Capitolo 2

Sistemi di unità di misura

In questo Capitolo studieremo come le grandezze fisiche vengono organizzate in *Sistemi di unità di misura*. Ci occuperemo principalmente del *Sistema Internazionale* (S.I.), ma vedremo anche altri sistemi che vengono talora utilizzati in campi specialistici della Fisica. Introdurremo infine le *dimensioni* delle grandezze fisiche e accenneremo alle principali applicazioni dell'*analisi dimensionale*.

2.1 – Grandezze fondamentali e derivate

Come abbiamo visto al § 1.3, alla base di ogni operazione di misura sta la possibilità che alcune grandezze (le grandezze quantitative o metrizzabili) siano misurate in modo diretto per confronto con un campione $\mathcal{U}$, che definisce l'*unità di misura*.

Nella descrizione del mondo fisico vengono introdotte molte grandezze fisiche, metrizzabili e non, collegate tra loro da relazioni analitiche. In linea di principio, è del tutto lecito scegliere per ogni grandezza un'unità di misura arbitraria. Ciò porta però in genere all'introduzione di scomodi fattori di proporzionalità, oltre alla necessità di definire e mantenere un grande numero di campioni di unità di misura.

Esempio: Consideriamo tre grandezze, la lunghezza ℓ, il tempo t e la velocità v, che indicheremo provvisoriamente con i simboli $\mathcal{G}_\ell$, $\mathcal{G}_t$ e $\mathcal{G}_v$. Per un moto uniforme la velocità è definita come

$$\mathcal{G}_v \;=\; \Delta\mathcal{G}_\ell / \Delta\mathcal{G}_t .$$

In linea di principio è possibile scegliere in modo indipendente le unità di misura $\mathcal{U}$ per le tre grandezze. Una scelta possibile potrebbe essere:

per la lunghezza ℓ,	$\mathcal{U}_\ell$ = raggio terrestre;
per il tempo t,	$\mathcal{U}_t$ = periodo di rotazione terrestre;
per la velocità v,	$\mathcal{U}_v$ = velocità tangenziale all'Equatore

Passiamo ora dalle grandezze $\mathcal{G}$ alle loro misure X usando l'eq. (1.3.1): $\mathcal{G} = X\mathcal{U}$. La velocità è per definizione il rapporto tra uno spazio ed un intervallo di tempo. Con la scelta indipendente delle unità di misura fatta sopra, la misura della velocità sarà legata alle misure di spazio e tempo dalla relazione

$$X_v \;=\; (1/2\pi)\, X_\ell / X_t .$$

Infatti, un punto fisso sull'Equatore si muove con velocità unitaria $\mathcal{G}_v = 1\,\mathcal{U}_v$, percorrendo la distanza $\mathcal{G}_\ell = 2\pi\mathcal{U}_\ell$ nel tempo unitario $\mathcal{G}_t = 1\,\mathcal{U}_t$.

Nell'esempio precedente, l'unità di velocità è legata alle unità di spazio e di tempo mediante il fattore $(1/2\pi)$. Per evitare, o almeno ridurre, la necessità di fattori moltiplicativi diversi da 1 nelle formule che collegano le unità di misura di grandezze fisiche diverse, risulta conveniente scegliere in modo arbitrario l'unità di misura solo per un numero molto piccolo di grandezze. Per le altre grandezze l'unità di misura verrà definita in modo univoco mediante relazioni analitiche.

Esempio: Scegliamo come unità di misura arbitrarie: il *metro* (m) per le lunghezze ℓ e il *secondo* (s) per i tempi t; allora l'unità di velocità v sarà il *metro al secondo* (m/s), definito dalla relazione $v = \ell/t$.

Si chiamano:
- **Grandezze fondamentali** (in inglese *base quantities*) le grandezze per le quali l'unità di misura è definita in modo arbitrario.
- **Grandezze derivate** (in inglese *derived quantities*) le grandezze per le quali l'unità di misura è definita tramite le relazioni analitiche che le collegano alle grandezze fondamentali.

Costruire un **SISTEMA DI UNITÀ DI MISURA** significa essenzialmente:
- scegliere una determinata ripartizione delle grandezze fisiche tra fondamentali e derivate;
- definire le unità di misura e gli eventuali campioni delle grandezze fondamentali.

Il primo tentativo di costruire un sistema di unità di misura per la meccanica fu avviato dal governo rivoluzionario in Francia nel 1790 e condusse all'introduzione per legge del *Sistema Metrico Decimale* nel 1795. In seguito, vari altri sistemi di unità di misura sono stati introdotti, alcuni dei quali tuttora in uso nella scienza, nella tecnica, nelle attività commerciali. Le crescenti necessità di standardizzazione legate all'incremento degli scambi commerciali e allo sviluppo della ricerca scientifica hanno portato, a partire dal 1895 (*Convenzione del metro*), alla stipula di varie convenzioni internazionali per l'unificazione dei sistemi. Negli ultimi anni si è realizzata la convergenza verso un ben definito sistema, il *Sistema Internazionale* (S.I.), di cui parleremo in dettaglio nel § 2.3.

Un sistema di unità di misura è detto:

- *completo* se tutte le grandezze fisiche si possono ricavare dalle grandezze fondamentali tramite relazioni analitiche;
- *coerente* se le relazioni analitiche che definiscono le unità delle grandezze derivate non contengono fattori di proporzionalità diversi da 1;
- *decimale* se multipli e sottomultipli delle unità di misura sono tutti potenze di 10.

2.2 – Campioni per le unità di misura

Le unità di misura delle grandezze fondamentali sono realizzate mediante *campioni* (in inglese *measurement standards*). Esistono campioni di unità di misura anche per molte grandezze derivate. Le proprietà principali che caratterizzano un campione sono:

a) *precisione;*
b) *invariabilità* (nel tempo);
c) *accessibilità,* ossia possibilità di accesso al campione per chiunque ne abbia necessità;
d) *riproducibilità*, ossia possibilità di riprodurre il campione qualora dovesse andare distrutto.

Si distinguono due tipi fondamentali di campioni:

a) **Campioni naturali**, la cui definizione fa riferimento a fenomeni naturali.
b) **Campioni artificiali**, costruiti appositamente.

Esempio: Ricordiamo l'evoluzione nel tempo del campione di metro. Il metro venne introdotto nel 1795 come la frazione $(1/10^7)$ dell'arco di meridiano terrestre dal polo all'equatore (campione naturale). Nel 1799 venne costruito un campione artificiale costituito da un regolo in platino, il *metro legale di Fortin* (precisione 10÷20 μm). Nel 1889 si introdusse un nuovo campione artificiale, costituito da una sbarra in lega 90% platino + 10% iridio (precisione 0.2 μm). Nel 1960 si tornò ad un campione naturale, il *metro ottico*, definito come un multiplo della lunghezza d'onda della luce rosso-arancione emessa dall'isotopo 86 del kripton (precisione 0.01 μm). Nel 1983 si è infine introdotta l'attuale definizione del metro basata sul prodotto della velocità della luce per un intervallo di tempo.

I campioni naturali assicurano la riproducibilità e l'invariabilità, anche se talora a scapito dell'accessibilità.

I campioni di maggior precisione per una data grandezza sono detti *campioni primari* (in inglese *primary standards*). Vengono in genere realizzati anche campioni più accessibili, seppure meno precisi, detti *campioni secondari* (*secondary standards*). I campioni secondari vengono periodicamente calibrati per confronto con i campioni primari. I campioni di uso corrente, detti *campioni di lavoro* (*working standards*) vengono a loro volta calibrati per confronto con i campioni secondari.

2.3 – Il Sistema Internazionale

Il Sistema Internazionale di unità di misura (S.I.) è stato introdotto nel 1960 dalla XI Conferenza Generale dei Pesi e Misure e perfezionato dalle Conferenze successive. Il S.I. è oggetto di direttive della Comunità Europea fin dal 1971, ed è stato legalmente adottato in Italia nel 1982.
Il Sistema Internazionale è:
- completo
- coerente
- decimale (tranne che per la misura degli intervalli di tempo)

Il S.I. opera una precisa ripartizione tra *grandezze fondamentali* e *grandezze derivate* ed assegna ad ogni grandezza un'unità di misura (vedi Appendici B.1.a e B.1.b).
Il S.I. codifica anche le norme di scrittura dei nomi e dei simboli delle grandezze fisiche nonché l'uso dei prefissi moltiplicativi secondo multipli di 1000 (vedi Appendici B.1.d e B.1.e).

A) Grandezze fondamentali

Il Sistema Internazionale (S.I.) è basato su 7 grandezze fondamentali, di cui riportiamo unità di misura e relativi simboli nella seguente tabella:

Grandezza	*Unità*	*Simbolo*
intervallo di tempo	secondo	s
lunghezza	metro	m
massa	chilogrammo	kg
quantità di materia	mole	mol
temperatura	kelvin	K
intensità di corrente elettrica	ampere	A
intensità luminosa	candela	cd

Vediamo ora in dettaglio come sono definite le unità di misura delle grandezze fondamentali del S.I.

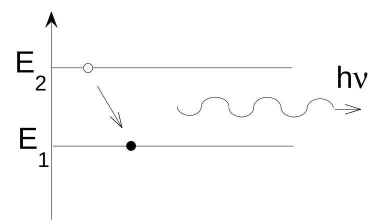
Intervallo di tempo

Il **secondo** *(s) è la durata di* 9 192 631 770 *oscillazioni della radiazione emessa dall'atomo di cesio 133 (^{133}Cs) nella transizione tra i due livelli energetici iperfini (F=4, M=0) e (F=3, M=0) dello stato fondamentale* $^2S_{1/2}$.

Il ^{133}Cs ha un nucleo formato da 55 protoni e 78 neutroni. Lo *stato fondamentale* è lo stato in cui un atomo ha la configurazione elettronica di minima energia. La suddivisione dello stato fondamentale in *livelli iperfini* è dovuta all'interazione degli elettroni con il momento magnetico del nucleo; la differenza in energia ΔE tra i livelli iperfini è molto piccola rispetto alla differenza in energia tra i livelli principali dell'atomo.

Durante la transizione tra due livelli di energia (Fig. 2.1) l'atomo emette onde elettromagnetiche di frequenza $\nu = \Delta E/h$, corrispondente ad una lunghezza d'onda $\lambda = c/\nu$ e un periodo $T = 1/\nu$; h è la costante di Planck e c è la velocità delle onde elettromagnetiche nel vuoto (sono due costanti fondamentali della Fisica, i cui valori numerici sono riportati in Appendice D.2). La radiazione emessa dal ^{133}Cs durante la transizione in questione ha frequenza $\nu \simeq 10^{10}$ Hz e lunghezza d'onda $\lambda \simeq 3$ cm (regione delle microonde). Il secondo è pertanto definito come un multiplo intero del periodo $T = 1/\nu$ della radiazione emessa dal cesio.
Il campione primario del secondo è costituito da un *orologio al cesio*. Un orologio al cesio può commettere un errore massimo relativo di 1×10^{-12}, equivalente a 1 μs ogni 12 giorni.

Fig. 2.1 – Rappresentazione schematica della transizione di un atomo da un livello di energia più alta ad un livello di energia più bassa, con conseguente emissione di radiazione elettromagnetica.



Lunghezza

Il **metro** *(m) è definito come la distanza percorsa nel vuoto dalla luce nell'intervallo di tempo di* 1/299 792 458 *secondi.*

La velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche nel vuoto (*velocità della luce*) è una costante fondamentale della Fisica (Appendice D.2). Con la definizione del metro introdotta nel 1983, il suo valore è assunto come esatto (cioè privo di incertezza) e immodificabile: $c = 299\,792\,458$ m/s. Per la realizzazione pratica del campione di metro, è raccomandato l'uso della radiazione monocromatica emessa da un laser ad elio-neon nella regione del rosso visibile (lunghezza d'onda $\lambda = 633$ nm).

Massa

Il **chilogrammo** *(kg) è la massa del prototipo di platino-iridio conservato nel padiglione del B.I.P.M. (Bureau International des Poids et Mesures) di Breteuil, a Sèvres.*

È l'unico campione artificiale del SI. Si tratta di un cilindro di platino-iridio di 38 mm di diametro e di altezza, custodito in una tripla teca sotto vuoto insieme ad altre 6 copie di riscontro.
La precisione relativa del campione è dell'ordine di 10^{-9}.
È allo studio la possibilità di introdurre un campione naturale di massa basato su proprietà atomiche.

Quantità di materia

La **mole** *(mol) è la quantità di sostanza di un sistema che contiene tante entità elementari quanti sono gli atomi in 0.012* kg *di carbonio 12 (^{12}C).*

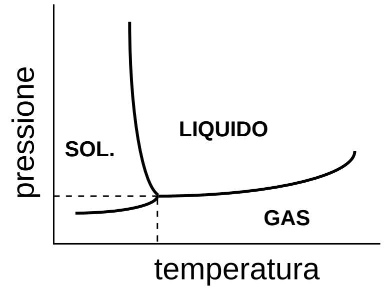
Il ^{12}C è l'isotopo più abbondante del carbonio: il nucleo atomico è composto da 6 protoni e 6 neutroni.
Quando si usa la mole è necessario specificare la natura delle entità elementari cui ci si riferisce: n mol di atomi, opp. di molecole, opp. di ioni, etc. Il numero di entità elementari che costituiscono 1 mole è detto *numero di Avogadro*; il suo valore è $N_0 \simeq 6.022 \times 10^{23}$ (Appendice D.2).

Temperatura

Il **kelvin** *è la frazione 1/273.16 della temperatura termodinamica del punto triplo dell'acqua.*

Si chiama *punto triplo* di una sostanza lo stato termodinamico in cui sono in equilibrio le tre fasi liquida, solida e gassosa (Fig. 2.2). Il punto triplo dell'acqua si verifica ad una pressione di 610 Pa e (per definizione) ad una temperatura di 273.16 K, pari a 0.01°C. La precisione relativa della determinazione della temperatura del punto triplo dell'acqua è di circa 1×10^{-6}.

Fig. 2.2 – Andamento schematico del diagramma di stato dell'acqua nel piano temperatura-pressione. Ad ogni punto del piano, cioè ad ogni coppia di valori (T, p), corrisponde uno stato termodinamico dell'acqua. Le tre regioni del piano corrispondono ai tre stati di aggregazione: solido, liquido, gas. Le linee rappresentano stati in cui coesistono all'equilibrio due stati di aggregazione. La loro intesrezione è il *punto triplo*.



Si ricordi che la temperatura è una grandezza non metrizzabile, per la quale non è possibile definire un'operazione di addizione. La temperatura non si può quindi misurare direttamente addizionando repliche di un campione di unità di misura.
La *temperatura termodinamica assoluta* è definita in relazione al rendimento di un ciclo termodinamico ideale, il ciclo di Carnot; la sua misurazione è ricondotta alla misurazione di un rapporto tra quantità di calore, o più in generale di un rapporto tra valori di una grandezza metrizzabile.

Intensità di corrente elettrica

*L'***ampere** *è la corrente elettrica costante che, fluendo in due conduttori rettilinei, paralleli, indefinitamente lunghi, di sezione circolare trascurabile, posti a distanza di 1 m nel vuoto, determina tra essi una forza di 2×10*$^{-7}$ N *per metro di conduttore.*

L'ampere è definito con riferimento alla legge che dà la forza di interazione F tra due conduttori paralleli di lunghezza ℓ posti a distanza d e percorsi rispettivamente dalle correnti I_1 e I_2:

$$F = 2k_m \, I_1 \, I_2 \, \frac{\ell}{d},$$

imponendo alla costante k_m il valore numerico 10^{-7}. In genere k_m viene espresso in funzione della permeabilità magnetica del vuoto μ_0: $k_m = \mu_0/4\pi$.
Secondo la definizione S.I., l'ampere può essere realizzato mediante un elettrodinamometro, cioè uno strumento che misura la forza tra due conduttori percorsi da corrente. Nella pratica si preferisce far ricorso alla legge di Ohm $I = V/R$ e realizzare l'unità di corrente (ampere) come rapporto tra le unità di differenza di potenziale (volt) e di resistenza (ohm). I campioni del volt e dell'ohm sono oggi realizzati ricorrendo a due fenomeni quantistici, rispettivamente l'effetto Josephson e l'effetto Hall quantistico.

Intensità luminosa

La **candela** *è l'intensità luminosa, in una data direzione, di una sorgente che emette una radiazione monocromatica di frequenza 540×10*^{12} *Hz e la cui intensità energetica in tale direzione è di (1/683) W/sr.*

L'intensità luminosa è la grandezza fondamentale della *fotometria*, cioè della disciplina che si occupa dello studio della radiazione elettromagnetica nel campo di sensibilità dell'occhio umano (luce visibile). L'intensità luminosa corrisponde al flusso di energia irraggiata da una sorgente nell'angolo solido unitario, misurata in base alla sensazione visiva, cioè pesata dalla curva media di sensibilità dell'occhio umano (Fig. 2.3). Le misure fotometriche, che si eseguono mediante strumenti appositamente costruiti, detti fotometri, sono rilevanti nei campi dell'astronomia, della fotografia, delle tecniche di illuminazione.

B) Grandezze derivate

Le unità di misura delle grandezze derivate si ottengono mediante semplici operazioni aritmetiche a partire dalle unità di misura delle grandezze fondamentali. Non esistono fattori di conversione diversi da uno (il S.I. è coerente). Le unità di misura di alcune grandezze derivate sono dotate di nome proprio.
Le unità di misura di alcune grandezze derivate dotate di nome proprio sono elencate in Appendice B.1.b.

Esempio 1: L'*accelerazione* è una grandezza derivata. Per definizione l'accelerazione è il rapporto tra una

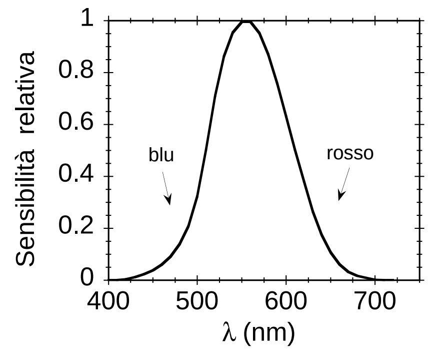


Fig. 2.3 – Curva della sensibilità media dell'occhio umano in funzione della lunghezza d'onda della radiazione elettromagnetica. La curva definisce la regione della *luce visibile.* Il massimo della sensibilità corrisponde ad una lunghezza d'onda $\lambda = 556\times10^{-9}$ m, pari ad una frequenza $\nu = 540\times10^{12}$ Hz.

velocità ed un tempo, cioè tra uno spazio ed il quadrato di un tempo. La sua unità di misura, priva di nome proprio, è 1 m s^{-2}.

Esempio 2: L'*angolo piano* e l'*angolo solido* sono grandezze derivate, definite rispettivamente come il rapporto tra due lunghezze e il rapporto tra una superficie e il quadrato di una lunghezza. Le loro unità di misura sono dotate di nome proprio, rispettivamente *radiante* e *steradiante.* Il *radiante* (rad) è l'angolo piano che sottende, su una circonferenza centrata nel suo vertice, un arco di lunghezza uguale al raggio. Lo *steradiante* (sr) è l'angolo solido che sottende, su una sfera centrata nel suo vertice, una calotta sferica di area uguale al quadrato del raggio.

Esempio 3: La *forza* F è una grandezza derivata. Attraverso la legge fondamentale della dinamica, $F = ma$, l'unità di misura della forza è ricondotta alle unità di misura della massa e dell'accelerazione. L'unità di misura della forza è dotata di nome proprio, il *newton* (N), ed è definita come 1 N = 1 Kg m s^{-2}.

Può valer la pena, a questo punto, tornare sul problema della ripartizione delle grandezze fisiche in fondamentali e derivate. La scelta del numero di grandezze da considerare fondamentali, in linea di principio puramente convenzionale, è guidata da criteri di praticità e semplicità, e talora anche da motivi storici.
Come abbiamo visto, il S.I. considera 3 grandezze fondamentali per la meccanica (spazio, tempo e massa). Sarebbe possibile scegliere 4 grandezze fondamentali anziché 3. Ad esempio, a spazio, tempo e massa si potrebbe aggiungere come fondamentale la forza, con un'unità di misura definita arbitrariamente. La legge fondamentale della dinamica dovrebbe essere espressa come $F = kma$, con l'aggiunta cioè di una costante moltiplicativa dimensionale k.
Alternativamente, si potrebbero anche ridurre a 2 le grandezze fondamentali della meccanica. Ad esempio, consideriamo la legge della gravitazione universale $ma = GmM/r^2$ (dove si è posto $F = ma$). Se si impone che la costante gravitazionale G sia adimensionale e assuma il valore 1, si ottiene un vincolo tra le tre grandezze spazio, tempo e massa, per cui la scelta arbitraria delle unità di misura di due delle tre grandezze implica la determinazione dell'unità di misura della terza.
Queste ultime considerazioni, di scarsa rilevanza pratica se ci si limita alla meccanica, sono invece importanti nel campo dell'elettromagnetismo, per comprendere la differenza tra il S.I. e i sistemi c.g.s., come vedremo al § 2.4.A.

C) Enti normativi

Le ricerche sul continuo aggiornamento del S.I. sono affidate all'*Ufficio Internazionale dei Pesi e Misure* (B.I.P.M., *Bureau International des Poids et Mesures*) con sede a Sèvres, presso Parigi. Il B.I.P.M. è controllato dalla *Conferenza Generale dei Pesi e Misure* (C.G.P.M.), che si riunisce di regola ogni 4 anni. Le decisioni della C.G.P.M. vengono rese operative dal *Comitato Internazionale dei Pesi e Misure* (C.I.P.M.).
Un ente internazionale che svolge un ruolo notevole per l'unificazione di norme e procedure in campo scientifico e tecnologico, incluse le norme relative al Sistema Internazionale, è l'*International Organisation for*

Standardisation (I.S.O.). Negli Stati Uniti d'America un ruolo analogo è svolto dal *National Instruments Standard Techniques* (N.I.S.T.), noto in passato come *National Bureau of Standards* (N.B.S.).
In Italia la divulgazione e il controllo dell'applicazione del S.I. sono affidati all' *Ente Nazionale per l'Unificazione* (U.N.I.). I campioni nazionali delle unità di misura sono realizzati in parte presso l'*Istituto Elettrotecnico Nazionale Galileo Ferraris*, in parte presso l'*Istituto di Metrologia Gustavo Colonnetti*, entrambi con sede a Torino.
Gli indirizzi Internet dei principali enti normativi sono riportati in Appendice E.3.

2.4 – Altri sistemi di unità di misura

In aggiunta al S.I., sono tuttora in uso altri sistemi di unità di misura. Ci limiteremo in questo paragrafo ad alcuni aspetti rilevanti per le applicazioni fisiche.

A) Sistemi c.g.s.

Nei sistemi c.g.s. le unità fondamentali della meccanica sono il centimetro, il grammo e il secondo. Per quanto riguarda la meccanica, quindi, le differenze tra S.I. e c.g.s. si limitano a fattori potenze di 10 nei valori delle grandezze fondamentali e derivate, nonché ai nomi delle unità di misura (si veda in proposito l'Appendice B.4).

La differenza sostanziale tra i sistemi c.g.s. e il Sistema Internazionale riguarda le grandezze elettromagnetiche. Mentre il S.I. introduce una grandezza fondamentale per l'elettromagnetismo (l'intensità di corrente), nei sistemi c.g.s. le grandezze elettromagnetiche sono tutte derivate da quelle meccaniche. Storicamente si sono sviluppati vari sistemi c.g.s., a seconda della legge utilizzata per definire le grandezze elettromagnetiche in funzione delle grandezze meccaniche.

Per chiarire le differenze tra i diversi sistemi, consideriamo le tre leggi: di Coulomb, dell'interazione elettrodinamica tra correnti e dell'induzione elettromagnetica:

$$F_e = K_e \frac{q_1 q_2}{r^2}; \qquad F_m = 2\,K_m\,I_1 I_2 \frac{\ell}{d}; \qquad f = -K_i \frac{d\Phi_B}{dt};$$

le prime due leggi collegano grandezze elettriche (carica elettrica q o corrente elettrica I) a grandezze meccaniche (forze F e lunghezze r, ℓ, d), la terza collega una grandezza elettrica (la forza elettromotrice f) ad una grandezza magnetica (il flusso Φ del campo d'induzione $\vec{B}$). Le costanti K_e e K_m devono in ogni caso essere legate dalla relazione $K_e/K_m = c^2$, dove c è la velocità della luce nel vuoto.

Il **Sistema Internazionale** usa la legge dell'interazione elettrodinamica per definire l'intensità di corrente come grandezza fondamentale; le tre costanti K_e, K_m, K_i valgono rispettivamente

$$K_e = 1/(4\pi\epsilon_0); \qquad K_m = \mu_0/(4\pi); \qquad K_i = 1.$$

Il **Sistema c.g.s. elettrostatico** ricava l'unità di carica elettrica (lo *statcoulomb*) dalla legge di Coulomb imponendo che la costante K_e sia adimensionale ed abbia il valore 1; le tre costanti K_e, K_m, K_i valgono rispettivamente

$$K_e = 1; \qquad K_m = 1/c^2; \qquad K_i = 1.$$

Il **Sistema c.g.s. elettromagnetico** ricava l'unità di corrente (l' *abampere*) dalla legge dell'interazione elettrodinamica imponendo che la costante K_m sia adimensionale ed abbia il valore 1. L'unità di carica del sistema cgs elettromagnetico (l'*abcoulomb*) è diversa da quella del sistema cgs elettrostatico per un fattore c. Le tre costanti K_e, K_m, K_i valgono rispettivamente

$$K_e = c^2; \qquad K_m = 1; \qquad K_i = 1.$$

Il **Sistema c.g.s. simmetrizzato di Gauss** adotta le unità del sistema c.g.s. elettrostatico per le grandezze elettriche, le unità del sistema c.g.s. elettromagnetico per le grandezze magnetiche. In alcune equazioni che collegano grandezze elettriche e magnetiche compare come coefficiente la velocità della luce nel vuoto, c. Le tre costanti K_e, K_m, K_i valgono rispettivamente

$$K_e = 1; \qquad K_m = 1/c^2; \qquad K_i = 1/c.$$

Il sistema cgs simmetrizzato è frequentemente usato nel campo della fisica teorica. Non trova invece applicazione in campo sperimentale.

Esempio: Nel modello di Bohr per l'atomo di idrogeno, lo stato fondamentale, cioè lo stato di minima energia, corrisponde ad un'orbita circolare dell'elettrone, di raggio a_0. Il valore approssimato di a_0 è espresso rispettivamente, nel S.I. e nel sistema di Gauss, come

$$a_0 = 4\pi\epsilon_0 \frac{\hbar}{m_e e^2} = 5.29 \times 10^{-11}\text{m} \quad \text{(S.I.)} \qquad a_0 = \frac{\hbar}{m_e e^2} = 5.29 \times 10^{-9}\text{cm} \quad \text{(Gauss)}$$

dove con il simbolo $\hbar$ (*acca tagliato*) si indica la costante di Planck divisa per 2π: $\hbar = h/2\pi$; m_e ed e sono rispettivamente la massa e la carica elettrica dell'elettrone (i valori numerici delle costanti sono riportati in Appendice D.2).

Nota: Il S.I. è razionalizzato, il sistema di Gauss non è razionalizzato. Un sistema di misura si dice *razionalizzato* quando i coefficienti numerici che compaiono nelle leggi sono scelti in modo che il numero irrazionale π compaia solo in formule relative a simmetrie circolari, sferiche o cilindriche e non in quelle relative a simmetrie piane. La razionalizzazione del S.I. per le formule dell'elettromagnetismo è ottenuta esplicitando il fattore 4π nella legge di Coulomb.

In Appendice B.4 sono riportate alcune tabelle che facilitano la conversione tra sistema c.g.s. di Gauss e S.I.

B) Sistemi pratici

Varie unità di misura *pratiche* estranee al S.I. sono tuttora in uso. Salvo poche eccezioni limitate a campi specialistici ammesse dal Comitati Internazionale dei Pesi e Misure (Appendice B.1.c), le unità *pratiche* non dovrebbero più essere usate (un elenco parziale è riportato in Appendice B.2).

Tra le unità di misura non S.I. ammesse all'uso alcune sono frequentemente utilizzate in Fisica.

Un'**unità di massa atomica** (u), in inglese *atomic mass unit* (amu) è 1/12 della massa di un atomo di carbonio 12, cioè dell'isotopo del carbonio il cui nucleo contiene 12 nucleoni (6 protoni e 6 neutroni).
La massa di un atomo misurata in amu ha un valore molto vicino al numero di massa A (cioè al numero di nucleoni). 1 mol di atomi o molecole di qualsiasi sostanza ha una massa in grammi uguale alla massa in amu dei singoli atomi o molecole.
Il valore oggi accettato per l'unità di massa atomica è riportato in Appendice D.2. Approssimativamente, 1 u = 1.66×10^{-27} kg.

Un **elettronvolt** (eV) è l'energia acquistata da un elettrone nel passaggio tra due punti separati da una differenza di potenziale elettrico di 1 V: 1 eV = 1.6021892×10^{-19} J.

Esempio: L'energia necessaria per ionizzare un atomo di idrogeno, cioè per separare a distanza infinita l'elettrone dal protone, è 13.595 eV. La separazione in energia tra i due livelli iperfini del cesio 133 utilizzati per definire il secondo è $\Delta E \simeq 4\times10^{-5}$ eV.

L'**unità astronomica** (ua), corrispondente all'incirca alla distanza Terra-Sole, è usata per esprimere le distanze all'interno del sistema solare. Approssimativamente, 1 ua = $1.496 times 10^{11}$m.

Nella misurazione degli **angoli piani** si usa spesso come unità di misura il **grado** (°), nonché i suoi sottomultipli non decimali: il minuto, $1'=(1/60)°$, e il secondo, $1''=(1/3600)°$.

Nella misurazione delle **distanze a livello atomico** è spesso usato come unità di misura delle lunghezze l'ångström (Å). 1 Å = 0.1 nm = 10×10^{-10} m.

C) Sistemi anglosassoni

In Appendice B.3 sono elencate alcune unità di misura tuttora in uso nei paesi anglosassoni, in attesa

della definitiva adozione del S.I.
I sistemi anglosassoni sono generalmente a base non decimale. Ad esempio, partendo dall'unità base di lunghezza, cioè il pollice (*inch*), i principali multipli sono il piede (*foot*), pari a 12 pollici, e la iarda (*yard*), pari a 3 piedi.
Da notare anche che talora esistono differenze di valore tra omonime unità inglesi e americane. Ad esempio il *gallone*, unità di volume, vale 4.546 dm^3 in Gran Bretagna e 3.785 dm^3 negli Stati Uniti.

D) Sistemi naturali

In alcuni campi specialistici della Fisica si usano talora, per semplificare le notazioni e i calcoli, unità di misura dette *naturali* in quanto assumono come valori unitari quelli di alcune grandezze di particolare rilevanza nella fisica atomica e nucleare.

Il **sistema atomico di Hartree** è spesso utilizzato nella descrizione dei fenomeni a livello atomico. Le grandezze fondamentali per la meccanica e l'elettromagnetismo sono tre, come per i sistemi c.g.s.:

a) la *massa*: unità di misura è la massa a riposo dell'elettrone, m_e=1 (nel S.I. m_e=9.1093897$\cdot$ 10^{-31} kg);
b) la *carica elettrica*: unità di misura è la carica dell'elettrone e=1 (nel S.I. e=1.60217733$\cdot$10^{-19} C);
c) l'*azione* (prodotto di un'energia per un tempo): unità di misura è il quanto d'azione h (costante di Planck) diviso per 2π, $\hbar=h/2\pi$=1 (nel S.I. $\hbar$=1.0545727$\cdot$10 $^{-34}$ J s);

Il sistema di Hartree è indicato anche come *sistema* m_e=e=$\hbar$=1.

Esempio: Consideriamo ancora il modello di Bohr dell'atomo di idrogeno. Il raggio dell'orbita più interna dell'elettrone e la corrispondente energia potenziale sono espressi, nel sistema c.g.s.di Gauss, come

$$a_0 = \frac{\hbar}{m_e e^2}; \qquad U_0 = -\frac{e^2}{a_0} = -\frac{m_e e^4}{\hbar}.$$

Nel sistema di Hartree quindi $a_0 = 1$, $U_0 = 1$. Il raggio della prima orbita di Bohr a_0 rappresenta l'unità naturale di lunghezza. Il modulo di U_0 rappresenta l'unità naturale di energia, cui viene dato il nome di hartree (vedi Appendice B.5). La velocità dell'elettrone nella prima orbita di Bohr, $v_0 = e^2/\hbar$, è l'unità di velocità. L'unità di tempo è infine data dal rapporto a_0/v_0.

Il **sistema di Dirac** è spesso utilizzato nella fisica delle particelle elementari. Le grandezze fondamentali sono:

a) la *massa*: unità di misura è la massa a riposo dell'elettrone, m_e=1;
b) la *velocità*: unità di misura è la velocità della luce nel vuoto, c=1 (nel S.I. c=299 792 458 m/s);
c) l'*azione*: unità di misura è $\hbar=h/2\pi$=1;

Il sistema di Dirac è indicato anche come *sistema* m_e=c=$\hbar$=1.

E) Unità elettroniche ed informatiche

Nei campi dell'elettronica, dell'informatica e delle telecomunicazioni sono in uso unità di misura specifiche, che non hanno ancora trovato sistemazione normativa nel S.I.
Tali unità possono servire a misurare la **quantità di informazione**:

a) il **bit** (contrazione dall'inglese *b*inary dig*it*) corrisponde ad una cifra binaria;
b) 1 **byte** = 8 bit;
c) 1 **word** = uno o più byte elaborabili contemporaneamente;

oppure la **velocità di calcolo**:

d) le **IPS** sono le *Instructions Per Second* (Istruzioni al Secondo); tipicamente si usano i multipli, come 1 MIPS = 10^6 IPS;
e) le **FLOPS** sono le *Floating Point Operations Per Second* (Operazioni in Virgola Mobile al Secondo), anche qui tipicamente si usano i multipli, come 1 MFLOPS = 10^6 FLOPS;

o infine la **velocità di trasmissione dell'informazione**:

f) il **bps** o **bit/s**, corrispondente ad un bit al secondo, e talora impropriamente chiamato *baud*.

2.5 – Analisi dimensionale

Come abbiamo visto, una volta scelte le grandezze fisiche da considerare come fondamentali, resta arbitraria la scelta delle rispettive unità di misura. Vogliamo studiare come il cambiamento dell'unità di misura di una grandezza fondamentale si ripercuote sulle unità delle altre grandezze (fondamentali e derivate). Per semplicità ci riferiremo solo al S.I.

A) Dimensioni delle grandezze fisiche

Supponiamo di sostituire l'unità di misura delle lunghezze, cioè il metro, con un'unità L volte più piccola; di conseguenza le misure

di lunghezza	sono moltiplicate per	L
di tempo	sono moltiplicate per	$L^0 = 1$
di volume	sono moltiplicate per	L^3
di velocità	sono moltiplicate per	L

L'esponente del fattore L viene chiamato *dimensione* rispetto alla lunghezza.
Simbolicamente la dipendenza del valore di una grandezza qualsiasi X dalle unità delle grandezze fondamentali A, B, C... viene espressa tramite equazioni dimensionali del tipo:

$$[X] = [A]^\alpha\ [B]^\beta\ [C]^\gamma ...$$

L'analisi delle dimensioni delle grandezze trova applicazione pratica principalmente in meccanica e talora in elettromagnetismo: ci si limita perciò in genere a considerare le dimensioni rispetto a lunghezza, massa, tempo e (qualora occorra) intensità di corrente, simbolizzati con L, M, T, A.
Ad esempio, le dimensioni della velocità sono

$$[\mathrm{v}] \quad = \quad [\mathrm{L}]^1\ [\mathrm{T}]^{-1}\ [\mathrm{M}]^0$$

le dimensioni del lavoro e dell'energia sono

$$[\mathrm{W}] = [\mathrm{E}] \quad = \quad [\mathrm{L}]^2\ [\mathrm{T}]^{-2}\ [\mathrm{M}]^1$$

le dimensioni della differenza di potenziale elettrico sono

$$[\mathrm{V}] \quad = \quad [\mathrm{L}]^2\ [\mathrm{T}]^{-1}\ [\mathrm{M}]\ [\mathrm{A}]^{-1}$$

Grandezze che hanno le stesse dimensioni sono dette *dimensionalmente omogenee*.

B) Grandezze adimensionali

Alcune quantità hanno dimensione nulla rispetto a tutte le grandezze fondamentali: $[\mathrm{L}]^0$, $[\mathrm{T}]^0$, $[\mathrm{M}]^0$, $[\mathrm{A}]^0$.
Si tratta dei *numeri puri* (3, $\sqrt{2}$, π, ...) e delle *grandezze adimensionali*, cioè grandezze uguali al rapporto tra due grandezze omogenee.
Il valore delle grandezze adimensionali *non* dipende dalla scelta delle unità di misura delle grandezze fondamentali e derivate.

Esempi: Gli *angoli piani*, misurati in radianti, sono grandezze adimensionali; la misura in radianti è infatti il rapporto tra due lunghezze, quella dell'arco e quella del raggio. Anche gli *angoli solidi*, misurati in steradianti, sono grandezze adimensionali; la misura in steradianti è infatti il rapporto tra due lunghezze al quadrato.

Esempio: La densità assoluta di una sostanza è il rapporto tra la sua massa e il suo volume: $\rho = m/V$. La *densità relativa* di una sostanza è il rapporto tra la sua densità assoluta e la densità dell'acqua alla temperatura di 4°C. La densità relativa è una grandezza adimensionale.

Esempio: Una costante adimensionale molto importante nella fisica atomica è la *costante di struttura fine* α, definita nel S.I. dalla relazione

$$\alpha^2 \;=\; \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \;\simeq\; \frac{1}{(137)^2}.$$

Il valore numerico della costante di struttura fine, $\alpha \simeq 1/137$, non dipende dal sistema di unità di misura.

C) Principio di omogeneità dimensionale

L'utilizzazione pratica dell'analisi delle dimensioni si fonda sul **principio di omogeneità dimensionale**: possono essere uguagliate o sommate solo espressioni dimensionalmente omogenee. In altri termini, un'equazione tra grandezze fisiche è del tipo

$$A + B + C + ... = M + N + P + ...$$

dove $A, B, C, ...M, N, P, ...$ devono essere monomi dimensionalmente omogenei.
In particolare, le funzioni trascendenti (sen, cos, exp, log, ...) ed i loro argomenti devono essere adimensionali.

Esempio: Una massa appesa ad una molla esegue un moto oscillatorio. La sua coordinata di posizione z dipende dal tempo t secondo una legge sinusoidale. La dipendenza di x da t *non* può essere espressa come $x(t) = \operatorname{sen} t$, in quanto: a) l'argomento t della funzione seno non è adimensionale; b) la funzione seno è adimensionale mentre x ha le dimensioni di una lunghezza. L'equazione corretta è $x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t)$, dove A è una costante con le dimensioni di una lunghezza, ω è una costante con le dimensioni inverse al tempo.

D) Applicazioni dell'analisi dimensionale

Ricordiamo brevemente le principali applicazioni dell'analisi dimensionale.

Verifica delle equazioni

L'onogeneità dimensionale è condizione necessaria per l'esattezza di un'equazione fisica.
Non è però condizione sufficiente, perché:

a) l'analisi dimensionale non è in grado di valutare l'esattezza numerica;
b) esistono grandezze omogenee dimensionalmente, ma con significato fisico ben distinto (ad es. il lavoro meccanico ed il momento di una forza).

Esempio: Si vuole calcolare la traiettoria di un proiettile lanciato con velocità iniziale v_0 ad un angolo θ rispetto all'orizzontale. Applicando le regole della cinematica si trova

$$z \;=\; -\,\frac{g}{2\,v_0^2\,\cos^2\theta}\;x^2 \;+\; x\;\operatorname{tg}\theta$$

dove x e z sono le coordinate rispettivamente orizzontale e verticale.
È immediato verificare la correttezza dimensionale dell'equazione. Se l'omogeneità dimensionale non fosse stata soddisfatta, l'equazione sarebbe stata sicuramente sbagliata.
Viceversa, l'equazione avrebbe potuto essere sbagliata anche se dimensionalmente corretta: ad esempio se per un errore di calcolo si fosse ottenuto $\cos\theta$ anziché $\operatorname{tg}\theta$ nell'ultimo termine.

Per poter applicare l'analisi dimensionale alla verifica delle equazioni è necessario che i calcoli siano fatti sotto forma letterale, ed i valori numerici siano sostituiti solo alla fine.

Deduzione di equazioni

L'analisi dimensionale consente talora di determinare la relazione che intercorre tra le diverse grandezze che caratterizzano un fenomeno fisico, a meno di eventuali costanti adimensionali.

Esempio: Il periodo $\mathcal{T}$ di oscillazione di un pendolo può dipendere, in linea di principio, dalla massa m e dalla lunghezza ℓ del pendolo, dall'accelerazione di gravità g e dall'ampiezza θ_0 dell'oscillazione. La dipendenza di $\mathcal{T}$ da m, ℓ e g potà essere espressa dimensionalmente come

$$[T] \;=\; [m]^{\alpha}\,[\ell]^{\beta}\,[g]^{\gamma}$$

cioè

$$[T] \;=\; [M]^{\alpha}\,[L]^{\beta+\gamma}\,[T]^{-2\gamma}.$$

Il principio di omogeneità dimensionale impone che

$$\alpha \;=\; 0; \quad \beta + \gamma \;=\; 0; \quad \gamma \;=\; -1/2,$$

da cui

$$T \;=\; C\,\sqrt{\ell/g}$$

dove C è una costante adimensionale. Si noti che l'analisi dimensionale non è in grado di determinare l'eventuale dipendenza del periodo dall'ampiezza θ_0 (adimensionale), né il valore della costante C.

Il periodo di oscillazione del pendolo, considerato nell'esempio precedente, può comunque venire determinato in modo completo (cioè includendo le grandezze adimensionali) risolvendo l'equazione del moto. Nel caso di sistemi fisici molto complessi, per i quali non esista una teoria completa (ad esempio, in alcuni campi della fluidodinamica) l'analisi dimensionale può rappresentare uno strumento di grande utilità.

Similitudine fisica

Sistemi complessi di grandi dimensioni vengono spesso studiati con l'aiuto di modelli in scala ridotta (ad esempio in ingegneria idraulica ed aeronautica, in studi di elasticità, in studi sulla trasmissione del calore, etc). L'analisi dimensionale consente di valutare come la riduzione in scala della misura delle grandezze fondamentali si riflette sulle misure delle grandezze derivate. Risulta molto utile, nelle modellizzazioni in scala, fare ricorso a grandezze adimensionali (come le densità relative, il numero di Reynolds , il numero di Mach, etc.) che non dipendono dai fattori di scala.