

GEOMETRIA

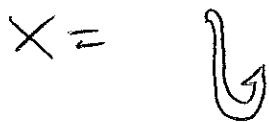
a.a. 2011/12 (Prof. M. Spura)

Prova scritta del 9 luglio 2012

- ① Sia data la superficie $\Sigma: x^2 + y^2 - z^2 = 1$
(di che cosa si tratta?). Sia dato il piano
 $\pi: x + 2z - 1 = 0$. Si consideri $\mathcal{C} = \Sigma \cap \pi$
(di che tipo di curva si tratta?). Se ne calcoli la
curvatura normale e la curvatura geodetica in
 $P: (1, 0, 0)$ [È utile fare uso del calcolo implicito
 $x = x(s)$ etc...]

- ② Data $\Sigma: x^2 + y^2 - z^2 = 1$
Se ne determini la curvatura gaussiana in
un pto generico [È sufficiente considerare
 $P_0: (x_0, 0, z_0) \in \Sigma \dots$]

- ③ Nel piano, si considerino i seguenti spazi
topologici (top. relativa)



Si dica se sono connessi, compatti e si dica se risultano
a due a due omeomorfi o meno.

Tempo a disposizione: 2h

Le risposte vanno adeguatamente giustificate.

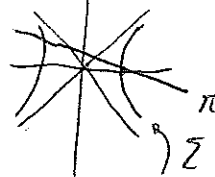
①

$$\Sigma: x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

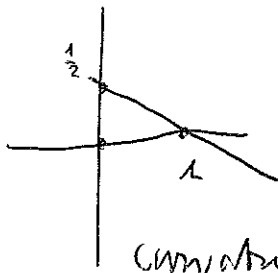
(iperboloide ad una foglia,
di rotazione)

Sia $\pi: \frac{x}{1} + \frac{z}{\frac{1}{2}} = 1$

$$x + 2z - 1 = 0$$



geometria
9 luglio
2012

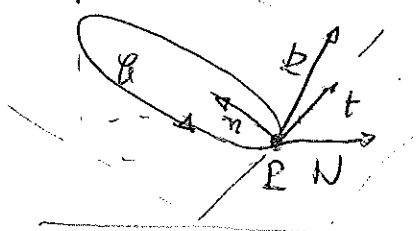
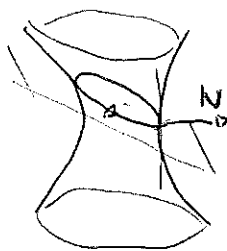


$$\mathcal{C} = \Sigma \cap \pi. \quad (\mathcal{C} \text{ è piana, ed è un'ellisse})$$

Calcolare la curvatura normale e la
curvatura geodetica di $\mathcal{C}$ in $P: (1, 0, 0)$

Per la curvatura normale

è possibile procedere in modo diretto:



★ In base al teorema di Meusnier, tutte le curve per Σ
aventi la stessa tangente hanno la stessa
curvatura normale. Basta allora osservare che $\mathcal{C}' = \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$
appartiene a Σ , ha la stessa tangente di $\mathcal{C}$ in P , e ha curv. normale $= -1$

$$\Rightarrow R_n = -1$$

↑
notare

; la curvatura

non si trova col calcolo implicito.

$$\mathcal{C}: \begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 1 \\ x + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$x = x(s) \text{ etc.} \quad 1 = \frac{d}{ds}$$

$$\text{C' come } R = \|\mathcal{C}'\|$$

$$\begin{cases} 2xx' + 2yy' - 2zz' = 0 \\ x' + 2z' = 0 \end{cases}$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$$

$$x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0$$

$$\begin{cases} x'' + y'' - 2z'' = 0 \\ x'' + 2z'' = 0 \end{cases}$$

$$x x' + y y' + z z' = 0$$

$$x' + 2 z' = 0$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$$

$$x x'' + y y'' + z z'' = 0$$

$$x'' + 2 z'' = 0$$

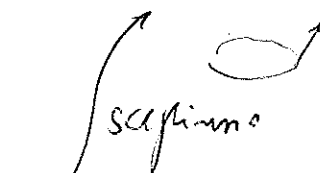
$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$$

$$x' x'' + y' y'' + z' z'' = 0$$

$$y' = +1 \quad \downarrow \text{polim}$$

$$P: (1, 0, 0)$$

$$x' = 0 \Rightarrow z' = 0 \Rightarrow y' = \pm 1$$



$$1 + x'' = 0 \Rightarrow x'' = -1$$

$$-1 + 2 z'' = 0 \Rightarrow z'' = \frac{1}{2}$$

$$1 \cdot y'' = 0 \Rightarrow y'' = 0$$

$$\underline{r}'' = (-1, 0, \frac{1}{2})$$

$$R = \|\underline{r}''\| = \sqrt{1 + \frac{1}{4}}$$

$$\underline{r}'' = R \cdot \underline{n} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$R_n = \frac{\sqrt{5}}{2} \langle \underline{n}, \underline{n} \rangle$$

$$= \langle R \underline{n}, \underline{n} \rangle$$

$$= \langle \underline{r}'', \underline{n} \rangle$$

$$\left(\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(-1, 0, \frac{1}{2} \right) = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \right)$$

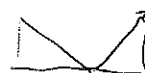
$$= (-1, 0, \frac{1}{2}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -1$$

come già
travato.

$$R_g = R \langle \underline{n}, \underline{b} \rangle$$

$$\underline{b} = \frac{1}{\sqrt{5}} (1, 0, 2)$$

$$\underline{n} = (1, 0, 0)$$



$$R_g = \frac{\sqrt{5}}{2} \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{2}$$

$$R^2 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4} \quad \text{OK}$$

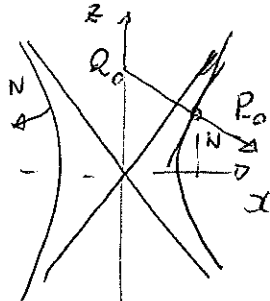
$$(R^2 = R_g^2 + R_n^2)$$

②

$$Z: x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

geometria
9 luglio
2012

curvatura gaussiana K in un pto
genico; basta calcolarla in un pto del profilo



$$x^2 - z^2 = 1 \quad \text{profilo}$$

sia $x_0 > 0$



curvatura del meridiano (che risulterà > 0)
(normale)

$$x^2 - z^2 - 1 = 0$$

$$x = x(z)$$



$$2x x' - 2z = 0$$

$$x' = \frac{z}{x}$$

$$x'^2 + x x'' - 1 = 0$$

$$x^2 \left(\frac{z^2}{x^2} + x x'' - 1 \right) = 0$$

$$z^2 + x^3 x'' - x^2 = 0$$

$$x'' = \frac{x^2 - z^2}{x^3} = \frac{1}{x^3} \quad (x > 0)$$

$$K = \frac{\frac{1}{x^3}}{\left(1 + \frac{z^2}{x^2}\right)^{3/2}}$$

$$\frac{x''}{(1+x'^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{x^3 \frac{(x^2+z^2)^{3/2}}{x^3}} = \frac{1}{x^3 \frac{(x^2+z^2)^{3/2}}{x^3}}$$

$$z^2 = x^2 - 1$$

in P_0 :

$$\frac{1}{(x^2+z^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{(2x_0^2-1)^{3/2}}$$

$$\frac{1}{(2x_0^2-1)^{3/2}}$$

normale a Z in P_0 :

$$f_z^0 = -2z_0$$

$$f_x^0 = 2x_0$$

tangente:

$$f_x^0 (x - x_0) + f_z^0 (z - z_0) = 0$$

normale

$$f_z^0 (x - x_0) - f_x^0 (z - z_0) = 0$$

Calcoliamo la grandnormale

$$h_0: \begin{cases} -2z_0(x-x_0) - 2x_0(z-z_0) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

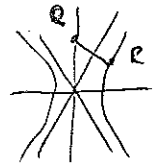
$$P_0: (x_0, z_0)$$

$$z_0 x_0 - x_0(z-z_0) = 0$$

$$Q_0: (0, 2z_0)$$

$$z - z_0 = z_0$$

$$z = 2z_0$$



$$\overline{P_0 Q_0} = \sqrt{x_0^2 + (2z_0 - z_0)^2} = \sqrt{x_0^2 + z_0^2}$$

$$= \sqrt{2x_0^2 - 1}$$

$$x_0^2 - z_0^2 = 1$$

$$z_0^2 = x_0^2 - 1$$

$$R_2 = - \frac{1}{\sqrt{2x_0^2 - 1}}$$

$$K = R_1 R_2 = - \frac{1}{(2x_0^2 - 1)^{3/2} (2x_0^2 - 1)^{1/2}}$$

$$= - \frac{1}{(2x_0^2 - 1)^2}$$

(negativa,
come il
quello che
sia)

in que, passando in coord. iperboliche

$$K = - \frac{1}{(2p^2 - 1)^2}$$

③

$X =$



Nel piano
(top. rel. luv)

geometria

9 luglio

2012

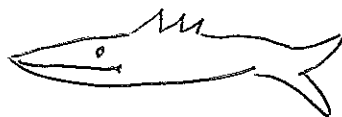
$Y =$



$Z =$



$W =$



compattità e connessione di vari spazi
Quali spazi sono tra loro omeomorfi?

$$Z \approx W \approx \text{hook}$$

e sono entrambi connessi

$X \sim W$: tutti compatti

X, Y connessi ma $X \not\approx Y$

$X \not\approx Y$
 Z
 W

