Chiara Carraro e Silvia Saoncella

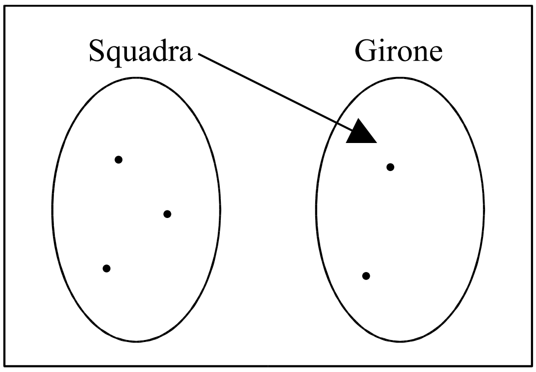
# TEORIA DEGLI INSIEMI

Cosa sono gli insiemi?
Da dove nasce il concetto di insieme?
Cosa sono gli elementi?
L'uomo giunge, a partire dall'esperienza, a concetti attraverso elaborazioni mentali (ma il concetto di insieme non è l'esperienza).
L'uomo si fa un'idea, anche se soggettiva, di ciò che lo circonda.
Allora quali operazioni mentali deve aver svolto l'uomo per giungere al concetto di insieme, di elemento?
Perché definisco questa cosa un oggetto, come faccio a stabilire che è un oggetto?
Quando mi riferisco a un oggetto posso dire che i miei occhi vedono qualcosa, il mio tatto sente qualcosa; ho tutte quelle sensazioni che mi permetteranno di considerare un oggetto.
Un elemento è ciò che posso considerare in modo unitario. Ma da dove viene questa idea di unità?
Dal fatto che io so di essere me stesso.
L'uomo ha una percezione sperimentale della sua identità, del suo essere se stesso, in base alle sue sensazioni, tra le quali la memoria ha un ruolo essenziale, nonostante tutto attorno a lui e lui stesso continui a mutare.
Inoltre, in base a questa sua consapevolezza, cerca di estendere a ciò che gli sta intorno lo stesso concetto di identità attribuendolo a un insieme di aspetti, quello visivo, tattile, ecc…
In altre parole, l'uomo mette assieme diversi aspetti e decide di considerarne alcuni, e di non considerarne altri. Inoltre attribuisce ad altri oggetti il fatto di essere se stessi e a volte anche di sapere di essere se stessi.
Per giungere al concetto di elemento l'uomo astrae dalle caratteristiche individuali di ogni singolo complesso di aspetti a cui ha aggiunto l'aspetto di essere se stesso,per mantenere la caratteristica di ciascuno di questi complessi di aspetti che è la prorpia identità. Un elemento è lui, ha una sua identità indipendentemente dalle sue altre caratteristiche. Nell'elemento vi è dunque l'idea di identità.

Cosa si può dire riguardo la collezione di elementi?
Che esperienza serve per avere un idea di collezione?
Bisogna fissare l'attenzione su qualcosa.
Per esempio, se fisso la mia attenzione sui giorni della settimana ottengo attraverso l'esperienza, che può essere interna o esterna, una idea di collezione.
Osservando l'alternanza di luminosità e oscurità ottengo una prima idea di giorno.
Ripetendo la stessa esperienza in un certo arco di tempo, posso fissare la mia attenzione sui giorni trascorsi.
Data questa idea di collezione degli elementi su cui ho fissato la mia attenzione, posso anche determinare quali sono gli elementi che vi appartengono. Dico che una

certa cosa appartiene alla collezione, se è una delle cose a cui stavo effettivamente pensando; in caso contrario si dice che essa non appartiene alla collezione.
Tuttavia fissare l'attenzione su un elemento non richiede la conoscenza di esso.
Posso fissare la mia attenzione sul niente; allora dico che la mia collezione è vuota.
Come intendere la parola collezione?
Faccio riferimento ad alcune esperienze, ad alcune elaborazioni mentali, che penso siano comuni, o perlomeno analoghe, per le varie persone, e quindi dò un nome a quello che ho elaborato mentalmente.

Se invece parlo di insiemi? Cosa sono gli insiemi?
Nelle collezioni ho il concetto di appartenenza, che però è una relazione con una sola direzione: infatti se un elemento appartiene a una collezione, non posso dire che la collezione appartiene all'elemento. Ma esistono delle particolari collezioni che hanno un comportamento strano.
Ad esempio, una squadra di calcio è una collezione di più elementi, i giocatori. Ma a sua volta è anche un elemento della collezione di squadre che giocano nel suo stesso girone. Una collezione come questa, che può essere considerata come un elemento a sè stante, e che può quindi essere elemento di un'altra collezione, è detta insieme.




Ma perchè esiste questa differenza tra collezione e insieme?
Frege scrisse "I Fondamenti dell'Aritmetica". Egli considerava ogni numero naturale come la collezione di tutti gli elementi equinumerosi. Ad esempio, la collezione di tutte le cose con un solo elemento formavano il numero uno, la collezione di tutte le coppie formava il numero due, ecc... Ma, per poter essere usati come elementi nelle espressioni, ogni numero-collezione doveva poter essere considerato come una cosa singola. Per Frege, quindi, ogni collezione era anche un insieme, e su questa ipotesi basò tutto il suo lavoro.
In una lettera Russel dimostrò che l'ipotesi di partenza di Frege, e dunque anche tutta la sua teoria, erano contraddittorie.
La sua dimostrazione era condotta per assurdo.
Prendiamo la collezione R=$\{a \mid a \notin a\}$, cioè di tutti quegli insiemi che non appartengono a se stessi. Per Frege questa collezione è anche un insieme. È allora lecito chiedersi se $R \in R$. Ma se $R \in R$ deriva che $R \notin R$; se invece $R \notin R$ deriva che $R \in R$. Il risultato raggiunto costituisce una contraddizione, quindi l'ipotesi, che ogni collezione possa esssere considerata insieme, è veramente sbagliata.
Abbiamo dimostrato che non tutte le collezioni sono insiemi.
Allora quali sono le collezioni che possono essere considerate insiemi?
Esistono due possibili atteggiamenti per determinarle:
- da tutte le collezioni possibili,eliminare quelle che, se considerate come insiemi, portano a contraddizione;

- considerare almeno certe collezioni come insiemi in quanto di fatto si usano come tali, magari cercando di giustificare che tale assunzione non porta a contraddizione.

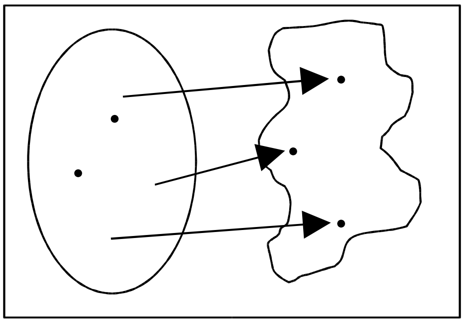
Noi assumeremo il secondo atteggiamento.
Per cominciare consideriamo le collezioni composte da due elementi. Viste come una cosa singola portano a contraddizione? Non si riesce a vedere come una tale ipotesi possa portare a contraddizione, ma andrebbe dimostrata. Noi lo accettiamo, senza dimostrazioni. Accettiamo quindi l'ASSIOMA DELLA COPPIA, cioè l'affermazione che *ogni collezione di due elementi è un insieme.*

Posso fare lo stesso procedimento con collezioni di più elementi?
Prendiamo due insiemi, A e B, e la collezione di elementi $A\cup B$. Posso dire che $A\cup B$ è un insieme?
Se vedo un insieme come una quantità ben controllabile, allora $A\cup B$ è qualcosa di controllabile unito a qualcos'altro di ben controllabile. Posso allora ragionevolmente pensare che anche $A\cup B$ sia una quantità ben controllabile, e quindi non si dovrebbe giungere a contraddizioni supponendo che sia un insieme. In realtà questa non è una vera e propria dimostrazione, ma noi la consideriamo ugualmente consideriamo ugulamente accettabile questa ipotesi che diviene un aspetto della nopstra nozione di insieme. Accettiamo quindi un secondo assioma:
*- se A e B sono insiemi, allora $A\cup B$ è un insieme.*
Prendiamo ancora un insieme B e una sottocollezione A, cioè che $A\subset B$. Posso dire che A è un sottoinsieme di B? Certo, in quanto, nell'atteggiamento di considerare insiemi almeno certe collezioni ragionevolmente accettabile, se il tutto è ben controllabile, lo sarà anche una sua parte. Anche qui consideriamo un terzo assioma:
*- se B è un insieme e $A\subset B$, allora A è un insieme.*
Con questi tre assiomi posso facilmente verificare che una qualsiasi collezione finita è un insieme.

Proseguendo, che altre collezioni posso considerare come insiemi?
Vediamo cosa succede con la collezione dei sottoinsiemi di un insieme. So già che le sottocollezioni di un insieme sono insiemi (deriva dal terzo assioma). Posso quindi ragionevolmente parlare di collezione dei sottoinsiemi di un insieme, cioè dell'insieme delle parti P(A). È un insieme?
Anzitutto notiamo che se A è finito, P(A) è finito, quindi è un insieme perchè collezione finita di elementi.
Ma se A è infinito? Esistono insiemi infiniti? Anche se ne esistessero accettiamo che che anche P(A) sia un insieme. Dell' affermazione che, considerando P(A) insieme non si giunge a contraddizione non si ha una dimostrazione. Accettiamo quindi il quarto assioma, DEI SOTTOINSIEMI:
*- se A è un insieme, allora P(A) è un insieme.*
Man mano che procedo nel mio sviluppo della nozione di insieme faccio asserzioni e accetto assiomi per i quali è sempre più difficile convincersi che non portino a contraddizioni.

Procediamo con la collezione unione su un insieme, $\bigcup A$.
Partendo da un insieme di insiemi $A = \{A_1; A_2; ...; A_n\}$ la collezione unione
$\bigcup A = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \{x \mid \exists Y, x \in Y, Y \in A\}$.
Se $A$ è finito, $A_1, A_2 ... A_n$ sono insiemi, dunque $A_1 \cup A_2$ è un insieme, quest'ultimo $\cup A_3$ è un insieme, e così proseguo fino ad $A_n$. Deduco quindi che $\bigcup A$ è un insieme.
E se $A$ è infinito? Anche in questo caso accettiamo e stabiliamo che $\bigcup A$ sia un insieme (ancora pensando che ciò non porti a contraddizioni).

Partiamo ora da un insieme di elementi, dove ci sia un modo di far corrispondere ad elementi dell'insieme al più un elemento.



La collezione dei corrispondenti è un insieme?
La corrispondenza considerata è una funzione che chiamo eventualmente $\varphi$. Se $\varphi$ è una funzione, eventualmente non totale, quello che ottengo è un insieme?
Di certo non ho più elementi di quelli dell'insieme di partenza. Purtroppo questo non mi basta per dimostrare che la collezione sia un insieme, ma, come è già stato fatto in precedenza, lo prendiamo per caratteristica della nostra nozione di insieme e accettiamo un quinto assioma:
- *se A è un insieme, allora l'unione su A, $\bigcup A$, è un insieme.*