|_{t=0}$

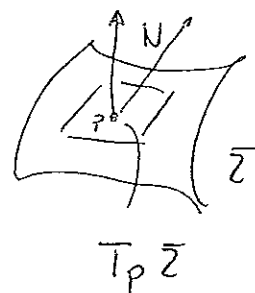
È un vettore in $\mathbb{R}^3$, non necessariamente tangente a $\bar{\Sigma}$. la proiezione $\mathbb{P}_p \dot{\underline{w}}(0)$

invece $\in T_p \bar{\Sigma}$. Per definizione

* Derivata covariante di $\underline{w}$ rispetto a $\underline{v}$ in P

$$\left[(\nabla_{\underline{v}} \underline{w})(P) = \mathbb{P}_p \dot{\underline{w}}(0) = \right.$$

$$\left. = \dot{\underline{w}}(0) - \langle \dot{\underline{w}}(0), \underline{N}_p \rangle \underline{N}_p \right]$$



Il calcolo mostra che non
non dipende da $\mathcal{B}$ tale che $\dot{\underline{r}}(0) = \underline{v}$
Pertanto è ben definita.

$$\begin{aligned} \dot{\underline{w}} &= \dot{w}^i \underline{r}_i + w^i \dot{\underline{r}}_i = \text{Christoffel} \\ &= \dot{w}^i \underline{r}_i + w^i \underline{r}_{ij} \dot{u}^j \\ &= \dot{w}^i \underline{r}_i + w^i \dot{u}^j \Gamma_{ij}^k \underline{r}_k + \beta \underline{N} \\ &= \dot{w}^k \underline{r}_k + w^i \dot{u}^j \Gamma_{ij}^k \underline{r}_k + (\dots) \\ &= \left[\dot{w}^k + w^i \dot{u}^j \Gamma_{ij}^k \right] \underline{r}_k + (\dots) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P_P \dot{\underline{w}}(0) = \left[\dot{w}^k + w^i \dot{u}^j \Gamma_{ij}^k \right] \underline{r}_k \Rightarrow \underline{w} \text{ è parallelo lungo } \mathcal{C} \Leftrightarrow$$

si può proseguire: da $\dot{w}^k = w_{,j}^k \dot{u}^j$

$$\boxed{\dot{w}^k + w^i \dot{u}^j \Gamma_{ij}^k = 0} \quad k=1,2$$

si trova

*** sist. eq. diff. lineare del prim'ordine,
 - invariante sotto scelta di una volta rispetto ad un vettore iniziale

in definitiva

(★★)

$$\underline{v} = \dot{\underline{y}}(0) \quad \underline{r}_k \dot{u}^i(0)$$

$$\begin{aligned} \dot{\underline{w}} &= \left[w_{,j}^k \dot{u}^j + w^i \dot{u}^j \Gamma_{ij}^k \right] \underline{r}_k + () \\ &= \left\{ (w_{,j}^k + w^i \Gamma_{ij}^k) \dot{u}^j \right\} \underline{r}_k + () \end{aligned}$$

Dunque

$$(★★) \quad (\nabla_{\underline{v}} w)(P) = \left\{ (w_{,j}^k(P) + w^i(P) \Gamma_{ij}^k(P)) \dot{u}^j(P) \right\} \underline{r}_k(P)$$

(tutte gli usi di notazione)

(★★) ci mostra subito che le affermazioni (2) e (3) hanno senso

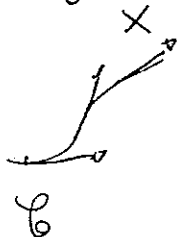
$$\text{notiamo: } (\nabla_{\underline{x}} Y)(P) = (\nabla_{\underline{x}_P} Y)(P) \quad (2)$$

e, rifacendo a (3), che la formula dipende solo dai valori di $\underline{w}$ su $\mathcal{C}$

★ Come funziona importante:

$$\nabla_X Y \Big|_{\mathcal{C}} \quad \text{dipende solo da } X|_{\mathcal{C}} \text{ e } Y|_{\mathcal{C}}$$

$$\left(X|_{\mathcal{C}} \text{ tangente a } \mathcal{C} \right)$$



— . — . —

(2)

$$(\nabla_X Y)(P) := (\nabla_{X_P} Y)(P)$$

$$\left[\nabla_X : \mathcal{X}(\Sigma) \rightarrow \mathcal{X}(\Sigma) \right]$$

★ derivata covariante risp a $X \in \mathcal{X}(\Sigma)$

L'applicazione

$$\left[\nabla : X \mapsto \nabla_X \right]$$

è detta ~~★~~ connessione di Levi Civita

*** Il tutto si generalizza pari pari ad una varietà Riemanniana

★ Proprietà di ∇_X (b)

Proprietà generali

1) linearità : ∇_X è un operatore lineare

$$\nabla_X (\alpha Y_1 + \beta Y_2) = \alpha \nabla_X Y_1 + \beta \nabla_X Y_2$$

2) "Leibniz" di X prop. di prodotto $\alpha, \beta \in C^0(S)$

$$\nabla_{\alpha X + \beta Y} Z = \alpha \nabla_X Z + \beta \nabla_Y Z$$

3)

Regola di Leibniz

$$\nabla_X \alpha Y = \underbrace{X(\alpha)} Y + \alpha \nabla_X Y$$

$$X = a(u,v) r_u + b(u,v) r_v$$

$$X(\alpha) = a(u,v) \frac{\partial \alpha}{\partial u} + b(u,v) \frac{\partial \alpha}{\partial v}$$

$$X(\alpha) = d\alpha(X)$$

★ ulteriori proprietà (Der dal caso specifico)

Assumendo la formula:

$$\nabla_{r_i} r_j = \Gamma_{ij}^k r_k$$

(i) assumiamo

$$r_{uv} = r_{vu}$$

$$(r_{ij} = r_{ji})$$

Che

(1)

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$$

$$\nabla_{r_i} r_j = \nabla_{r_j} r_i$$

"Assenza di torsione"

Proprietà specifiche

(2')

"metricità"

"compatibilità con la metrica"

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \langle r_i, r_j \rangle = \langle r_{i,k}, r_j \rangle + \langle r_i, r_{j,k} \rangle$$

$$= \langle \nabla_{r_k} r_i, r_j \rangle + \langle r_i, \nabla_{r_k} r_j \rangle$$

in modo compatto ..

$$d \langle x, y \rangle = \langle \nabla x, y \rangle + \langle x, \nabla y \rangle$$

$$\left(\nabla \langle x, y \rangle = \langle \nabla_2 x, y \rangle + \langle x, \nabla_2 y \rangle \right)$$

in analogia

1, 2, 3 + 1', 2'

confermiamo la simmetria

Conosciamo una varietà Riemanniana

(Levi-Civita)

* osservazione

Applicazione diretta del formalismo:

THEOREMA EGAEBIUM