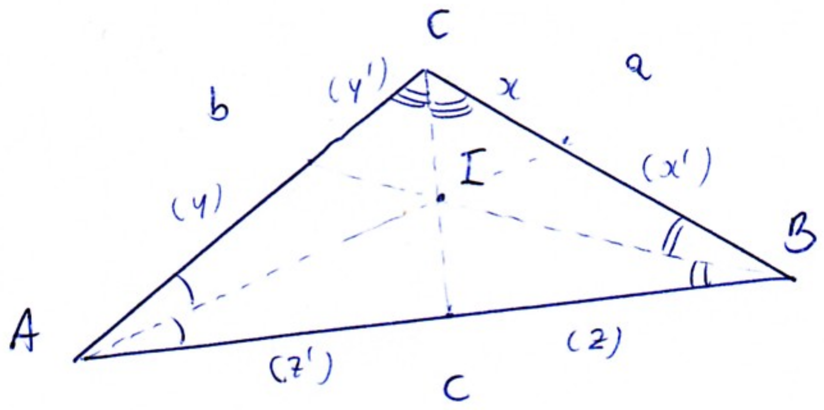
4 Problema

Addendum III

Sia dato un triangolo ABC in $\mathbb{E}^3$ (spazio euclideo)

Determiniamone l'incentro (i.e. il punto di intersezione delle bisettrici degli angoli)

a, b, c lati di ABC



Si ha: $$I = u A + v B + w C$$

(u, v, w coord. baricentriche, $u+v+w=1$)

Si ha, in generale $\frac{x}{x'} = \frac{v}{w}$, $\frac{y}{y'} = \frac{w}{u}$, $\frac{z}{z'} = \frac{u}{v}$

[v. Cap. III] e, per l'incentro (Cf. addendum I)

$$\frac{x}{x'} = \frac{b}{c}, \quad \frac{y}{y'} = \frac{c}{a}, \quad \frac{z}{z'} = \frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{v}{w} = \frac{b}{c}, \quad \frac{w}{u} = \frac{c}{a}, \quad \frac{u}{v} = \frac{a}{b}$$

Si trova, successivamente

$$v = \frac{b}{c} w \qquad u = \frac{a}{c} w$$

$$u + v = \frac{a+b}{c} w = 1 - w$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a+b}{c} + 1 \right) w = 1$$

$$\Rightarrow \frac{a+b+c}{c} w = 1 \quad \Rightarrow \quad w = \frac{c}{a+b+c}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = \dfrac{a}{a+b+c} \\ v = \dfrac{b}{a+b+c} \\ w = \dfrac{c}{a+b+c} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \frac{a}{a+b+c} A + \frac{b}{a+b+c} B + \frac{c}{a+b+c} C$$

Si noti che se $a = b = c$, $I = G$ (baricentro)
(come è giusto che sia)

Add III - 2