ESERCIZI di ALGEBRA LINEARE

Esercizio 1
In $\mathbb{C}^3$ si considerino i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ t-1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, al variare del parametro complesso t. Determinare, se esistono, i valori di t per i quali v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti.

Esercizio 2
Trovare una base dello spazio generato dai vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_5 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 3
Sia S l'insieme delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + 3y + 3z = 4 \end{cases}$$

Determinare S. S è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}^3$? Esiste un vettore $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$ tale che $v + S = \{v + s | \ s \in S\}$ sia un sottospazio vettoriale di R^3?

Esercizio 4
Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{C}^4$ $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} i \\ i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_5 = \begin{pmatrix} 2i \\ 0 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_7 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Si dimostri che sono un insieme di generatori per $\mathbb{C}^4$ e si determini una base contenuta in $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$

Esercizio 5
Trovare una base di $C(A)$ e una base di $C(A^H)$, dove A è la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 6
Si consideri il seguente sottoinsieme di $M_2(\mathbb{C})$:

$$W = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | \ a + d = 0 \ \}$$

Verificare che è un sottospazio di $M_2(\mathbb{C})$. Trovare una base di W.

Esercizio 7
Trovare un sottoinsieme di $\mathbb{C}^2$ chiuso rispetto alla somma ma non rispetto al prodotto per scalari, e un sottoinsieme di $\mathbb{C}^2$ chiuso rispetto al prodotto per scalari ma non rispetto alla somma.

Esercizio 8
Si consideri la seguente funzione $f_s : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$: $f_s \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x-y+s \\ sx+(s-1)z \end{pmatrix}$
Per quali valori di $s \in \mathbb{C}$ f_s è una applicazione lineare? Per tali valori determinare $N(f_s)$, $Im(f_s)$ e la controimmagine mediante f_s del vettore $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 9
Sia $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$ l'applicazione lineare $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y \\ y \\ x+3y \end{pmatrix}$. Determinare $N(f)$ e $Im(f)$. Determinare $f^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 10
Si considerino, al variare del parametro reale k, le seguenti applicazioni lineari: $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$f_k \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx+y-z \\ ky+(k+1)z \\ (k-1)z \end{pmatrix}$$

1. Determinare per quali valori di k l'applicazione f_k è iniettiva.
2. Determinare per quali valori di k il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartiene a $Im(f_k)$.

Esercizio 11
Sia $f_A : \mathbb{C}^3 \to C^3$ l'applicazione lineare indotta da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Si dica se f_A è invertibile. Determinare $N(f_A)$ e $Im(f_A)$, e una base per ciascuno di tali sottospazi. Il vettore $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$ appartiene a $Im(f_A)$? In caso affermativo trovare v tale che $f_A(v) = w$.

Esercizio 12
Sia $P_4(\mathbb{R})$ l'insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado strettamento minore di 4, e sia $f : P_4(\mathbb{R}) \to P_4(\mathbb{R})$ definita da $f(p) = xp'$, dove p' è la derivata del polinomio p. Dimostrare che f è una applicazione lineare, trovare $N(f)$ e $Im(f)$.

Esercizio 13
Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{C}^3$:

$$U_1 = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid 2x + y - z = 0,\ x - y = 0\}$$

$$U_2 =< \begin{pmatrix} -i \\ i \\ i \end{pmatrix} >$$

Esiste una applicazione lineare $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ che abbia U_1 come spazio nullo ed U_2 come spazio immagine? In caso affermativo costruire f.

Esiste una applicazione lineare iniettiva $g : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ che abbia U_2 come immagine? In caso affermativo costruire g.

Esiste una applicazione lineare suriettiva $h : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ che abbia U_1 come nucleo? In caso affermativo costruire h.

Esercizio 14
Sia $f : M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C})$ definita da

$$f \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

Verificare che f è una applicazione lineare, trovare $N(f)$ e $Im(f)$.