Università degli studi di Verona
Corsi di laurea in Matematica Applicata, Informatica e Informatica Multimediale
Prova scritta di Matematica di Base — 13 settembre 2007

matricola .... nome .... cognome ....

Corso di Laurea in | Informatica | Informatica Mult. | Matematica Appl. |

Scrivere subito nome, cognome e numero di matricola, indicando la sezione di corso seguita. Le soluzioni vanno trascritte solo su questi fogli, negli spazi appositamente riservati. Si può comunque usare il retro, purché sia chiaro il riferimento.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Tot

1) Si consideri la seguente relazione sull'insieme **Z** dei numeri interi

$$R = \{\,(a,b) \mid a,b \in \mathbf{Z},\ 4 \text{ divide } a^2 - b^2\,\}.$$

Dimostrare che R è una relazione d'equivalenza. Trovare le seguenti classi d'equivalenza: $[0]_R$, $[1]_R$ e $[2]_R$. Quante sono le classi d'equivalenza individuate da R?

2) Mostrare che $R = \{(1,2),(1,3),(2,5),(1,4),(1,5),(1,6),(2,6),(3,4),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6)\}$ è una relazione d'ordine stretto sull'insieme $\{1,2,3,4,5,6\}$. Determinare gli elementi massimali, minimali, eventuali massimo, minimo, maggioranti, minoranti, estremo superiore o estremo inferiore del sottoinsieme $\{2,3,4\}$.

3) Dimostrare per induzione che, per $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{n}{2n+1}$

4) Si risponda alle seguenti domande, motivando le risposte:

(1) Quando un insieme è numerabile?
(2) L'insieme dei numeri interi pari è numerabile? Perché?
(3) L'insieme $\mathbf{R}$ dei numeri reali è numerabile? Perché?

4) Si consideri la funzione $f : A \to B$.

(1) Dire quando f è invertibile

(2) Si assuma che f sia invertibile. Si dimostri che se f^{-1} è suriettiva, allora f è totale.

5) Si consideri la struttura $\mathfrak{N} = (\mathbf{N}, \{\equiv, \prec\}, \{\oplus, \otimes\}, \{\mathit{0}, \mathit{1}\})$, dove $\mathbf{N}$ denota l'insieme dei numeri naturali, $\equiv$ la relazione binaria di essere lo stesso numero, $\prec$, $\oplus$ e $\otimes$ rispettivamente l'ordine, l'addizione e la moltiplicazione tra numeri naturali, *0* e *1* i numeri zero e uno.

Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio adatto alla struttura i cui simboli propri siano i predicati $=, <$; i simboli per funzione $+$, $\times$ e s; i simboli per costante $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$.

Nel linguaggio $\mathcal{L}$ si scriva una formula $\varphi(v_0)$ con le sole variabili libere indicate tale che $\mathfrak{N} \models \varphi(v_0)[a]$ se e solo se a è un numero primo.

6) Dire che cosa significa che una formula φ è soddisfacibile. Dire cosa significa che la formula φ è conseguenza logica di un insieme di formule Φ. Dimostrare che, per ogni scelta delle formule α e β, se $\Phi = \{\neg\beta\}$, allora

$$\Phi \models \to \vee \alpha\beta\alpha$$

7) In un linguaggio in cui c'è un simbolo di relazione binaria Q e un simbolo di funzione unaria f, dire quali delle seguenti successioni di simboli sono formule (F), quali termini (T) e quali nulla (N); in quest'ultimo caso scrivere nell'ultima colonna una breve giustificazione.

	F	T	N	
$\neg Q f f v_1 f v_2 v_3$				
$\to \wedge Q v_0 f v_1 \forall v_1 Q v_1 v_2$				
$Q v_1 v_2 Q v_0 v_1$				
$\wedge \forall v_0 f v_1 Q v_0 v_1$				
$f f f v_3$				
$\neg \vee \forall v_0 Q v_0 f v_1 Q v_0 v_1$				
$\wedge \to \neg \forall v_1 Q v_0 v_1 Q f v_0 f v_1 \neg Q v_3 f v_4$				
$\wedge f v_1 f v_0$				
$\wedge \wedge \forall Q v_0 f v_1 \neg Q v_0 v_1 Q f v_1 f v_2$				

8) Sia $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \leq 0 \\ -e^x & x \geq 0 \end{cases}$$

Dire se f è una funzione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ e, in caso positivo, dire se f è totale, iniettiva, suriettiva.
Esiste l'inversa di f? In caso affermativo, trovare f^{-1}.

9) Siano $f, g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definite da

$$f(x) = \ln(2x^2 - x) \qquad g(x) = e^{\frac{1}{x}}$$

(1) Trovare l'insieme di definizione di f e l'insieme di definizione di g.
(2) Determinare le funzioni composte $f \circ g$ e $g \circ f$, specificandone gli insiemi di definizione.