

* Superficie rigate

discussione generale

Appunti del corso di GEOMETRIA
(Prof. M. Spina)

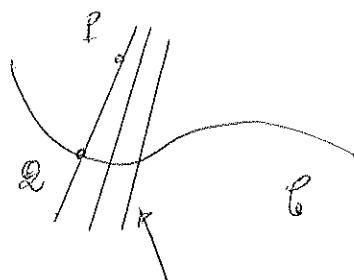
Lezione XII-2

In modo riformale, una rigata R è una superficie generata dal moto continuo di una retta nello spazio. Essa può anche si ottiene assegnando una direttrice $\mathcal{C}: s \mapsto \underline{y}(s) \in \mathbb{R}^3$ (classica) e se utilizziamo la lunghezza d'arco come parametro, con s variabile su un intervallo opportuno I e una famiglia di direzioni $s \mapsto \underline{z}(s) \in \mathbb{R}^3, \|\underline{z}(s)\| = 1$ superficie in questione viene allora descritta allora da:

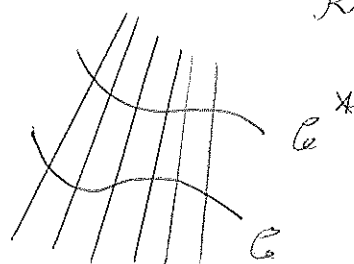
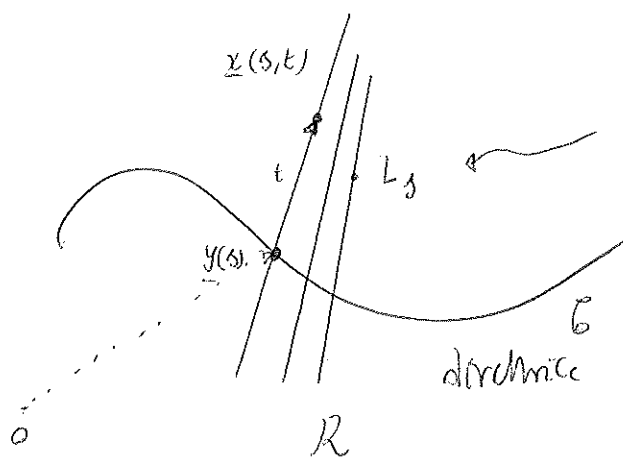
$$(\diamond) \quad \underline{x}(s, t) = \underline{y}(s) + t \underline{z}(s) \quad \begin{matrix} s \in I, t \in \mathbb{R} \\ \|\underline{z}\| = 1 \\ \text{(o intervallo)} \end{matrix}$$

nota zona "classica"

$$P = Q + t \underline{R} \quad \underline{R} \text{ vettore generico}$$



regole (o generatrici) della rigata



è chiaro che una rigata ammette infinite direttrici: è sufficiente considerare una qualsiasi curva che intersechi trasversalmente tutte le generatrici ed esattamente una volta

Nella rappresentazione $(\diamond)$, t diventa l'ascissa curvilinea sul regolo L_s . Ciò è comodo nelle discussioni teoriche, tuttavia, in $(\diamond)$ possono essere parametri qualsiasi, e $\underline{z}$ (o $\underline{R}$) non necessariamente ha versore.

osserviamo subito che i regoli forniscono
 direzioni asintotiche della superficie ($\underline{v} \in T_P \Sigma$,
 $\|\underline{v}\| = 1$), fornisce una direzione asintotica (su P) se

$$\Pi_P(\underline{v}) = 0 = \langle \underline{v}, \underset{\substack{\parallel \\ -dX}}{\delta \underline{v}} \rangle : \text{questo perche'}$$

R_{ii} è nulla lungo un regolo. Da ciò

curvatura
 normale segue subito che $K \leq 0$ (Π è indefinita
 o semidefinita)

ad esempio, se $R_1 < 0 < R_2$ si hanno
 gli orientati dell'indice di Dupin



curvatura
 gaussiana

R è detta sviluppabile se il piano tangente non
varia lungo le generatrici. Per una tale rigata,
 $K \equiv 0$, poiché allora $\underline{N}$ non varia lungo una generatrice,
 e l'immagine dell'applicazione di Gauss è una curva.

Diamo una caratterizzazione analitica della sviluppabilità.

$$P(s,t) = \underset{\substack{\parallel \\ Q(s)}}{P} = \underset{\substack{\parallel \\ R(s)}}{Q} + t \underline{R}$$

$$\underline{P}_s = \underline{Q}_s + t \underline{R}_s$$

$$\frac{\partial \underline{P}}{\partial s}$$

$$\underline{P}_t = \underline{R} \quad \text{Piano tangente di } P.$$

$$\langle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ptto generico}}}{U} - P, \underbrace{(Q_s + t R_s) \times R}_{\parallel Q_s \times R + t R_s \times R} \rangle = 0$$

ptto generico
 del piano tangente

$$Q_s \times R + t R_s \times R$$



teor. di
Charles

il piano tangente risulta indipendente da t ,
 per s fissato se e solo se i vettori
 $\underline{Q}_s$, $\underline{R}_s$ e $\underline{R}$ sono

linearmente dipendenti: infatti

se $t=0$, il piano tangente è generato da
 $\underline{Q}_s$ e $\underline{R}$ (che non dipendono da t).
 (cse. l.m.d.)

Il piano tangente è variabile lungo il regolo
 se e solo se $\underline{R}_s \neq \text{c.a.l. di } \underline{Q}_s \text{ e } \underline{R}$.

in definitiva dare overci, per la sviluppabilità,

$$\begin{vmatrix} \underline{Q}_s & \underline{R}_s & \underline{R} \\ | & | & | \\ | & | & | \end{vmatrix} = 0$$

$$\langle \underline{y}' \times \underline{z}', \underline{z} \rangle = 0$$

* Chasles:

la generatrice
 e il fascio di
 piani tangenti
 per i suoi pt

ovvero

$$\begin{vmatrix} \underline{y}' & \underline{z}' & \underline{z} \\ | & | & | \\ | & | & | \end{vmatrix} = 0$$

$$1 = \frac{d}{ds}$$

se $\underline{R}_s \equiv 0 \Rightarrow \underline{R} = \underline{R}(s) = \underline{R}_0$ costante,

e la rigata (sviluppatibile) è detta cilindrica

(o cilindro generalizzato)

Se le generatrici passano per
 uno stesso punto si ha un cono
 generalizzato

Se $\underline{z} = \underline{t} = \underline{y}'$ si ha

una superficie tangente (a $\mathcal{C}$) $\mathcal{S}$
 (ovviamente sviluppabile), e

e ne otteniamo lo spigolo di regresso



pu avere
 un sup.
 regolare $\rightarrow$

$$\underline{\alpha}_s = \underline{y}' + t \underline{y}''$$

$$\underline{\alpha}_t = \underline{y}' \quad \text{l. ind} \Leftrightarrow t \neq 0$$

$$\underline{y}'' \neq \underline{0}$$

$$(\Rightarrow k \neq 0)$$

↑ (curvature)

cosa accade
 per $t=0$?

utilizzando il teorema di Frenet e la relazione
 rappresentazione canonica di $\mathcal{C}$: $\underline{y} = \underline{y}(s)$, in P_0 ($s=0$)

$$\begin{cases}
 y_1 = s - \frac{\kappa_0^2}{6} s^3 + \dots \\
 y_2 = \frac{\kappa_0}{2} s^2 + \frac{\kappa_0'}{6} s^3 + \dots \\
 y_3 = -\frac{\kappa_0 \tau_0}{6} s^3 + \dots
 \end{cases}$$

sicché, per $\underline{\alpha} = \underline{\alpha}(s, t) = \underline{y}(s) + t \underline{t}(s)$

$$\begin{cases}
 \alpha_1 = s - \frac{\kappa_0^2}{6} s^3 + t \left(1 - \frac{\kappa_0^2}{2} s^2 + \dots \right) \\
 \alpha_2 = \frac{\kappa_0}{2} s^2 + \frac{\kappa_0'}{6} s^3 + t \left(\kappa_0 s + \frac{\kappa_0'}{2} s^2 + \dots \right) \\
 \alpha_3 = -\frac{\kappa_0 \tau_0}{6} s^3 + t \left(-\frac{\kappa_0 \tau_0}{2} s^2 + \dots \right)
 \end{cases}$$

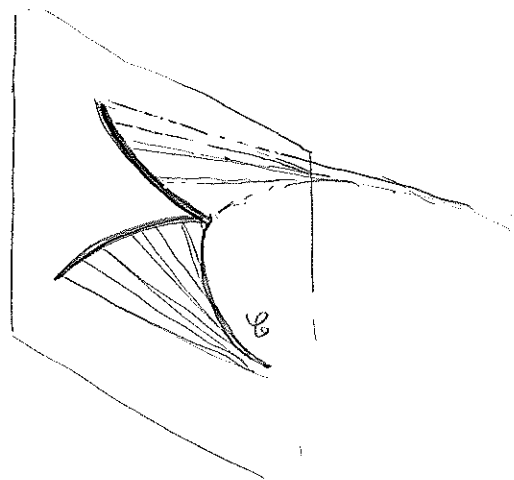
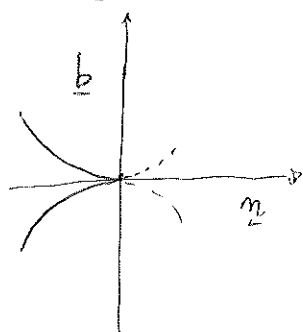
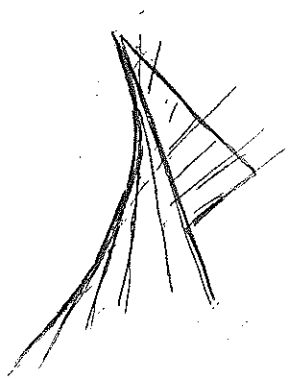
Il piano normale ha eq. $\alpha_1 = 0$

$\Rightarrow t = \dots = -s - \frac{\kappa_0^2}{3} s^3$ e, sostituendo nelle

altre due espressioni si ha, per la curva intersezione

$$\begin{cases}
 \alpha_2 = -\frac{\kappa_0}{2} s^2 \\
 \alpha_3 = +\frac{\kappa_0 \tau_0}{3} s^3
 \end{cases}$$

$\rightarrow$ Singolarità cuspidale



★ classifichiamo le rigate sviluppabili:

partiamo dalla relazione, valida in un opportuno intervallo

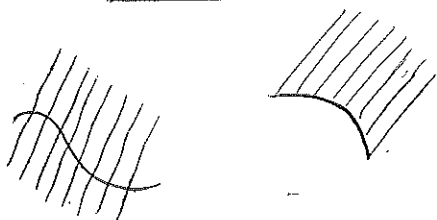
$$c(s) \underline{y}'(s) + d(s) \underline{z}(s) + e(s) \underline{z}'(s) = \underline{0}$$

① Se $c(s) \equiv 0$, $\bar{c} \quad d \underline{z} + e \underline{z}' = \underline{0}$ (in ogni pto, almeno una delle f. d, e , $\bar{c} \neq 0$)

da $\|\underline{z}\| = 1$, si ha $\langle \underline{z}, \underline{z}' \rangle = 0 \Rightarrow d = 0$

$$\Rightarrow \underline{z}' = 0 \Rightarrow \underline{z} = \underline{z}_0 \text{ (cost.)}$$

in tale situazione, si ha una porzione di piano o di un cilindro



② Se $c(s) \neq 0 \quad \forall s$ in un intervallo,

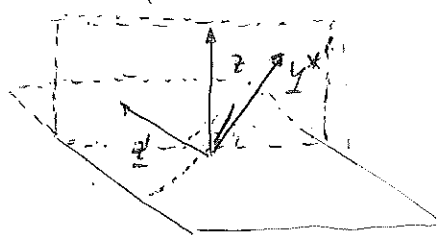
$$\underline{y}' = \alpha \underline{z} + \beta \underline{z}' \quad (\alpha = -\frac{d}{c}, \beta = -\frac{e}{c})$$

poniamo $\underline{y} = \underline{y}^* + \beta \underline{z} \quad (\underline{y}^* = \underline{y} - \beta \underline{z})$

deriviamo rispetto ad s : [nota: $\langle \underline{y} - \underline{y}^*, \underline{z}' \rangle = \beta \langle \underline{z}, \underline{z}' \rangle = 0$]

$$(\underline{y}^*)' = \underline{y}' - \beta \underline{z}' - \beta' \underline{z} = \underbrace{(\alpha - \beta') \underline{z}}_A \Rightarrow \langle (\underline{y}^*)', \underline{z}' \rangle = 0$$

$\parallel$
 $\alpha \underline{z} + \beta \underline{z}'$



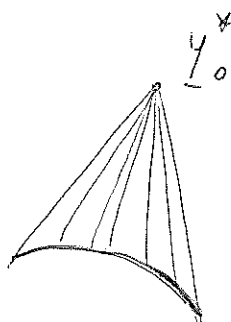
$$\underline{y}^* = \underline{y}^*(s)$$

★ linea di stringimento di R
punti di tale linea:
punti centrali di R

$$2'. \quad A = 0 \quad \underline{y}^{*'} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{y}^* = \underline{y}_0^*$$

linea di stringimento
n'olotta ad un punto

$$\Rightarrow \quad \underline{x} = \underline{y}_0^* + (t+\beta) \underline{z} \quad \Rightarrow \quad \text{cono o pino}$$



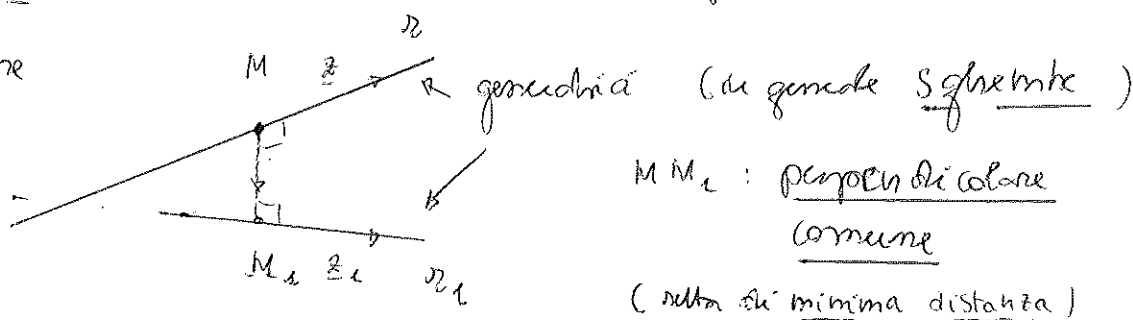
$$2''. \quad \text{se } A \neq 0, \quad \underline{z} = \frac{\underline{y}^{*'}}{A} \quad \Rightarrow$$

$$\underline{x} = \underline{y} + t \underline{z} = \underline{y}^* + \frac{t+\beta}{A} \underline{y}^{*'} \quad \Rightarrow \quad \text{superficie tangente}$$

* la linea di stringimento è definita in generale dalla condizione

$$\langle \underline{y}^{*'}, \underline{z}' \rangle = 0 \quad \text{Interpretiamo geometricamente tale}$$

condizione



Se ora si prendono due generatrici infinitamente prossime

M tenderà ad una posizione limite (pto centrale della generatrice)

da $MM_c \perp \underline{z} \perp \underline{z}_1$ * il luogo di tali pti è la linea di stringimento $\underline{y}^* = \underline{y}^*(t)$

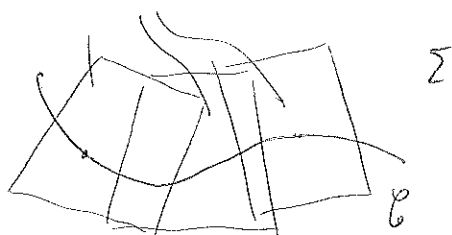
si trova $\frac{MM_c}{\Delta t} \perp \frac{\underline{z} - \underline{z}_1}{\Delta t}$ e, al limite (per $\Delta t \rightarrow 0$, t par. qualsiasi)

$$\langle \underline{y}^{*'}, \underline{z}' \rangle = 0$$

da quanto visto sopra che, in cond.,
la linea di stringimento è generatrice
una geodetica

★ L'involuppo dei piani tangenti ad una curva (non autointerseccante) su una superficie regolare è una rigata sviluppabile [esempi: proiezioni cartografiche...]

piani tangenti



$$P = r(s, v) = \underline{d}(s) + v \frac{\underline{N}(s) \times \underline{N}'(s)}{\|\underline{N}'(s)\|} \quad (\diamond)$$

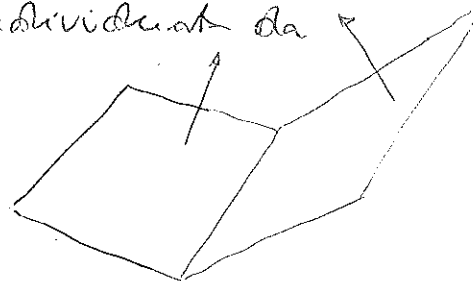
$\neq 0$

significato geometrico:

i piani tangenti $T_{\underline{d}(s)}\Sigma$ e $T_{\underline{d}(s+\Delta s)}\Sigma$ si intersecano

lungo una retta la cui direzione è individuata da

$$(*) \quad \frac{\underline{N}(s) \times \underline{N}(s + \Delta s)}{\Delta s}$$



che, al limite per $\Delta s \rightarrow 0$,

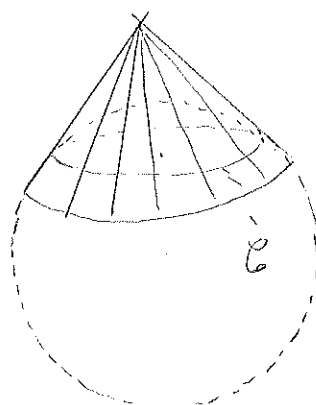
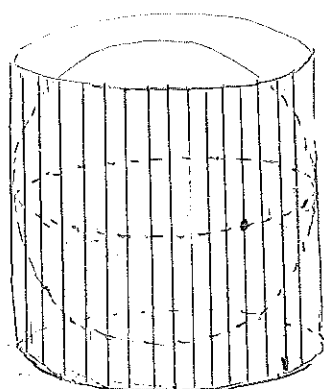
$$\text{avverte di } (*) = \underline{N}(s) \times \left[\frac{\underline{N}(s + \Delta s) - \underline{N}(s)}{\Delta s} \right],$$

condurre subito a $(\diamond)$.

Per costruzione

la superficie è sviluppabile

poiché il piano tangente non varia lungo i regoli.



notare

$$(\underline{u} \times \underline{v}) \times \underline{w} =$$

$$\langle \underline{u}, \underline{w} \rangle \underline{v} -$$

$$\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle \underline{u}$$

richiamo ↑

$$\underline{r}_u \times \underline{r}_v = \underline{d}' \times \left(\frac{\underline{N} \times \underline{N}'}{\|\underline{N}'\|} \right) = \frac{\langle \underline{N}', \underline{d}' \rangle}{\|\underline{N}'\|} = - \frac{\langle \underline{N}, \underline{d}'' \rangle}{\|\underline{N}'\|} \underline{N}$$

+ perpendic. $\neq 0$

$$= - \frac{K_m \underline{N}}{\|\underline{N}'\|} \neq 0$$

su $\mathcal{B}$ (e dunque in un intorno opportuno).
(regolarità)

★ Teorema Sia Σ una superficie (parametrica)
 piana ($K=0$) priva di pt. p. neri

(i.e. in cui $K_1=K_2=0$) , Allora Σ è una superficie
 (negata) sviluppabile (i.e. il piano tangente è
 costante lungo i regoli : viceversa, una tale superficie ha
 necessariamente $K=0$, poiché l'immagine
 della sua mappa di Gauss è una curva

(a sua volta, una
 tale superficie è
 esattamente un
cono, un cilindro,
 o una superficie
tangente v. oltre

Dici. Possiamo $K_1=0$, $K_2 \neq 0$.

Parametricamente trovate le linee di
curvatura . Poiché $F=f=0$

da $S(r_u) = -N_u = 0$ segue

che N è costante lungo le curve C_{02}
 v. cost.

(in particolare, ma ciò è ovvio a priori,
 l'immagine dell'applicazione di Gauss è
 di fatto una curva).

Dimostriamo che queste curve sono rette.

È intanto $e = II(r_u) = 0$
 $\frac{\partial}{\partial s} \neq 0$ (poiché $K_2 \neq 0$)

Usando la prima equazione di C-M si ha

$$0 = \underbrace{e_v}_{=0} - \underbrace{f_u}_{=0} = \underbrace{e}_{=0} \Gamma_{12}^1 + \underbrace{f}_{=0} (\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{22}^1) - \frac{\partial}{\partial s} \Gamma_{11}^2 = -\frac{\partial}{\partial s} \Gamma_{11}^2$$

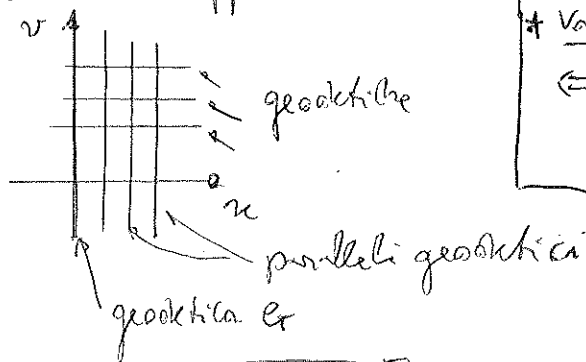
$$\Rightarrow \Gamma_{11}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma_{uu} = \Gamma_{uu}^1 \gamma_u + \dots + 0$$

$$\Rightarrow \gamma_{uu} \parallel \gamma_u \quad \Rightarrow \quad \text{le curve "u" sono } \underline{\text{rette}}$$

★ Teorema Una (porzione) di superficie (liscia) Σ è isometrica ad una porzione di piano se e solo se è sviluppabile

Dim. ($\Rightarrow$) Se Σ è isometrica ad una porzione di piano, deve averci, in virtù del Theorema Egregium, $K=0$.
Ma ciò implica che Σ è sviluppabile, (modificando opportunamente il ragionamento del teorema precedente).

($\Leftarrow$) Se Σ è sviluppabile, introduciamo coordinate geodetiche:



* Variante: Σ è sviluppabile
 $\Leftrightarrow K \equiv 0 \Leftrightarrow \Sigma$ è loc. isometrica ad un piano
(Minding)

$$\Rightarrow ds^2 = du^2 + g_{22} dv^2$$

$$\text{e } g_{22}(0, v) = l \quad (*)$$

ma $u = l$, d'arco su e_r

Ma, poiché e_r è una geodetica

$$0 = (K_g)_{u=0} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial}{\partial u} (\log \sqrt{g_{22}}) = ?$$

↑ curvatura geodetica

$$(**) \quad \left. \frac{\partial g_{22}}{\partial u} \right|_{u=0} = 0$$

Ma, dato che $K=0$,

$$0 = K = - \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial^2 \sqrt{g_{22}}}{\partial u^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \sqrt{g_{22}}}{\partial u^2} = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{g_{22}} = C_1(u)u + C_2(u) \quad ; \text{ da } (*) \text{ e } C_2 = l$$

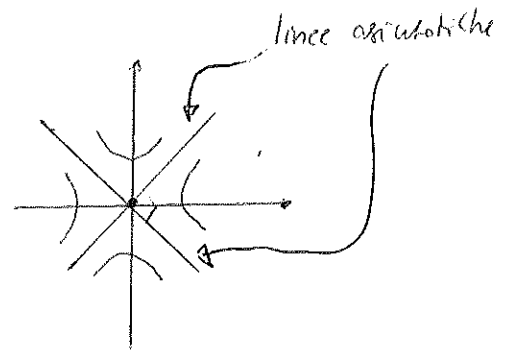
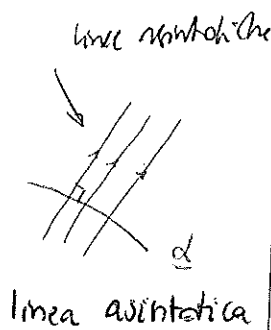
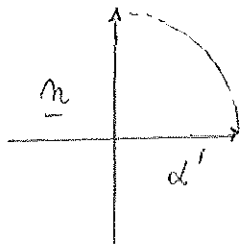
$$\text{e da } (**) \text{ e } C_1 = 0 \Rightarrow ds^2 = du^2 + dv^2$$

si conclude.

★ L' unica superficie rigata minima è l'elicoide :

(t) non prima

$$\underline{x}(s, t) = \underline{x}(s) + t \underline{n}(s)$$



$R_n = 0$ su una linea asintotica

$$\Rightarrow \underline{b} = \underline{W} \quad (\text{primo osculatore} = \text{primo tangente})$$

Vogliamo far vedere

che $\underline{x} = \underline{x}(s)$ è un'elica cilindrica

su $\underline{x} = \underline{x}(s)$

per una sup. minima
 $R_1 + R_2 = 0$

$\Rightarrow$ ind. di Dupin
iperboli equilateri

★ linee asintotiche
ortogonali

★ regole individuate dalle normali principali

$$\underline{x}_s = \underline{x}' + t \underline{n}'$$

$$\underline{x}_t = \underline{n}$$

$$\underline{x}_{ss} = \underline{x}'' + t \underline{n}''$$

$$\underline{x}_{st} = \underline{n}' = \underline{x}_{ts}$$

$$\underline{x}_{tt} = 0$$

$$\& R(\underline{x}) \neq 0, \quad \underline{e}$$

curvatura
di $\underline{x}$

($\underline{n}$ è definito...)

$$e = \langle \underline{x}_{ss}, \underline{W} \rangle = 0$$

$$g = \langle \underline{x}_{tt}, \underline{W} \rangle = 0$$

$$f = \langle \underline{n}', \underline{b} \rangle = -\tau \quad (\text{Frénet})$$

⚠ $e = 0$ implica, vt

$$\langle R \underline{n} + t \underline{n}'', \underline{b} \rangle = 0 \Rightarrow$$

$$\langle \underline{n}'', \underline{b} \rangle = 0$$

$$\text{ma } 0 = \langle \underline{n}'', \underline{b} \rangle = \langle \underline{n}', \underline{b} \rangle' - \langle \underline{n}', \underline{b}' \rangle$$

$$= \langle -Rt - \tau \underline{b}, \underline{b} \rangle' - \underbrace{\langle \underline{n}', \tau \underline{n} \rangle}_0 = -\tau'$$

$$\Rightarrow \tau = \tau(\underline{x}) = \text{cost}$$

Inverso: caso particolare del teorema di Beltrami-Enneper

Inoltre $\langle \underline{\alpha}_s, \underline{\alpha}_s \rangle = E = 1 + t^2 \|\underline{n}'\|^2$
 $= 1 + t^2 (k^2 + \tau^2) = 2kt$

$\underline{\alpha}_s = \underline{t} + t \underline{n}'$
 $= \underline{t} + t(-kt - \tau \underline{b})$
 $= (1-kt) \underline{t} - \tau t \underline{b}$

$= (t=0) = 1$
 su $\underline{d}$

$(1-kt)^2 + \tau^2 t^2$
 $= 1 - 2kt + k^2 t^2 + \tau^2 t^2$

$\langle \underline{\alpha}_t, \underline{\alpha}_t \rangle = G = 1$ $F = \langle \underline{\alpha}_s, \underline{\alpha}_t \rangle = 0$

vale in generale
per una curva
asintotica

Si ha perciò, su $\underline{d} = \underline{\alpha}(s)$

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -\tau^2$$

↑
 (Beltrami-Enneper)

costanti [indicatrice di Dupin costante]

$= -k_1^2 = -k_2^2$

Si osserva che $K(\underline{\alpha}) = K_g(\underline{\alpha})$ (curv. geodetica)

variante:

oppure, utilizzando $K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\left(\frac{Ev}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{Eu}{\sqrt{EG}} \right)_u \right)$

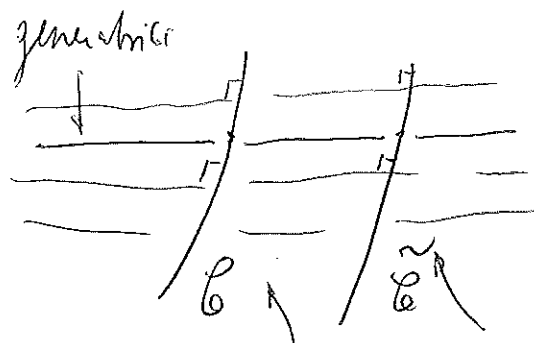
Qui $u=s, v=t$ $E = 1 - 2kt + (k^2 + \tau^2)t^2$ $G = 1$, $F = 0$

$K = -\frac{1}{2\sqrt{E}} \left(\frac{Et}{\sqrt{E}} \right)_t = -\frac{1}{2\sqrt{E}} (+2\sqrt{E})_t = -\frac{1}{\sqrt{E}} (\sqrt{E})_{tt}$

in $t=0$ è $K = -(\sqrt{E})_{tt} \Big|_{t=0} =$ (direttamente o tramite una serie binomiale)

$K = -\tau^2$ (su $\underline{d}$)

Prossimamente:
 Vogliamo mostrare che $\underline{\alpha} = \underline{\alpha}(s)$ ha
 curvatura costante, e ciò basterà per concludere



Consideriamo

$\tilde{\alpha}$, pure asintotica,
 che avrà la stessa
 normale principale di $\underline{\alpha}$.

(Caratterizziamo tali curve

(Problema di Bertrand)

curve "compagne" nel senso di Bertrand

osserviamo ora che data $\tilde{\alpha} = \underline{\alpha} + \xi(s) \underline{n}(s)$

$\tilde{\alpha}$ avrà la stessa normale principale : solo
 se $\xi = \xi(s) = \text{cost}$ ($\neq 0$), in virtù di

$$\underline{\tilde{\alpha}}' = \underline{\alpha}' + \xi' \underline{n} + \xi \underline{n}' = \underline{\alpha}' + \xi' \underline{n} + \xi (-\kappa \underline{t} - \tau \underline{b})$$

$\perp$ $\perp$ $\parallel$ $\Downarrow \xi' = 0$
 $\underline{n}$ $\underline{n}$ $\underline{t}$

★ (curva "compagna" di Bertrand)

(Anche $\tilde{\alpha}$ sarà
 una direttrice della
 rigata

inoltre

$$\frac{d\tilde{\alpha}}{d\tilde{s}} = \frac{ds}{d\tilde{s}} \left[1 - \overset{\text{cost}}{\xi} \kappa \right] \underline{t} - \xi \tau \frac{ds}{d\tilde{s}} \underline{b}$$

↑
 l. d'arco su $\tilde{\alpha}$

★ derivando rispetto a $\tilde{s}$, notiamo che $\frac{d\kappa}{d\tilde{s}}$ e $\frac{d\tau}{d\tilde{s}}$

sono $\parallel \underline{n}$

e pertanto, affinché $\frac{d^2 \tilde{\alpha}}{ds^2}$ sia $\parallel \underline{n}$,

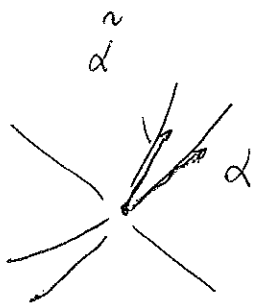
deve essere ($\text{dtrr} \approx \xi = \cos t$)

$$(1 - \xi \kappa) \frac{ds}{d\tilde{s}} = \cos t.$$

$$(-\xi \tau) \frac{ds}{d\tilde{s}} = \cos t.$$

$$\Rightarrow \frac{1 - \xi \kappa}{-\xi \tau} = \cos t. \quad (\text{teor. di Bertrand})$$

★ Ma τ e ξ sono costanti (risp a s) $\Rightarrow$
 anche κ lo è, e così $\frac{ds}{d\tilde{s}}$

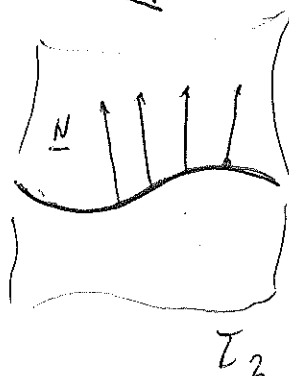
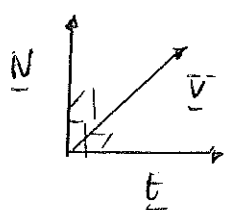
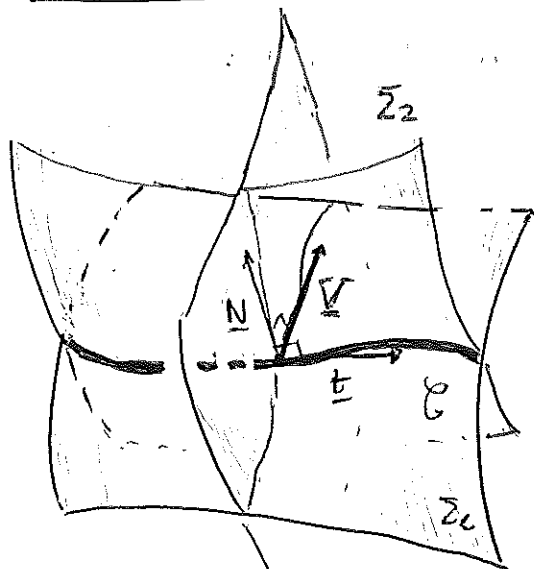


Il primo tangente varia
 lungo una generatrice

in definitiva si ottiene una porzione di elicoide.
 (non è una superficie sviluppabile)

* Teorema (Dupin)

Due superficie appartenenti ad un sistema triplemente ortogonale si incontrano lungo linee di curvatura



Dim. Con riferimento alla figura, consideriamo la variazione di $\underline{N}$ lungo $\mathcal{C}$ ($\underline{N}$ v. normale di Σ_2). Esso rimane tangente a Σ_2 , sicché

$$\langle \underline{N}', \underline{V} \rangle = 0 \text{ lungo } \mathcal{C}$$

($\underline{V}$ v. normale di Σ_2)

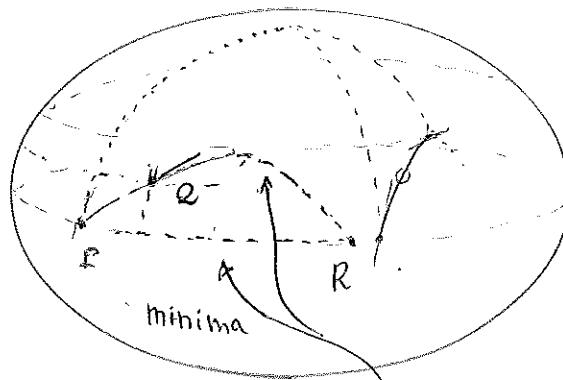
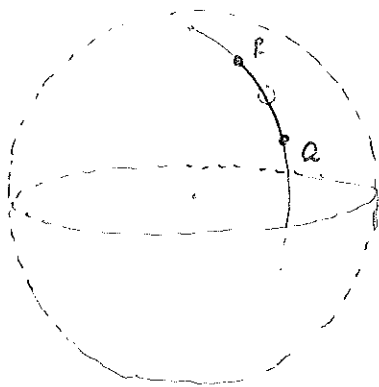
Ma allora, da $\langle \underline{N}', \underline{V} \rangle = 0$ e da $\langle \underline{N}', \underline{N} \rangle = 0$

si ha subito $\underline{N}' \parallel \underline{t}$, e concludiamo

in virtù del teorema di Rodrigues. $\square$

★★ Teorema di Hopf-Rinow

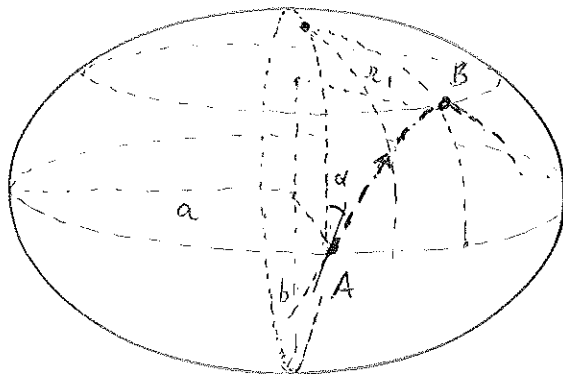
Su una superficie completa (i.e. ogni geodetica si estende indefinitamente (eventualmente percorrendo uno stesso sostegno), dati due pti P e Q , essi sono sempre congiunti da una geodetica di lunghezza minima



[Se rimuovo un pto il teorema diviene falso...]

geodetiche

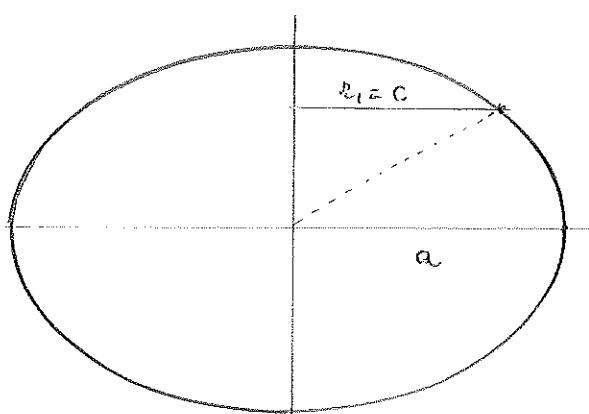
* geodetiche sull'ellissoide di rotazione
(considerazioni qualitative)



* Clairaut: $r \sin \alpha = C$ per una geodetica
 $\uparrow$
 raggio del parallelo

Sia $r_0 = a$ $a \sin \alpha = C$ $|C| \leq a$

in B: $\sin \alpha = \sin \frac{\pi}{2} = +1$



$C = r_1$

la geodetica uscente da A,
 di azimuth α ,

diviene tangente in B

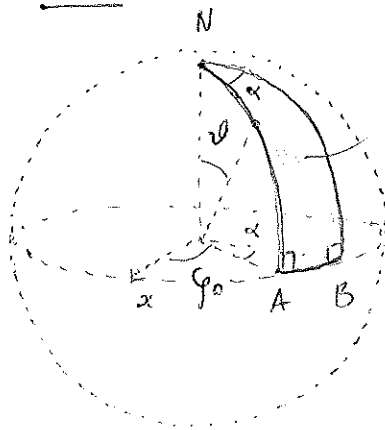
al parallel "nord" di
 raggio $r_1 = a \sin \alpha$.

XII-33

Nelle applicazioni A e B sono fissi. L'azimuth
 varia pto per pto in accordo con la relazione di Clairaut.
 Una linea lossodromica (angolo costante) non è geodetica.

$\sin \alpha = \frac{r_1}{a}$ dà la direzione della geodetica di lunghezza
minima congiungente A e B. (cf. Hopf-Rinow)

★ Esercizi vari



★ Calcolare in più modi

l'area del emisferio S e S^2
di ampiezza α

Sol. ① Diretta. $A(S) = \iint_{\tilde{S}} \sqrt{EG-F^2} d\varphi d\psi$ (coord. sferiche)
dominio nello spazio dei parametri corrispondente a S

$F=0$ $\sqrt{EG} = \sin \varphi$

$$A(S) = \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+\alpha} \left(\int_0^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi \right) d\psi = \alpha \cdot (-\cos \varphi) \Big|_0^{\pi/2} = \alpha$$

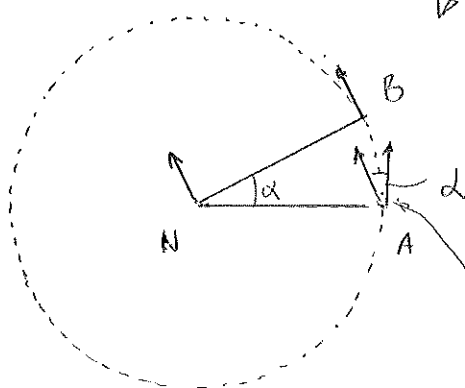
In particolare, se S è una emisfera, $A(S) = 2\pi$.

② Il triangolo sferico ABN è geodetico.

dalla formula di Gauss $\alpha + \beta + \gamma - \pi = \iint_D K d\sigma$
(e dal fatto che $K_{S^2} = +1$)

Si trae $\alpha + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \pi = A(S) \Rightarrow A(S) = \alpha$

③ Proiezione stereografica dal polo sud



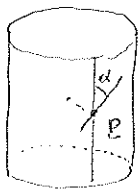
(è
conforme $\Rightarrow$
conserva
gli
angoli)

trasporto parallelo
lungo i lati di ABN

Dal lemma di
Lini-Civita (e da
 $K_{S^2} = +1$) si trova

$$A(S) = \alpha$$

* Geodetiche sul cilindro circolare retto



Si conclude immediatamente che i meridiani (e ciò è vero sempre nelle sup. di rotazione) e i paralleli

sono geodetiche. Se una geodetica uscente da un

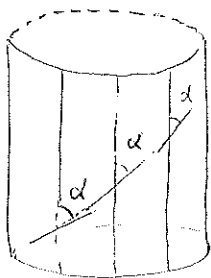
punto generico P sulla superficie forma col meridiano

passante per quel punto un angolo α (v. figura), in virtù

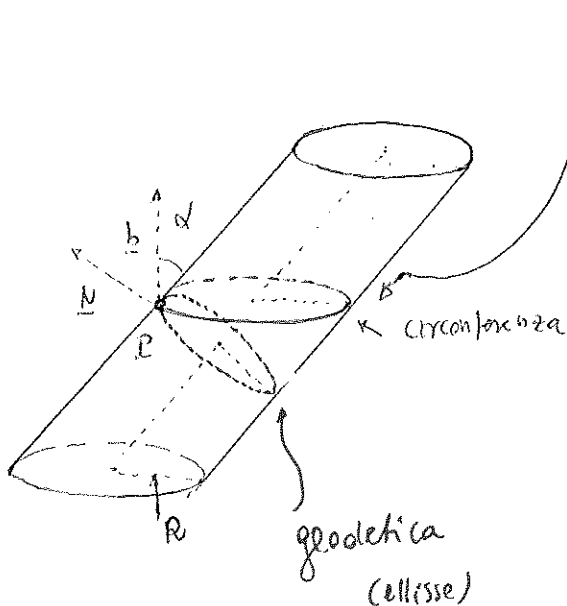
del teorema di Clairaut, essa intersecherà tutti i meridiani

formando con questi lo stesso angolo α .

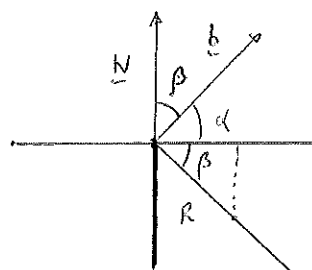
Da ciò si conclude che deve essere un'elica.



Cilindro circolare obliquo



non è una geodetica



$$R_g(P) = \frac{1}{R} \cos \beta = \frac{1}{R} \sin \alpha$$

★ Dimostrare che una triangolazione qualsiasi della sfera possiede un numero pari di triangoli.

Sol. $V - E + F = 2$ (Euler - Poincaré).

$$n_0 - n_1 + n_2 = 2$$

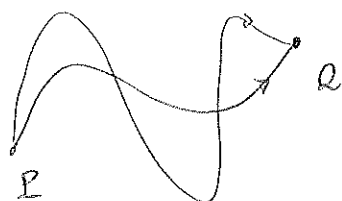
$$n_1 = \frac{3n_2}{2}$$

$$n_0 - \frac{3n_2}{2} + n_2 = 2$$

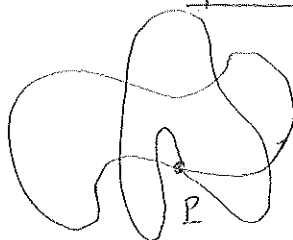
$$n_0 - \frac{n_2}{2} = 2 \quad \Rightarrow \quad n_2 = 2(n_0 - 2)$$

★ Dimostrare che se su Σ il trasporto parallelo tra due pti qualsiasi non dipende dalla curva che li congiunge, allora $K_\Sigma \equiv 0$.

Sol. (schermo di dim)



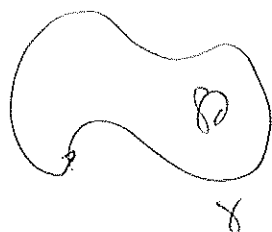
★ la proprietà enunciata equivale alla seguente:



il trasporto parallelo lungo un circuito chiuso

è banale (è l'identità).

Per il teorema di Poincaré si avrebbe $\iint_D K d\sigma = 0$



$\forall \gamma$ (e dunque $\forall D$, $\partial D = \gamma$).
Se $K(P_0) \neq 0$, si avrebbe, per continuità
 $K(P) \neq 0$ in un intorno di P_0 , ed

risulterebbe D tale che $\iint_D K d\sigma \neq 0$, il che è assurdo. XII-36

* Angolo una curva (liscia) γ tale che $R \equiv 0$ ma $\tau \neq 0$?

Sol. $R \equiv 0 \Rightarrow \underline{r}'' \equiv 0 \quad \left(\dot{\quad} = \frac{d}{ds} \right)$

$\Rightarrow \underline{r} = \underline{r}_0 + \dot{\quad} \underline{t}_0 \quad , \quad \underline{r}_0, \underline{t}_0 \text{ costanti} \quad , \quad \|\underline{t}_0\| = 1 \quad ,$

i.e. γ è una retta. Ovviamente $\tau \equiv 0$.

Non c'è contraddizione con il teorema fondamentale
 perché da esso si richiede $R > 0$ (curve biregolari)

★ Teorema sia $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ differentiabile
 $\cap \mathbb{R}^3$

e $a \in f(U)$ un valore regolare di f

[vale a dire, x_0 tale che $f(x_0) = a$,

e $df|_{x_0}$ suriettivo (i.e. rango max = 1)]

Allora $f^{-1}(a)$ è una superficie regolare in $\mathbb{R}^3$

"La superficie di livello di un valore regolare è regolare"

Dim. Sia $p = (x_0, y_0, z_0) \in f^{-1}(a)$.

Per fissare le idee, supponiamo che $f_z(p) \neq 0$

Sia $F(x, y, z) = (x, y, f(x, y, z))$

$$dF_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ f_x & f_y & f_z \end{pmatrix} \quad \det(dF_p) = f_z \neq 0$$

Per il teorema della funzione inversa

$\exists$ intorno $V \ni p$ e $W \ni F(p)$ tali che

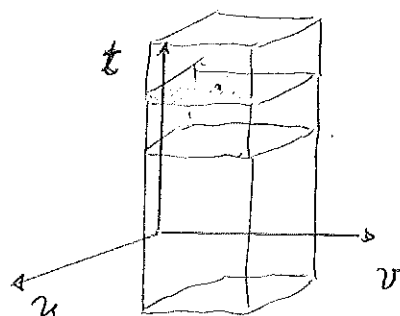
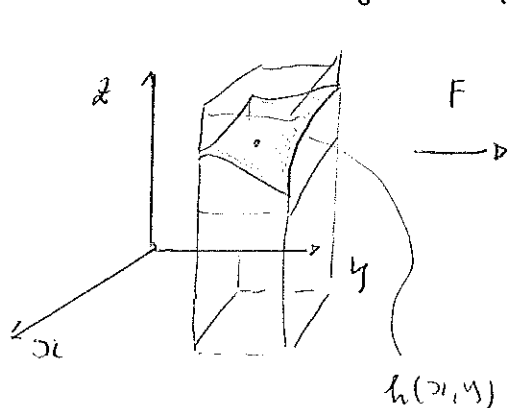
$F: V \rightarrow W$ è invertibile e

$F^{-1}: W \rightarrow V$ è differenziabile

i.e.

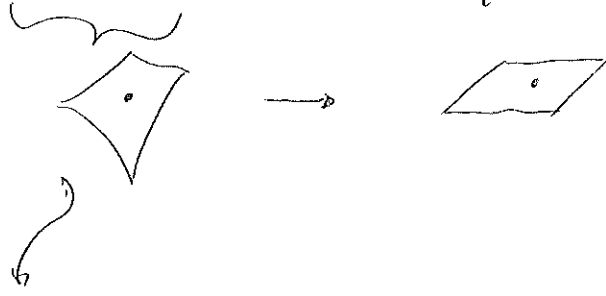
$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = g(u, v, t) \end{cases}$$

$$(u, v, t) \in W^{-1}$$



$$z = g(u, v, t) \\ \equiv h(x, y)$$

$$F(f^{-1}(a) \cap V) = W \cap \{(u, v, t) \mid t = a\}$$

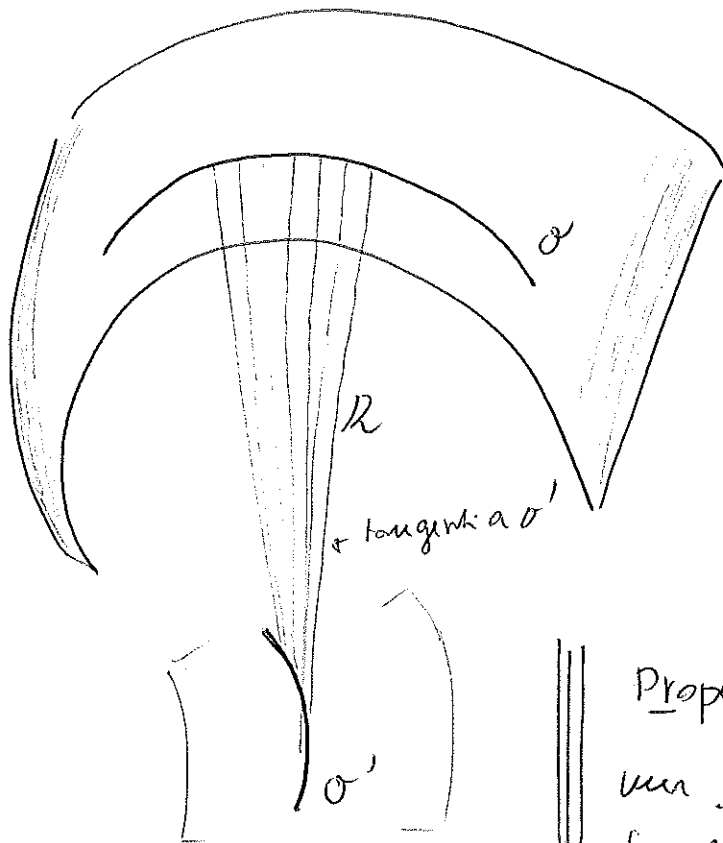


è un intorno coordinato di p [un punto è una superficie regolare]

In virtù dell'abbondanza di $p \in f^{-1}(a)$, si
conclude che $f^{-1}(a)$ è una superficie regolare

* Superficie focali

Complementi



σ : linea di curvatura

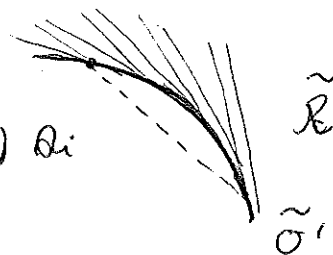
σ' : evoluta di σ

Proposizione : σ' è una geodetica della superficie focale R (normale a σ)



Dim. La rigata R costituita dalle normali a σ è sviluppabile. R è isometrica ad una regione piana $\tilde{R}$ loc. convessa. La curva

$\tilde{\sigma}'$ è una geodetica (bordo, locale) di $\tilde{R}$



Pertanto σ' è una geodetica di R (localmente).

*** geodetiche sull'ellissoide binniale

(Jacobi)

(Cenne)

sono parte di
un sistema
involvente
ortogonale

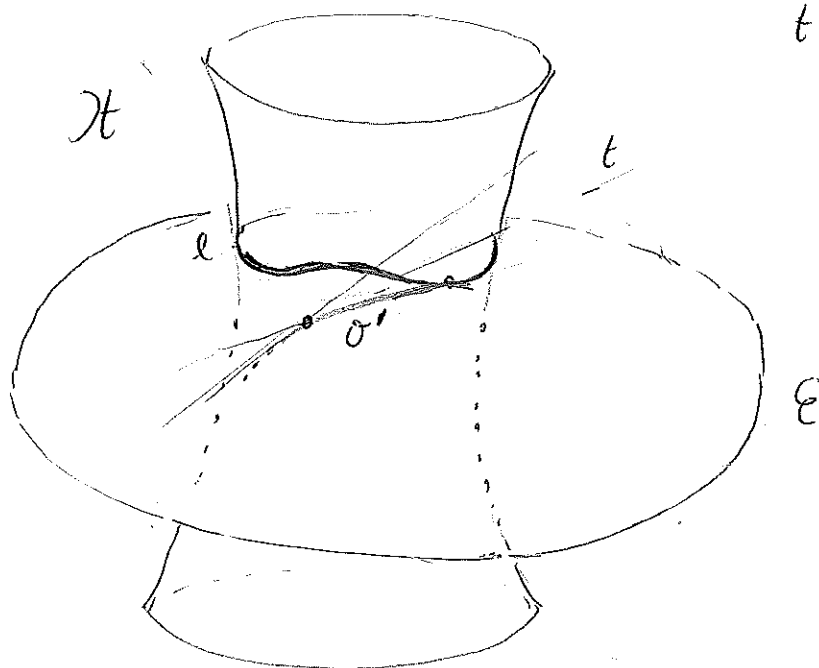
(ellissoide, ip. ad una falda,
ip. a due falde...)

$\mathcal{E}$ $\mathcal{H}$

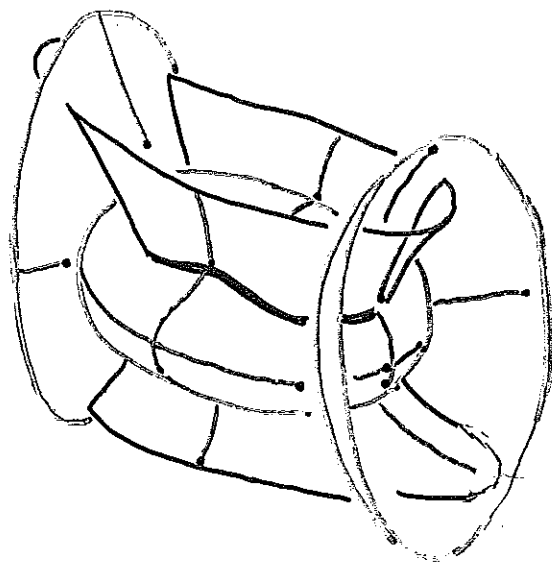
ellissoide
binniale
ip. ad una
falda
confocali

l : linea di curvatura

t : tangente a ad $\mathcal{E}$
e ad $\mathcal{H}$



$\mathcal{H}$ ed $\mathcal{E}$ si possono vedere come le due
falde della superficie focale di una terza superficie
le tangenti comuni ad $\mathcal{H}$ ed $\mathcal{E}$ sono le normali
a questa superficie. Per quanto visto precedentemente,
 O' è una geodetica (v. pag. precedente).



XII - 42

Un'equazione

◊ Dimostriamo, per via geometrica, che
meridiani e paralleli (su una sup. di rotazione)
sono linee di curvatura

★ Meridiani:

da $\|\underline{N}\| = 1$

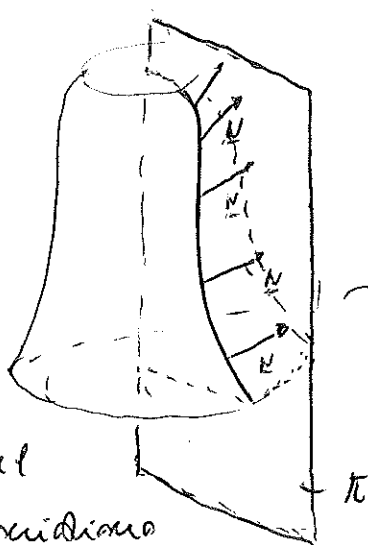
e dal fatto che

$\underline{N} \parallel \pi$,

segue subito che, sul

$\underline{N}' \parallel \underline{\alpha}'$

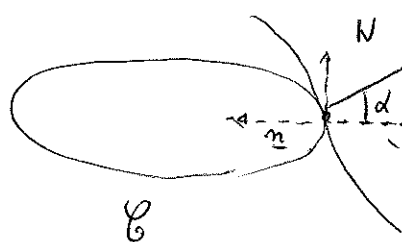
meridiano
 $\underline{\alpha} = \underline{\alpha}(s)$



$\underline{\alpha} = \underline{\alpha}(s)$

e si conclude di avere la base di Rodrigues.

★ paralleli



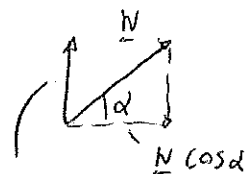
α costante lungo γ .

$\underline{n}$ (norm. principale)

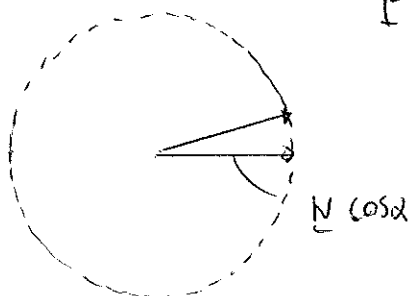
verifichiamo che,

lungo un parallelo γ , $\underline{N}' \parallel \underline{\beta}'$

$\underline{\beta} = \underline{\beta}(s)$



non varia
lungo γ

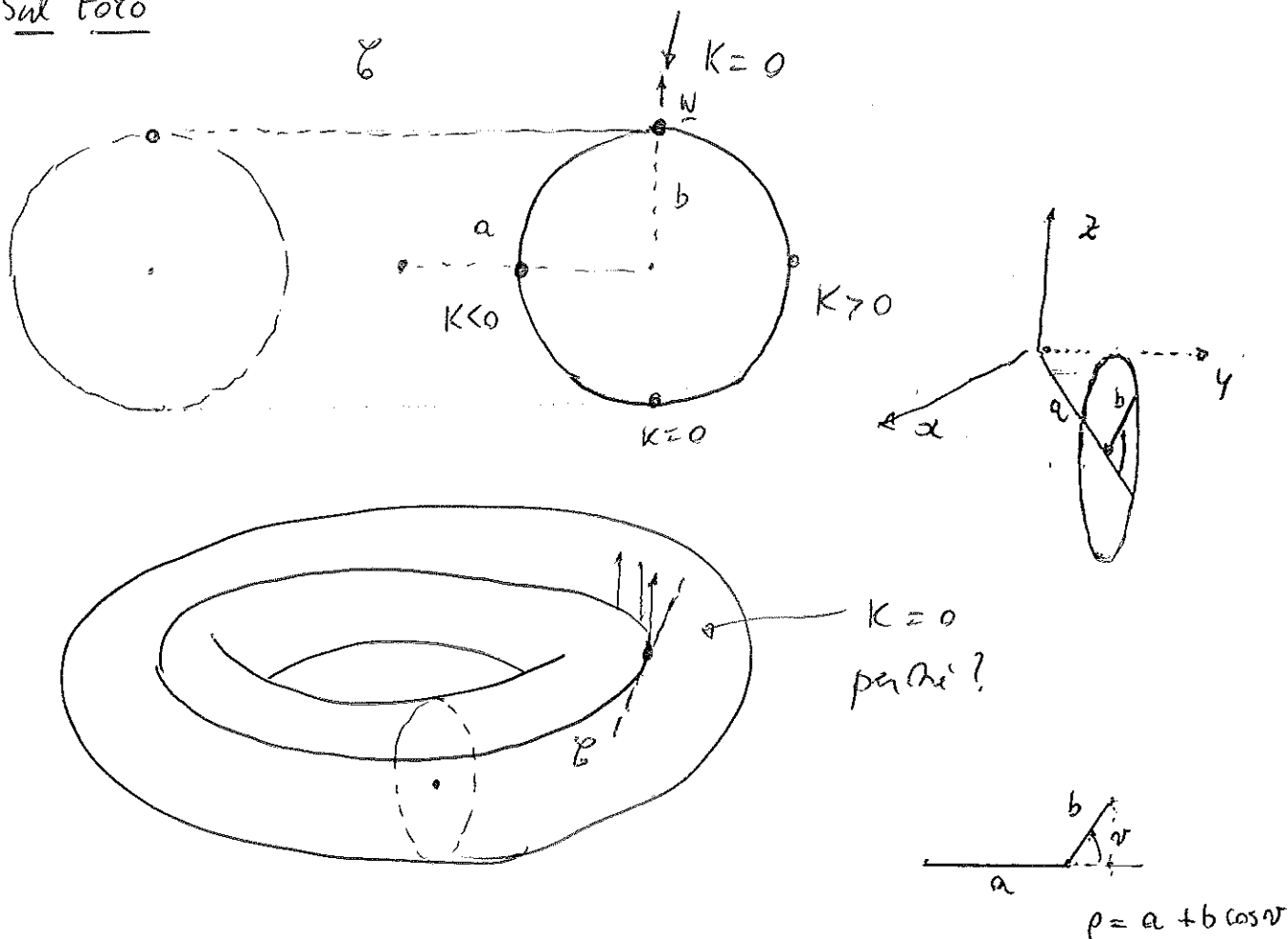


$(\underline{N} \cos \alpha)' = \gamma \underline{\beta}'$

$\cos \alpha \underline{N}' = \gamma \underline{\beta}' \Rightarrow \underline{N}' = \gamma \underline{\beta}'$

e si conclude di avere la base di Rodrigues

◇ Sul toro



$\mathcal{C}$ è una linea di curvatura (tutta parallela)

$$\Rightarrow \underline{N}' = \lambda \underline{\alpha}' \quad (\text{Rodrigues})$$

Ma $T_P \mathcal{C}$ non varia per $P \in \mathcal{C}$ (vedi fig.)

$\Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow$ una delle curvatures principali è nulla

$\Rightarrow K = 0$. Si noti anche che $R_n(\mathcal{C}) \equiv 0$

e si conclude anche in base a Meusnier.

Quanto vale l'altra curv. principale? R: $\frac{1}{b}$ (facile...)

◇ ◇ ◇

parametrizzazione

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = \begin{pmatrix} (a + b \cos v) \cos u \\ (a + b \cos v) \sin u \\ b \sin v \end{pmatrix}$$

$u \in [0, 2\pi)$
 $v \in [0, 2\pi)$

forma canonica:



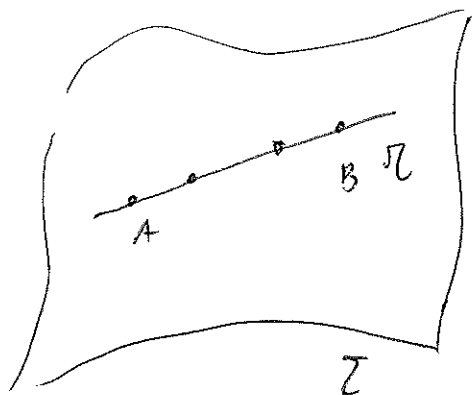
$$(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = b^2$$

$$x^2 + y^2 - 2a\sqrt{x^2 + y^2} + z^2 = b^2 + a^2 = 0$$

$$4a^2(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - b^2)^2 \quad \text{XII-44}$$

◊ Se τ contiene una retta, quest'ultima è una geodetica

Dim.



$$\text{se } \underline{r} = \underline{r}_0 + t \underline{a}, \quad \text{e} \quad \|\underline{a}\| = 1$$

$$\underline{r}' = \underline{a}$$

$$\text{e } \underline{r}' \text{ è } \underline{\text{parallelo}} \quad (\because \underline{r}'' = (\underline{r}')' = 0)$$

lungo π

$\Downarrow$ a fortiori

$$\frac{\nabla}{dt} \underline{r}' = \underline{0}$$

oppure: la linea più breve tra A, B su τ , $A \in \pi$, $B \in \pi$ è, nello spazio, la retta π , che giace su τ , e si conclude.

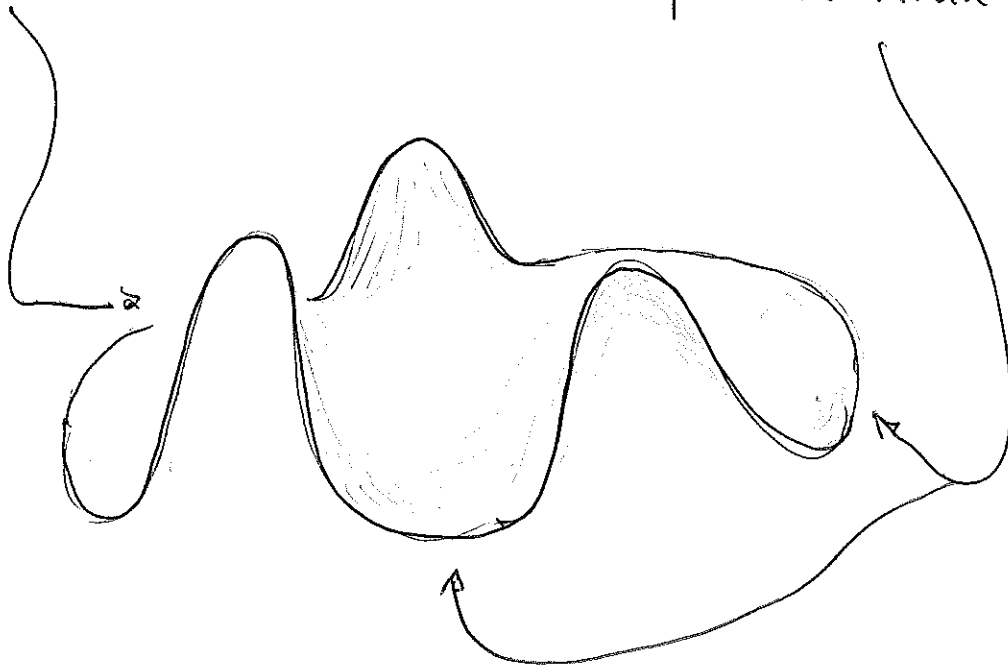
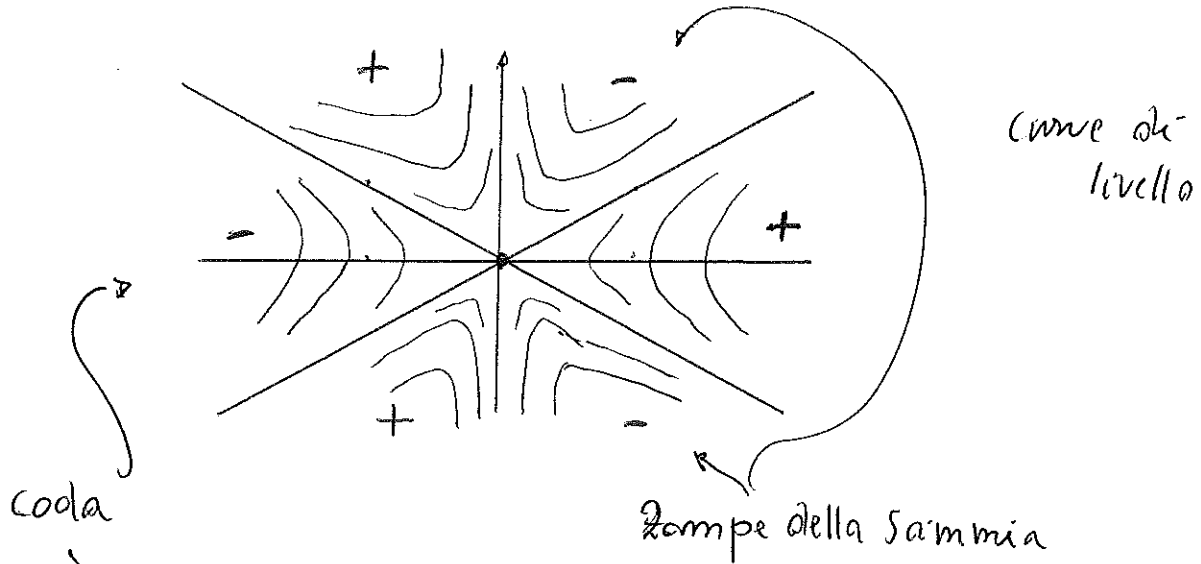
$$\text{oppure: } R_g(\pi) \equiv 0 \quad (\text{poiché già } R(\pi) \equiv 0).$$

◇ La sella di Sammia

$$z = x^3 - 3xy^2 = \operatorname{Re}(z^3) \quad z = x + iy$$

$$\parallel$$

$$x(x^2 - 3y^2) = x(x - \sqrt{3}y)(x + \sqrt{3}y)$$



$P: (0, 0, 0)$ pto plano

$$H_P(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow K = 0$$

$$K_1 = K_2 = 0$$

Chiuso dallo sviluppo di Taylor