Corso sui Sistemi Ibridi

Andrea Balluchi *Luca Benvenuti* *Tiziano Villa*

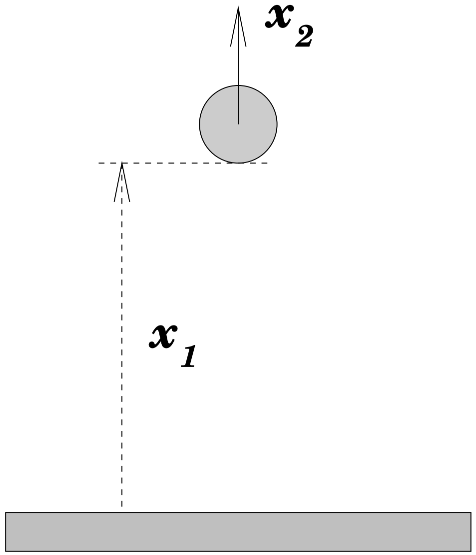
PARADES G.E.I.E., Via San Pantaleo 66, Roma, Italy

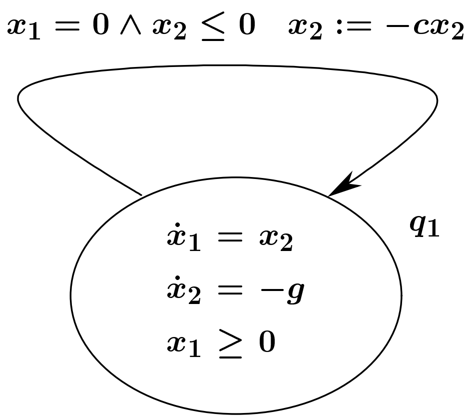
Università di Udine, 15-16 Febbraio 2000

Sommario

- Esempi motivanti
  1. Urto anelastico
  2. Termostato
  3. Controllo digitale e supervisore
  4. Controllo ottimo di veicoli su ruote
  5. Motore a combustione interna
- Formalizzazione
  1. Definizione di automa ibrido
  2. Definizione di traiettoria
  3. Esistenza ed unicità delle traiettorie
  4. Equazioni differenziali con discontinuità

Urto anelastico





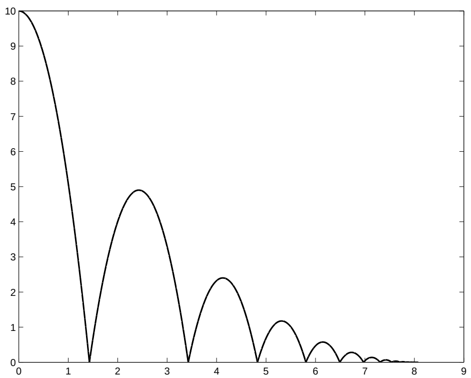
x_1 - posizione della pallina

x_2 - velocità della pallina

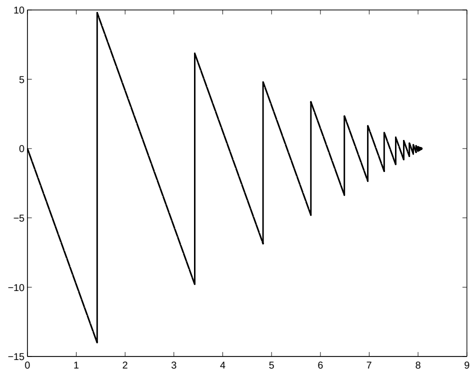
g - accelerazione di gravità

$c < 1$ - anelasticità

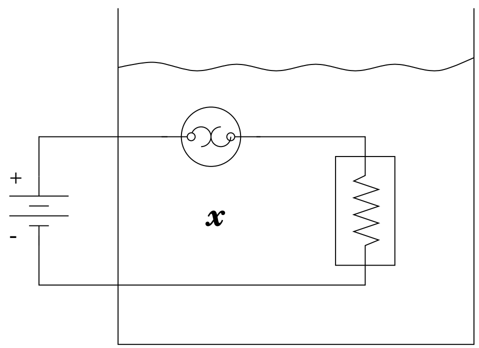
x_1



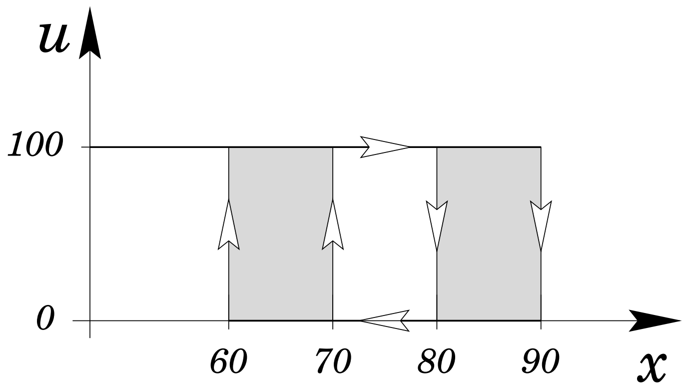
x_2

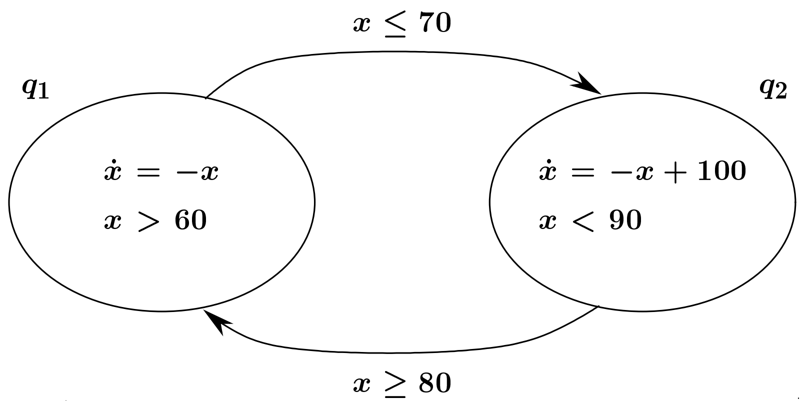


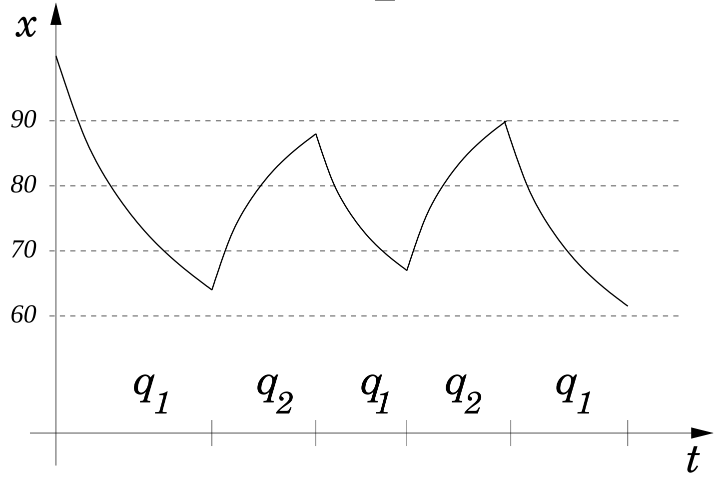
Termostato



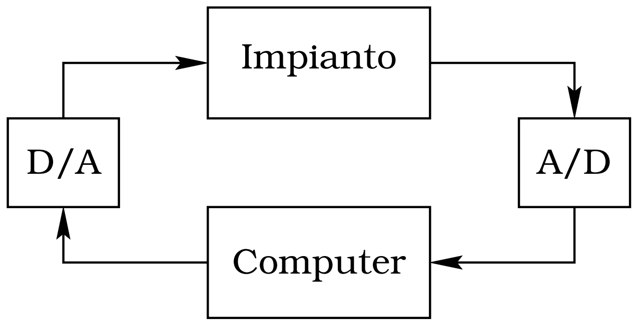
x - temperatura del liquido

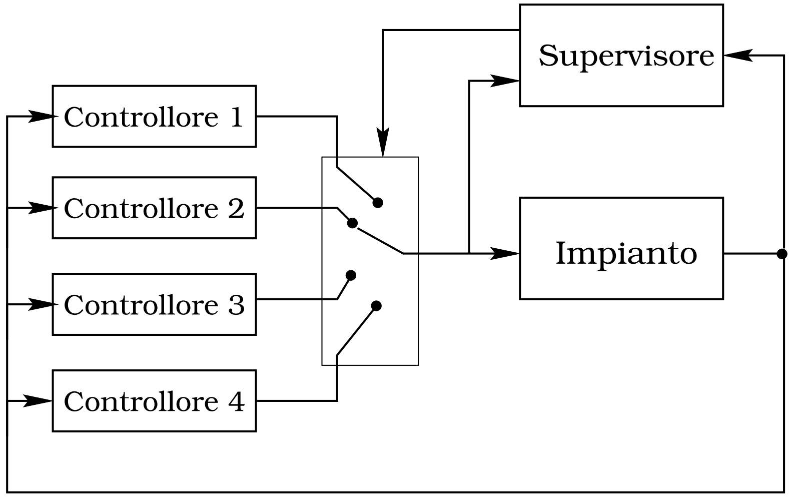






Controllo digitale e supervisore

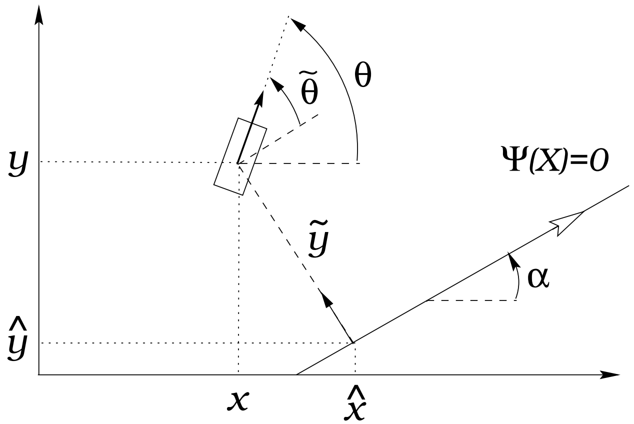


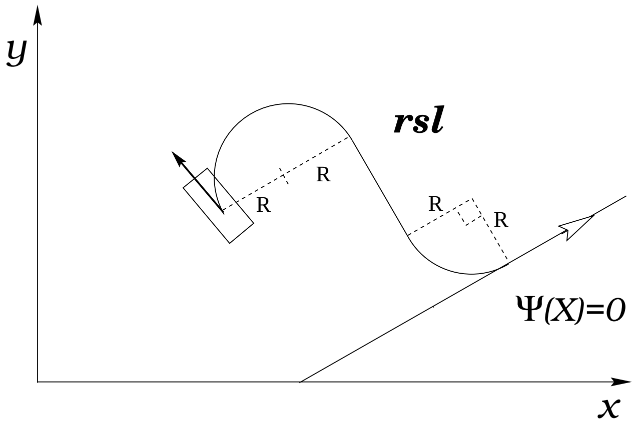


Impianto con evoluzione continua e controllore digitale discreto

Sistema controllato da un supervisore che attiva quattro tipi di controllo distinti

Controllo ottimo di veicoli su ruote





Dinamica della macchina di Dubins

$$\begin{cases} \dot{x} = V\cos\theta \\ \dot{y} = V\sin\theta \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases}$$

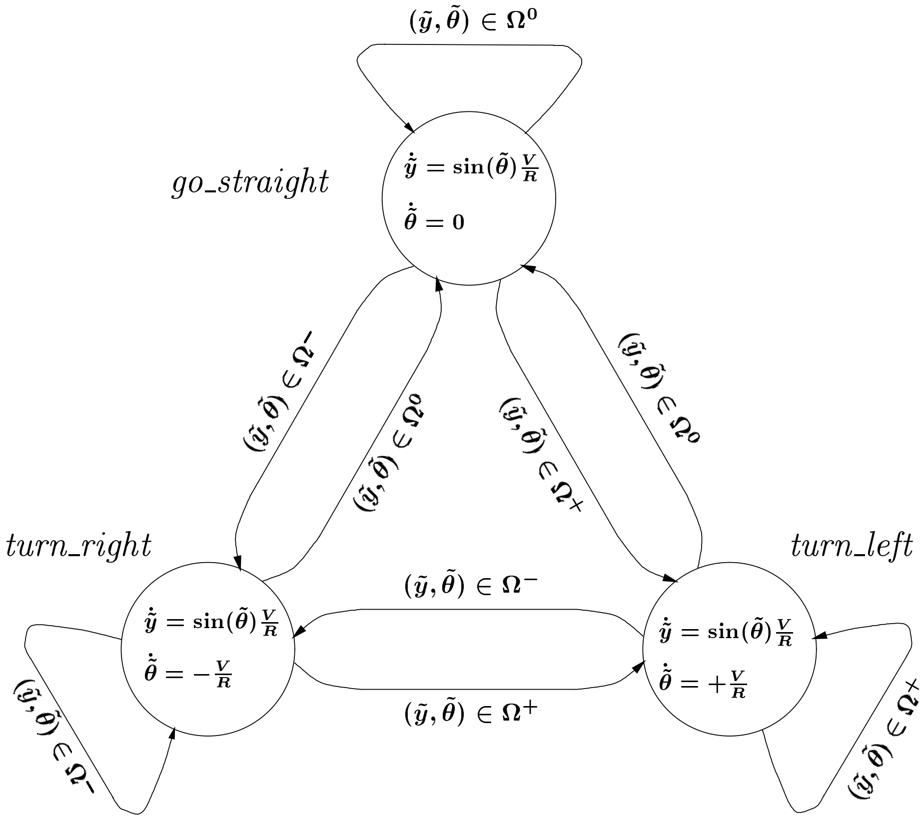
raggio minimo di curvatura

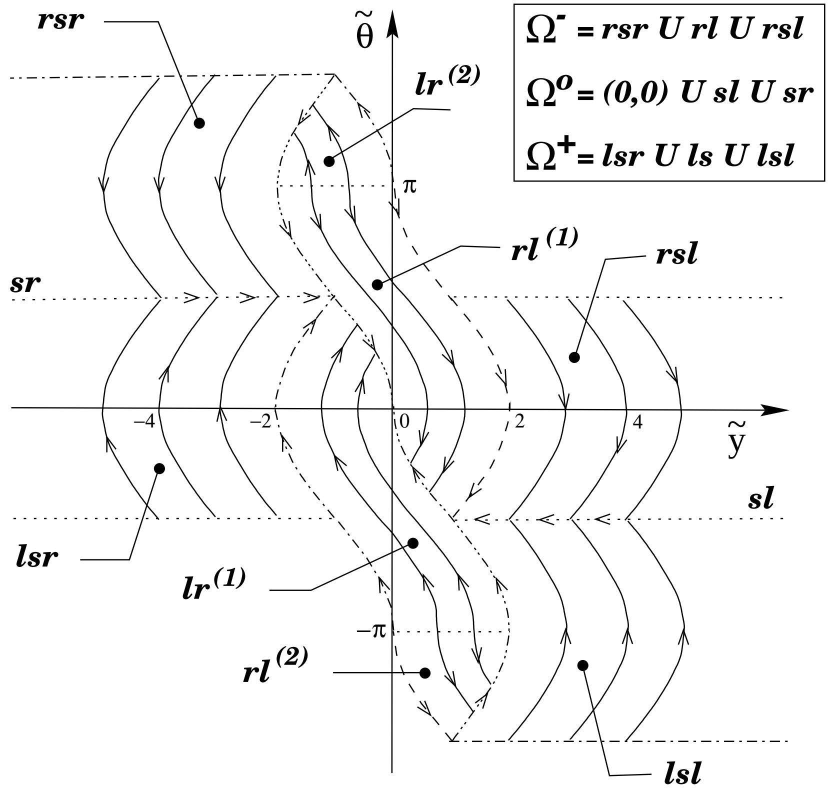
$$|\omega| < \frac{V}{R}.$$

Dinamica nello spazio di stato ridotto

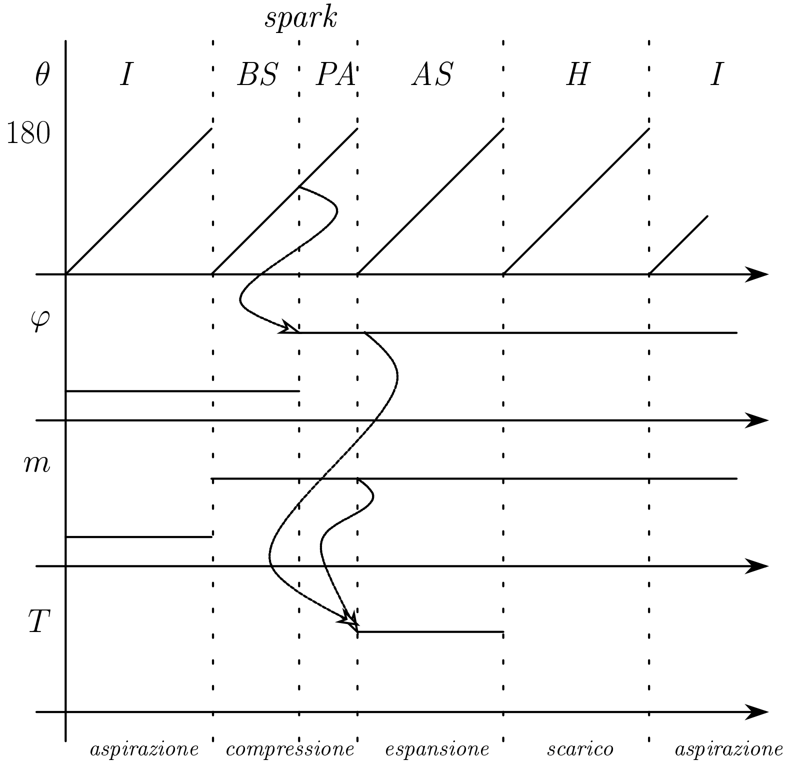
$$\begin{cases} \dot{\tilde{y}} = \frac{V}{R}\sin\theta \\ \dot{\tilde{\theta}} = \omega \end{cases}$$

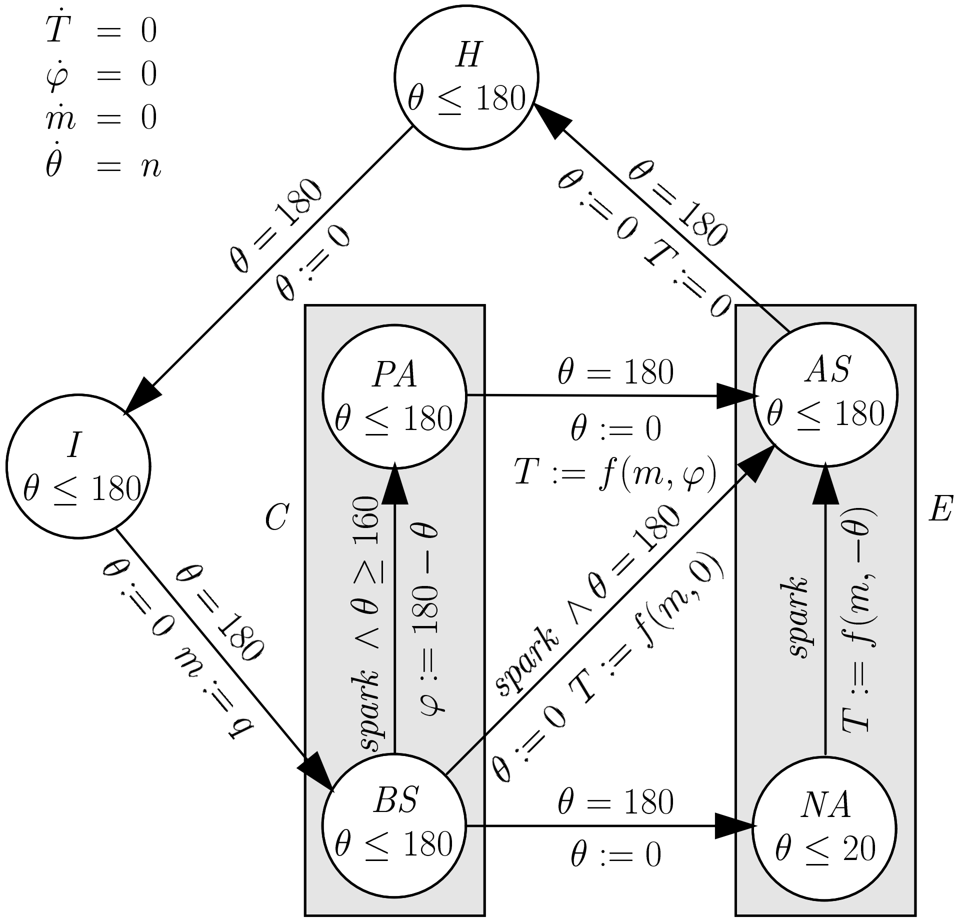
Controllo ottimo nello spazio ridotto





Motore a combustione interna

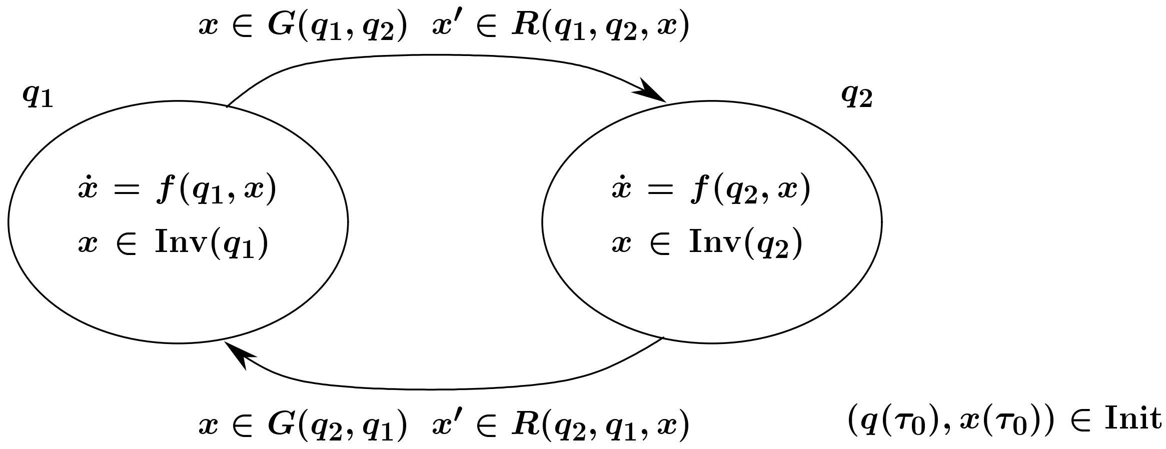




Definizione di automa ibrido

Definizione. Un automa ibrido è una collezione $H = (Q, X, f, \mathrm{Init}, \mathrm{Inv}, \mathrm{Jump})$:

- Q è l'insieme finito degli stati discreti
- X è l'insieme delle variabili continue $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ che assumono valori in $\mathbb{R}^n$
- $f : Q \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definisce il flusso continuo in ogni stato discreto $q \in Q$ mediante l'equazione $\dot{x} = f(q, x)$
- $\mathrm{Init} \subset Q \times \mathbb{R}^n$ definisce gli stati iniziali ammissibili
- $\mathrm{Inv} \subset Q \times \mathbb{R}^n$ definisce le condizioni di invarianza: per ogni $q \in Q$, x deve verificare $(q, x) \in \mathrm{Inv}$
- $\mathrm{Jump} : Q \times \mathbb{R}^n \to 2^{Q \times \mathbb{R}^n}$ specifica le transizioni discrete ammissibili ed il reset dello stato continuo.



- insieme delle transizioni discrete

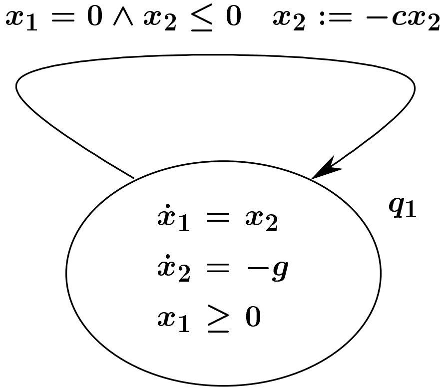
$$E = \{(q, q') \in Q \times Q | \exists x, x' \in I\!R^n, (q', x') \in \text{Jump}(q, x)\}$$

- per ogni $e = (q, q') \in E$, insieme delle guardie

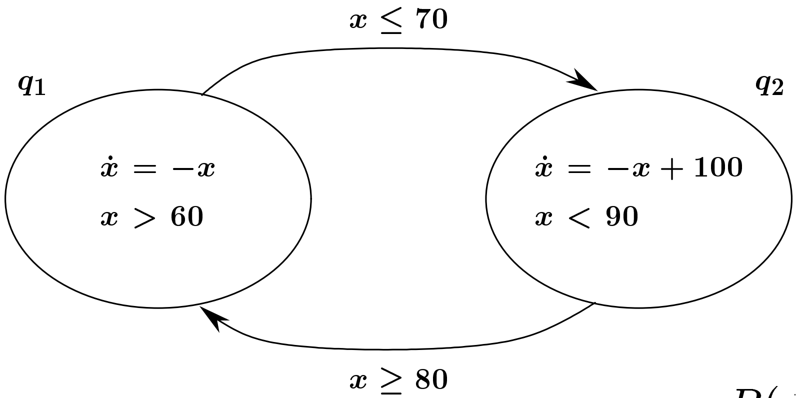
$$G(e) = \{x \in I\!R^n | \exists x' \in I\!R^n, (q', x') \in \text{Jump}(q, x)\}$$

- per ogni $e = (q, q') \in E$, funzione dei reset

$$R(e, x) = \{x' \in I\!R^n | (q', x') \in \text{Jump}(q, x)\}$$



$$
\begin{aligned}
Q &= \{q_1\}, \quad X = \{x_1, x_2\} \\
f(q_1, x_1, x_2) &= (x_2, -g) \\
\text{Init} &= q_1 \times \{x_1 \geq 0\}, \quad \text{Inv} = q_1 \times \{x_1 \geq 0\} \\
E &= \{e_1 = (q_1, q_1)\} \\
G(e_1) &= \{x_1 = 0 \wedge x_2 \leq 0\} \\
R(e_1, (x_1, x_2)) &= \{(x_1, -cx_2)\}
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
Q &= \{q_1, q_2\}, \quad X = \{x\} \\
f(q_1, x) &= -x, \quad f(q_2, x) = -x + 100 \\
\text{Init} &= Q \times \{0 \leq x \leq 99\} \\
\text{Inv} &= (q_1 \times \{x > 60\}) \cup (q_2 \times \{x < 90\}) \\
E &= \{e_1 = (q_1, q_2), e_2 = (q_2, q_1)\} \\
G(e_1) &= \{x \leq 70\}, \quad G(e_2) = \{x \geq 80\} \\
R(e_1, (x_1, x_2)) &= R(e_2, (x_1, x_2)) = \{(x_1, x_2)\}
\end{aligned}
$$

Definizione di traiettoria

Definizione. Un *supporto temporale* τ è una sequenza $\{I_i\}_{i=0}^N$ di intervalli, tali che

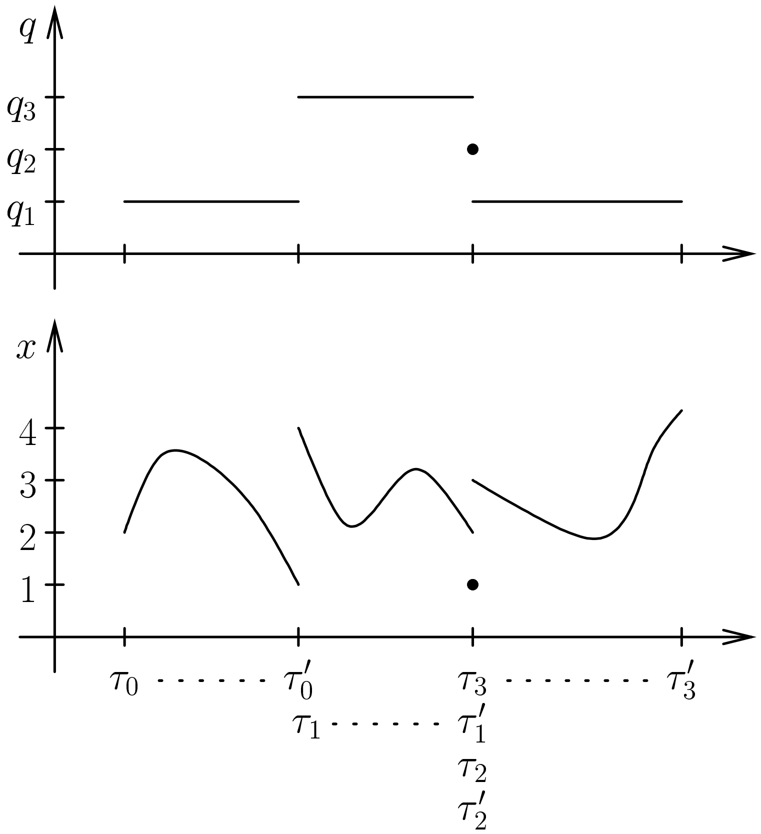
- per ogni $i < N$, $I_i = [\tau_i, \tau_i']$ con $\tau_i \leq \tau_i' = \tau_{i+1}$
- se $N < \infty$, $I_N = [\tau_N, \tau_N']$ oppure $I_N = [\tau_N, \tau_N')$.

$\mathcal{T}$ denota l'insieme dei supporti temporali.

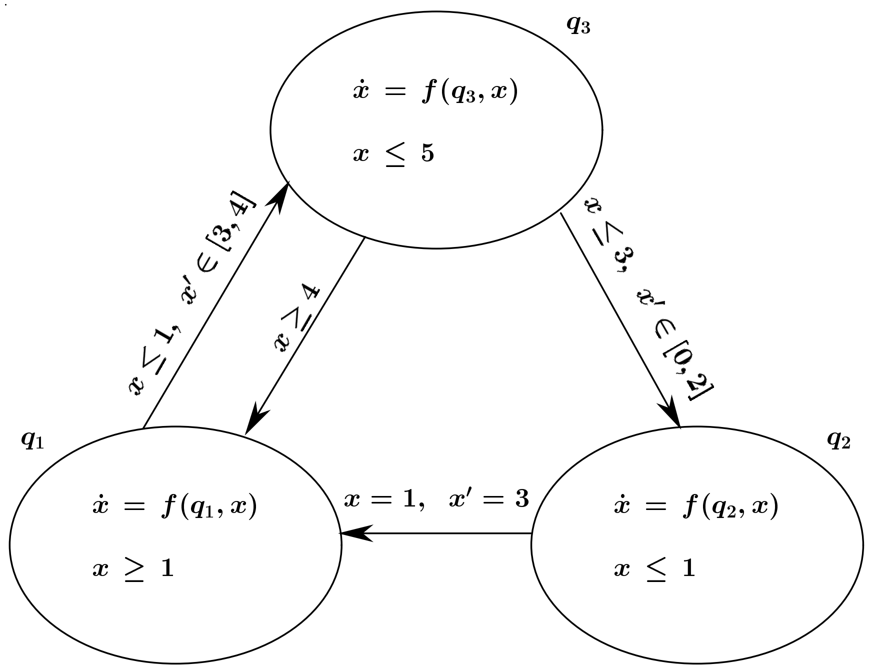
Definizione. Una *traiettoria* χ di un automa ibrido $H = (Q, X, f, \mathrm{Init}, \mathrm{Inv}, \mathrm{Jump})$ è una collezione $\chi = (\tau, q, x)$, con $\tau \in \mathcal{T}$, $q : \tau \to Q$ e $x : \tau \to \mathbb{R}^n$, con

- $(q(\tau_0), x(\tau_0)) \in \mathrm{Init}$
- per ogni i con $\tau_i < \tau_i'$, $\forall \tau \in [\tau_i, \tau_i']$, $v(\tau)$ è costante, $x(\tau)$ è una soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = f(q, x)$ e $(q(\tau), x(\tau)) \in \mathrm{Inv}$
- per ogni i, $(q(\tau_{i+1}), x(\tau_{i+1})) \in \mathrm{Jump}(q(\tau_i'), x(\tau_i'))$.

Esempio di traiettoria



$$\tau = \{[\tau_1, \tau_1'], [\tau_2, \tau_2'], [\tau_3, \tau_3']\}$$



Esistenza ed unicità in O.D.E.

$$\dot{x} = f(x,t), \quad x(0) = x_0, \qquad x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0 \tag{1}$$

Una soluzione del O.D.E. (1) secondo Caratheodory è una funzione differenziabile con continuità $x(t)$ che soddisfa

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(\tau),\tau)d\tau$$

Teorema (Esistenza e unicità locale). Assumiamo che $f(x,t)$ in (1) sia continua in t e x. Se esistono T, ρ, k, h tali che

$$\|f(x_1,t) - f(x_2,t)\| \leq k\|x_1 - x_2\| \qquad \forall x_1, x_2 \in B(x_0,\rho) \quad \forall t \in [0,T] \tag{2}$$

$$\|f(x_0,t)\| \leq h \qquad \forall t \in [0,T] \tag{3}$$

allora (1) ha una unica soluzione per $t \in [0,\delta]$ per un δ sufficientemente piccolo.

Teorema (Esistenza e unicità globale). Assumiamo che $f(x,t)$ in (1) sia continua a tratti in t (numero finito di discontinuità in ogni compatto $[t_1, t_2]$). Se per ogni $T \in [0, \infty)$ esistono k, h tali che

$$\begin{aligned} \|f(x_1,t) - f(x_2,t)\| &\leq k\|x_1 - x_2\| \qquad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n \;\; \forall t \in [0,T] && (4) \\ \|f(x_0,t)\| &\leq h \qquad \forall t \in [0,T] && (5) \end{aligned}$$

allora (1) ha una unica soluzione su $t \in [0,T]$ per qualsiasi $T \leq \infty$.

La (4) è detta condizione di Lipschitz

$$\left\| \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right] (x_0) \right\| < \infty \implies f \text{ è Lipschitz continua in } x_0 \implies f \text{ è continua in } x_0$$

Equazioni differenziali con discontinuità

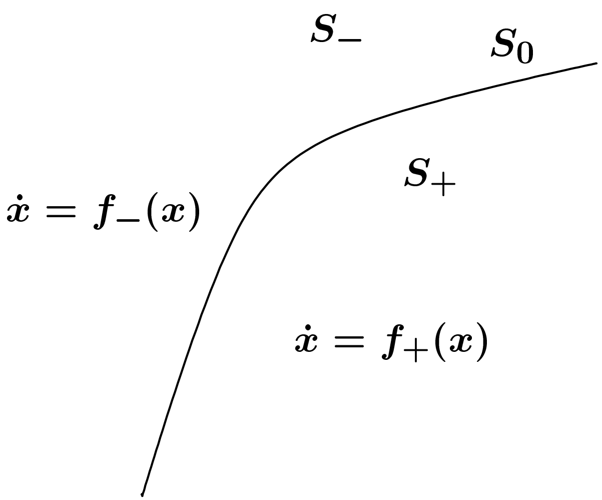
Sono state studiate nel controllo on-off (relé), controllo ottimo (bang–bang).

Sia $s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione di commutazione e $S_0 = \{x \in \mathbb{R}^n | s(x) = 0\}$ la superficie di commutazione

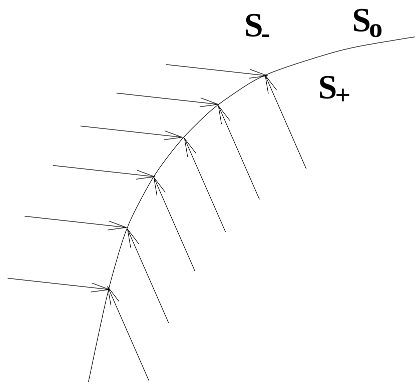
$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_+(x) \quad \text{per } x \in S_+ = \{x \in \mathbb{R}^n | s(x) > 0\} \\ \dot{x} &= f_-(x) \quad \text{per } x \in S_- = \{x \in \mathbb{R}^n | s(x) < 0\} \end{aligned}$$

con f_+, f_- funzioni regolari da $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, che assumo valori diversi in S_0

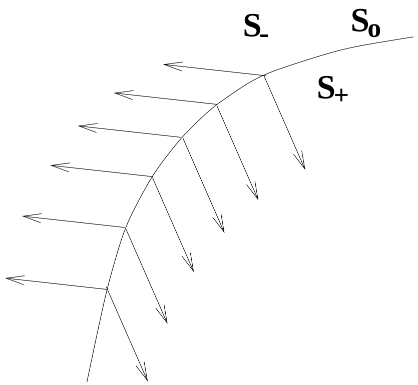
$$\exists x_0 \in S_0, \quad \lim_{x \to x_0} f_+(x) \neq \lim_{x \to x_0} f_-(x)$$



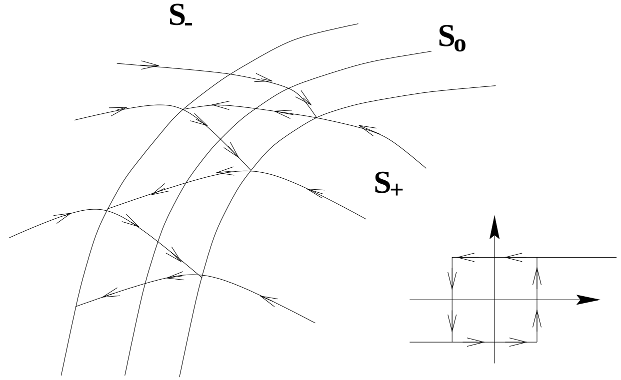
Traiettorie nei pressi della discontinuità



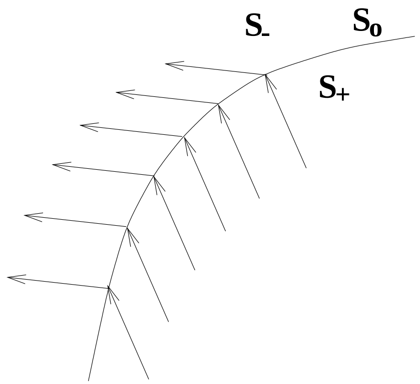
campo attrattivo



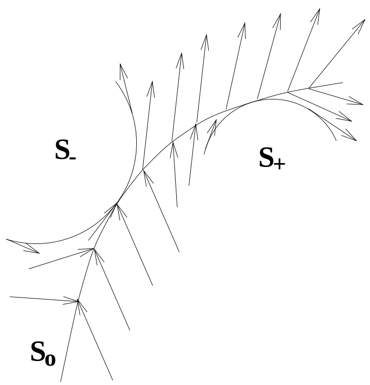
campo repulsivo



campo attrattivo con relé



campo perturbato



caso generale

Tecniche di soluzione

- rendere regolare f attorno S_0
- metodo di Filippov: il campo equivalente f^e è contenuto nell'inviluppo convesso di f_+, f_-.

Controlli a Struttura Variabile

Nei controlli a *struttura variabile* la condizione di attrattività è voluta:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u(x), \quad u(x) = k\text{sign}\ (s(x))$$

il comportamento si determina mediante la tecnica del *controllo equivalente*:

$$\dot{s} = \nabla s \dot{x} = [\nabla s(x) f(x)] + [\nabla s(x) g(x)] u(x) = 0$$

da cui

$$\begin{aligned} u^e &= -[\nabla s(x) g(x)]^{-1} [\nabla s(x) f(x)] \\ \dot{x} &= \left[I - g(x)[\nabla s(x) g(x)]^{-1} \nabla s(x) \right] f(x) \end{aligned}$$

Per sistemi lineari

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu, \quad s(x) = cx = 0, \\ u^e &= -(cb)^{-1} cAx \quad \dot{x} = [I - b(cb)^{-1} c] Ax \end{aligned}$$

Equazioni differenziali con soluzione non unica

Sintesi delle traiettorie che conducono all'origine in tempo minimo per

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{y}{2} \\ \frac{x+1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{y}{2} \\ \frac{x+1}{2} \end{bmatrix} u, \qquad \text{con } |u| \le 1$$