ALGEBRA LINEARE CON ELEMENTI DI GEOMETRIA

modulo: ELEMENTI DI GEOMETRIA (Prof. M. Spera)

Prova scritta del 15 febbraio 2011

(1) Nel piano euclideo reale, in cui sia fissato un riferimento cartesiano, si consideri il triangolo ABC, $A:(2,0)$, $B:(1,2)$, $C:(0,1)$.
Dopo aver verificato che ABC è isoscele, si trovino l'ortocentro O, il circocentro $\tilde{C}$ e il baricentro G di ABC, nonché le rispettive coordinate baricentriche (rispetto a A,B,C).
Si verifichi, possibilmente in più modi, che $O, \tilde{C}, G$ sono allineati. È vero questo per un triangolo generico?

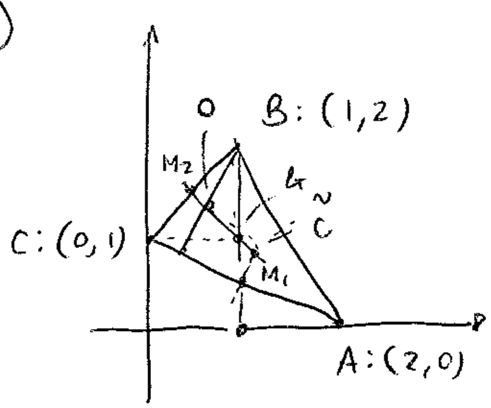
(2) Nel piano euclideo reale, in cui sia fissato un riferimento cartesiano, ampliato proiettivamente e complessificato, si determini il fascio di coniche aventi per punti base $A:[1,1,1]$, $B:[1,1,2]$, $P:[0,1,i]$, $Q:[0,1,-i]$ e tangenti a $r: y=4$.
Di che tipo di coniche si tratta? Usare questo fatto per giungere ad una soluzione elementare.

Tempo a disposizione: 1h 15m

Le risposte vanno adeguatamente giustificate

Elementi di Geometria
15 Febbraio 2011

(1)



Si noti che ABC è isoscele
($\overline{AC} = \overline{AB} = \sqrt{5}$)

circocentro $\tilde{C}$: centro del cerchio inscritto.

Troviamolo in due modi: Asse di AC: retta per il punto medio di AC, $M_1 = (1, \frac{1}{2})$, $\perp$ AC.

coeff. angolare di AC: $m_{AC} = -\frac{1}{2}$.

$$\boxed{m^{\perp} = -\frac{1}{m}}$$

$\Rightarrow$ asse di AC: $y - \frac{1}{2} = (+2)(x-1)$

$$y - \frac{1}{2} = +2x - 2$$

$$y = 2x - 2 + \frac{1}{2} = 2x - \frac{3}{2}$$

$$2y = 4x - 3$$

$$4x - 2y - 3 = 0$$

$$\boxed{4x - 2y - 3 = 0} \quad \text{asse di } AC$$

Asse di BC: punto medio $M_2: (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$

$m_{BC} = +1 \Rightarrow y - \frac{3}{2} = (-1)(x - \frac{1}{2})$

$y - \frac{3}{2} = -x + \frac{1}{2} \Rightarrow x + y - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 0$

asse di BC $\boxed{x + y - 2 = 0}$. Punto di intersezione $= \tilde{C}$

NOTARE: passa per A
(ABC è isoscele)

$$\begin{cases} 4x - 2y - 3 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

$y = -x + 2$

$4x - 2(-x+2) - 3 = 0$

$4x + 2x - 4 - 3 = 0$

$6x - 7 = 0$ $\quad x = +\frac{7}{6}$

$y = -\frac{7}{6} + 2 = \frac{5}{6}$ $\quad \tilde{C}: (\frac{7}{6}, \frac{5}{6})$

controllo: circ. per A B C.

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

A: $4+2a+c=0$ $\qquad 4+2a+c=0$

B $1+4+a+2b+c=0$ $\qquad 5+a+2b+c=0$

C: $1+b+c=0$ $\qquad 1+b+c=0$

$$\begin{cases} 2a+0+c+4=0 \\ a+2b+c+5=0 \\ 0+b+c+1=0 \end{cases}$$

$$a-2b-1=0$$
$$a+b+4=0$$
$$-3b-5=0$$
$$b=-\frac{5}{3}$$

$$a=-b-4=+\frac{5}{3}-4=-\frac{7}{3}$$

$$c=-1-b=-1+\frac{5}{3}=\frac{2}{3}$$

coor. centro $\tilde{C}_1: \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = \left(\frac{7}{6}, \frac{5}{6}\right)$ ✓

$$\boxed{\text{Baricentro } G = \frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right] = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}$$

coord. baricentriche di $\tilde{C}_1$

$$x_{\tilde{C}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7/6 & 1 & 0 \\ 5/6 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{4}{9}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7/6 & 1 & 0 \\ 5/6 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1+\frac{7}{3}-\frac{5}{6}-\frac{7}{6} = \frac{6+14-12}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} 1+4-2=3$$

$$\nu_{\tilde{C}_1} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 7/6 & 0 \\ 0 & 5/6 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{\overbrace{\frac{7}{6} + \frac{5}{3} - 2}^{= \frac{7+10-12}{6} = \frac{5}{6}}}{3} = \frac{5}{18}$$

Controllo $\longrightarrow$ $w_{\tilde{C}_1} = 1 - \frac{5}{18} - \frac{8}{18} = 1 - \frac{13}{18} = \frac{5}{18}$

(Chiaro per ragioni geometriche...) il triangolo è isoscele

$$w_{\tilde{C}_1} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 7/6 \\ 0 & 2 & 5/6 \end{vmatrix}}{3} = \frac{\overbrace{\frac{5}{6} + 4 - \frac{5}{3} - \frac{7}{3}}^{= \frac{5}{6}}}{3} = \frac{5}{18} \quad \checkmark$$

l'ortocentro O è il pto di intersezione delle altezze
Per individuarlo basta trovare il pto di intersezione di AM_2 con la perpendicolare ad AC spiccata da B

$$AM_2 : \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & 1/2 \\ y & 0 & 3/2 \end{vmatrix} = 0$$

$$0 = 1 \cdot 2 \cdot \frac{3}{2} - x \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

$$= 3 - \frac{3}{2}x + y \underbrace{\left(\frac{1}{2} - 2\right)}_{-\frac{3}{2}} = 3 - \frac{3}{2}(x+y) = 0$$

$$\boxed{x + y - 2 = 0}$$ (è l'asse di BC)

come era chiaro a priori

$$r_B : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$$

retta per B, ⊥ ad AC.

$$AC: \quad \frac{x}{2} + y = 1 \qquad x + 2y - 2 = 0$$

$r_B \cap AM_2$

$$1 + t + \cancel{2} + 2t - \cancel{2} = 0$$

$$3t + 1 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{3}$$

$O: \quad \left(1-\frac{1}{3},\ 2-\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3},\ \frac{4}{3}\right)$

coordinate baricentriche:

$$u_0 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{4}{3} & 2 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{1+\cancel{\frac{4}{3}}-\cancel{\frac{4}{3}}-\frac{2}{3}}{3} = \frac{\frac{1}{3}}{3} = \frac{1}{9}$$

$$v_0 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{\overbrace{\frac{8}{3}+\frac{2}{3}}^{\frac{10}{3}}-2}{3} = \frac{4}{9}$$

$\frac{10}{3} - 2 = \frac{4}{3}$

V: il triangolo è isoscele

$$w_0 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 2 & \frac{4}{3} \end{vmatrix}}{3} = \frac{\cancel{\frac{4}{3}}+4-\cancel{\frac{4}{3}}-\frac{8}{3}}{3} = \frac{+\frac{4}{3}}{3} = \frac{4}{9}$$

$$u_0+v_0+w_0 = \frac{4+4+1}{9} = 1 \quad V$$

O, $\tilde{C}$, $\hat{G}$ sono allineati (ciò è vero in generale per il teorema di Eulero).

verifichiamolo in termini di coordinate baricentriche (che divengono coordinate proiettive):

$$\begin{array}{c} G \\ O \\ \tilde{C} \end{array} \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{18} & \frac{5}{18} \end{vmatrix} = 0$$

due colonne uguali

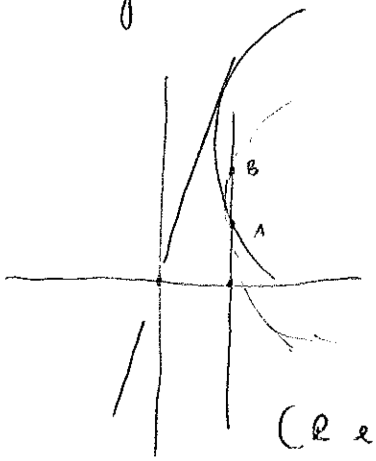
Elementi di Geometria
15 Febbraio 2011

(2) Coniche $\mathcal{C}$ per

$A:[1,1,1]$, $B:[1,1,2]$

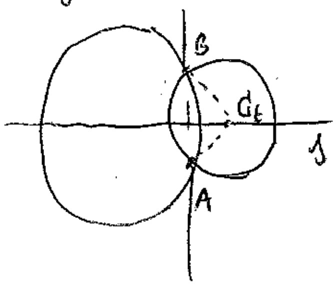
$P:[0,1,i]$, $Q:[0,1,-i]$

tangenti a $r: \ y = 4$



Sol. Il fascio $\mathcal{F}$ avente per pti base A, B, P, Q è un fascio di circonferenze (P e Q sono i pti ciclici)

Costruiamolo in due modi. (1) Il centro della circonferenza giace sulla retta $s: \ y = \frac{3}{2}$ se questo ha



coord. $C_t : \left(t, \frac{3}{2}\right)$

è $R_t^2 = \overline{C_t A}^2 = (t-1)^2 + \left(\frac{3}{2}-1\right)^2$

raggio

$= (t-1)^2 + \frac{1}{4}$

Le circ. hanno equazione:

$$(x-t)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = (t-1)^2 + \frac{1}{4}$$

$$x^2 - 2tx + \cancel{t^2} + y^2 - 3y + \frac{9}{4} = \cancel{t^2} - 2t + \overbrace{1 + \frac{1}{4}}^{\frac{5}{4}}$$

$$\boxed{x^2 + y^2 - 2tx - 3y + 1 + 2t = 0}$$

Imponiamo la cond. di tangenza con r

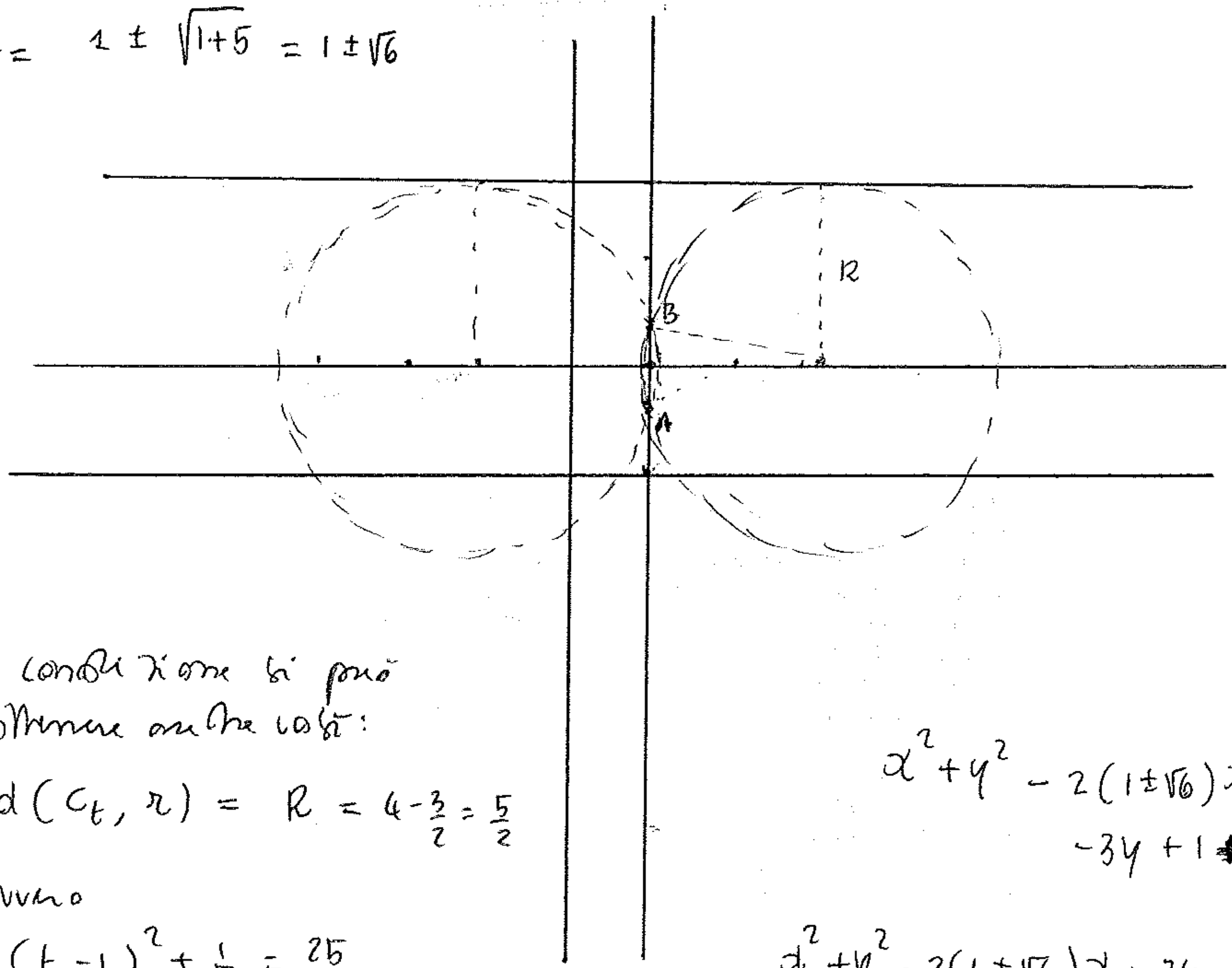
tangente ad r $\qquad y=4$

$$x^2+16-2tx-12+1+2t=0$$

$$x^2-2tx+5+2t=0$$

$\Delta=0 \Rightarrow \quad t^2-5-2t=0 \qquad t^2-2t-5=0$

$t=1\pm\sqrt{1+5}=1\pm\sqrt{6}$



la condizione si può ottenere anche così:

$d(C_t, r) = R = 4-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$

ovvero

$(t-1)^2+\frac{1}{4}=\frac{25}{4}$

$(t-1)^2=6 \Rightarrow t-1=\pm\sqrt{6}$

$t=1\pm\sqrt{6}$

$x^2+y^2-2(1\pm\sqrt{6})x$
$-3y+1+2(1\pm\sqrt{6})=0$

$x^2+y^2-2(1\pm\sqrt{6})x-3y$
$+3\pm2\sqrt{6}=0$

variante: circonferenze per A, B

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

A: $1+1+a+b+c=0$ $\qquad a+b+c=-2$

B $1+4+a+2b+c=0$ $\qquad a+2b+c=-5$

$$\Rightarrow \quad -b = -2+5 = 3 \qquad b=-3$$

(chiaro geom...)

$$a+c = -2-b = -2+3 = 1$$

$$a+c=1 \qquad a=1-c$$

$$\Rightarrow \quad x^2+y^2+(1-c)x-3y+c=0$$

tangente a $y=4$

$$x^2+16+(1-c)x-12+c=0$$

$$x^2+(1-c)x+4+c=0$$

$$\Delta=0 \Rightarrow \quad (1-c)^2-4(4+c)=0$$

$$c^2-2c+1-16-4c=0$$

$$c^2-6c-15=0$$

$$c = 3 \pm \sqrt{9+15} = 3 \pm \sqrt{24}$$

$$= 3 \pm 2\sqrt{6}$$

$$1-c = 1-3 \mp \sqrt{6} = -2 \mp \sqrt{6} = -2(1 \pm \sqrt{6})$$

$$\boxed{x^2+y^2-2(1\pm\sqrt{6})x-3y+3\pm2\sqrt{6}=0}$$

✓