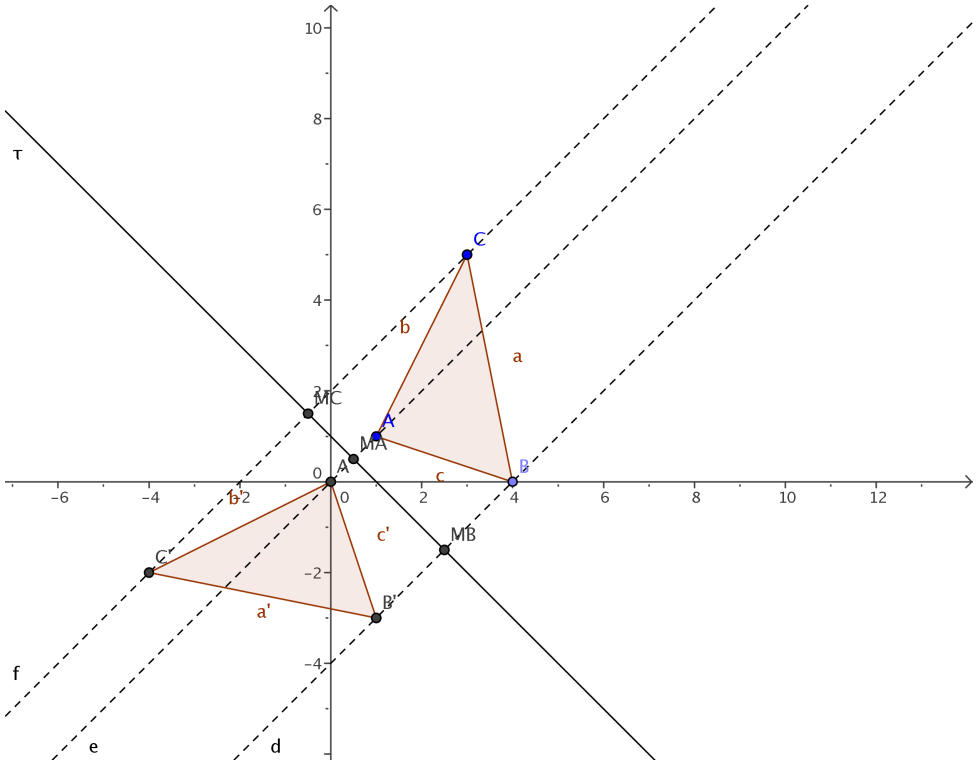
Esercizi di geometria affine in 3 dimensioni

Nicola Sansonetto*

4 febbraio 2009

Esercizio 1. Si consideri nel piano affine $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ un riferimento cartesiano, la retta τ di equazione affine $y+x=1$ e il triangolo T di vertici $A:(1,1)$, $B:(4,0)$ e $C:(3,5)$. Determinare il simmetrico di T rispetto alla retta τ nella direzione ortogonale a τ. La trasformazione così ottenuta è una trasformazione affine? È un'affinità? In caso affermativo determinare la forma della trasformazione.

Sol. La direzione ortogonale a τ è data dal sottospazio direttore $n=\langle \eta=(1,1)\rangle$.



Consideriamo il punto A e determiniamone il simmetrico rispetto a τ nella direzione di n. La retta r_A per il punto A e ortogonale a τ ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=1+t \end{cases}$$

Il punto $M_A=r_A\cap\tau$ di intersezione tra la retta r_A e la retta τ è ottenuto per il valore $\bar{t}=\frac{1}{2}$ del parametro t. Quindi il simmetrico A' di A è

$$A'=A+2\bar{t}\,\eta=A+\eta=(0,0)$$

*Dipartimento di Informatica Università degli Studi di Verona, Ca' Vignal 2, Strada le Grazie 14, 37134 Verona. Tel. +390458027908; e-mail: nicola.sansonetto@univr.it

Procedendo in maniera analoga si ottengono i simmetrici dei punti B e C: $B' : (1, -3)$ e $C' : (-4, -2)$.

Per vedere se la trasformazione in questione è una trasformazione affine vediamo direttamente se essa può essere posta nella forma $P' = \mathbf{b} + MP$, in cui P e P' sono punti di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, $\mathbf{b}$ è un vettore dello spazio direttore $\mathbb{R}^2$ e M è una matrice 2×2 a coefficienti reali. Sia $P = (x_P, y_P)$ il generico punto di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$. La retta r_P per P nella direzione di n ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x_P + t \\ y = y_P + t \end{cases}$$

mentre il punto di intersezione tra la retta r_P e la retta τ è individuato per il valore $\bar{t} = \frac{1 - x_P - y_P}{2}$ del paramentro t. Quindi il simmetrico P' del punto P rispetto alla retta t nella direzione di n è

$$P' = P + \bar{t}\,\eta$$

Esplicitando le coordinate

$$\begin{cases} x_{P'} = 1 - y_P \\ y_{P'} = 1 - x_P \end{cases}$$

e quindi

$$P' = \mathbf{b} + M\,P$$

in cui $\mathbf{b} = (1, 1)$ e $M = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. E quindi la trasfrmazione in considerazione è affine ed è un'affinità, poiché il rango di M è massimo.[1]

Esercizio 2. Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}^3$ si considerino le rette

$$r : \begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + z = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

A. Verificare che le rette r e s sono sgembe e calcolarne la mutua distanza. Determinare, inoltre, i punti R e S, rispettivamente su r e s, di minima distanza.

B. Dato $A : (1, 0, 0)$, scrivere l'equazione della retta h per A e incidente sia r che s.

C. Scrivere l'equazione del cilindro $\mathcal{C}$ avente la retta s come asse e tangente alla retta r. Determinare i punti P e Q di intersezione tra il cilindro e la retta h.

D. Determinare il volume del tetraedro $SPQR$.

Sol. A. In primo luogo scriviamo le equqzioni parametriche di r e s:

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = -2 \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -t \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = u \\ y = 1 \quad u \in \mathbb{R} \\ z = u \end{cases}$$

Dalle equazioni paramentriche emerge semplicemente che r e s non sono nè parallele nè incidenti. Non sono parallele perché i loro spazi direttori, $\mathbf{v}_r = (1, 0, -1)$ e $\mathbf{v}_s = (1, 0, 1)$ non sono proporzionali, e non sono incidenti perchṕer alcun valore dei parametri t e u $P_r : (t, -2, -t)$ coincide con $P_s : (u, 1, u)$.

Un altro modo di vedere ciò lo si fa considerando i due vettori direttori $\mathbf{v}_r$ e $\mathbf{v}_s$ di r e s rispettivamente e un qualsiasi vettore con un estremo in r e uno in s e poi vedere se questi

[1] Nel linguaggio dei gruppi, $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$

tre vettori sono linearmente indipendenti. Prendiamo AB il vettore di estremi $A : (0, -2, 0)$ e $B : (0, 1, 0)$, in r e s rispettivamente. È allora semplice versifica che la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

che ha per colonne i vettori AB, $\mathbf{v}_r$ e $\mathbf{v}_s$ ha rango massimo.

I punti di minima distanza tra le rette r e s sono quei punti R e S tali per cui il vettore RS è ortogonale sia alla retta r che alla retta s:

$$\langle RS, \mathbf{v}_r \rangle = 0$$
$$\langle RS, \mathbf{v}_s \rangle = 0$$

e ciò si ottiene per $t = 0$ e $u = 0$. Per cui $R = (0, -2, 0)$ e $S = (0, 1, 0)$. Infine $d(r, s) = d(R, S) = \|RS\| = 3$

B. La retta h si ottiene come intersezione di un piano per r e di un piano per s entrambi passanti per il punto A. Consideriamo quindi i fasci di piani $\mathcal{F}_r$ e $\mathcal{F}_s$ di asse r e s, rispettivamente:

$$\lambda(x - y + z - 2) + \mu(x + z) = 0, \qquad (\lambda, \mu) \neq (0, 0)$$
$$\alpha(x + 2y - z - 2) + \beta(x - z) = 0, \qquad (\alpha, \beta) \neq (0, 0)$$

Imponiamo il passaggio per A ottenendo $\mu = \lambda$ e $\alpha = \beta$. Per cui

$$h : \begin{cases} 2x - y + 2z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

C. Il cilindro $\mathcal{C}$ è il luogo geometrico dei punti $X = (x, y, z)$ dello spazio aventi distanza pari a 3^2 dalla retta s

$$d(X, s) = \frac{\|P_s X \times \mathbf{v}_s\|}{\|\mathbf{v}_s\|} = 3$$

in cui $P_s : (u, 1, u)$. Sviluppando si ricava che l'equazione del cilindro $\mathcal{C}$ è

$$(x - z)^2 + 2\,(y - 1)^2 = 18$$

I punti P e Q di intersezione tra il cilindro $\mathcal{C}$ e la retta h sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} (x - z)^2 + 2\,(y - 1)^2 = 18 \\ x = -1 - t \\ y = 4t \\ z = 3t \end{cases}$$

da cui $P : \left(\frac{3-\sqrt{6}}{4}, 1 + \sqrt{6}, \frac{3+3\sqrt{6}}{4}\right)$ e $Q : \left(\frac{3+\sqrt{6}}{4}, 1 - \sqrt{6}, \frac{3-3\sqrt{6}}{4}\right)$

D. Il volume del tetrardro è

$$vol(SPQR) = \frac{1}{6} \|\langle SR, SP \times SQ \rangle\| = \frac{3\sqrt{6}}{8}$$

Esercizio 3. Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}^3$ in cui sia fissato un sistema di riferimento cartesiano si considerino il punto $P : (0, 0, 1)$ e il piano $\pi : \quad 2z - x = 0$.

[2] Grazie alla condizione tangenza.

1. Determinare la proiezione ortogonale P' a P su π.
2. Determinare la proiezione M di P su π lungo la direzione $V = \langle \mathbf{v} = (1, 1, -1) \rangle$.
3. Calcolare l'area del triangolo $OP'M$, in cui O è l'origine del sistema di riferimento.
4. Detto R il simmentrico di P rispetto a π lungo V, determinare il volume del tetraedro $OPRP'$.

Sol. 1. Determiniamo la retta r per P e ortogonale a π; P' sarà quindi dato dall'intersezione tra tale retta e il piano π. Tale retta ha direzione parallela al vettore $\mathbf{n}_\pi = (1, 0, -2)$, e quindi

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

Ora $P' = r \cap \pi$ e cioè $t = \frac{2}{5}$ e quindi $P' = \left(\frac{2}{5}, 0, \frac{1}{5}\right)$.

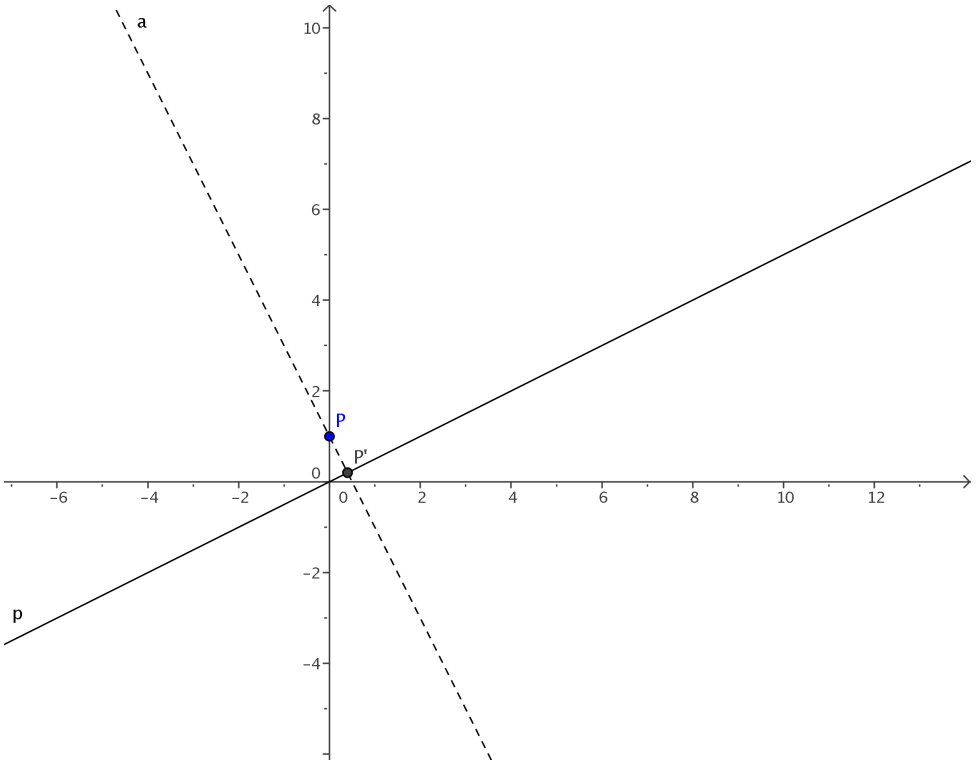


Figura 1: Sezione sul piano (x, z)

2. Consideriamo ora la retta r' per P e nella direzione di $\mathbf{v}$:

$$r' : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

Ora $M = \pi \cap r'$ e cioè $t = \frac{2}{3}$ e quindi $M = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

3. A questo punto calcolare l'area del triangolo $OP'M$:

$$S_{OP'M} = \frac{1}{3} \|OP' \times OM\| = \frac{\sqrt{5}}{15}$$

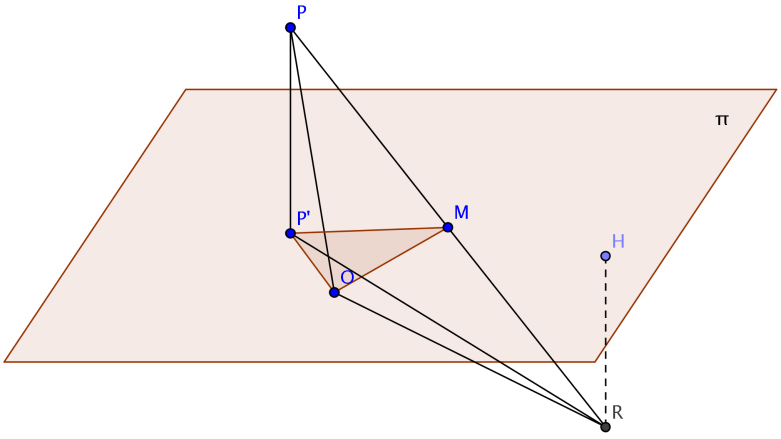


Figura 2: Tetraedro $OP'RP$

4. Per determinare il volume di $OP'RP$ non è necessario determinare R (vedi figura), infatti

$$vol(OP'RP) = vol(OPMP') + vol(OP'MP) = 2vol(OPMP') = 2S_{OP'M}\, PP' = \frac{4}{45}$$

Esercizio 4. Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}^3$ in cui sia fissato un sistema di riferimento cartesiano si considerino la retta di equazioni parametriche

$$r: \quad \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3t \\ z = 2t \end{cases}$$

e il piano $\pi: \quad x + y = 0$.

1. Determinare la retta p proiezione di r su π lungo la direzione $W = \langle \mathbf{w} = (0, 1, 1) \rangle$.
2. Sia π' il piano individuato da r e da p. Si considerino i due piani del fascio di asse $p$che formano con π' ungoli di $\frac{\pi}{3}$.
3. Detti λ e μ i piani di cui al punto 2., determinare i loro piani bisettori.

Sol. 1. In primo luogo osserviamo che la retta r e il piano π non sono paralleli, infatti $\mathbf{v}_r = (1, 3, 2)$ e $\mathbf{n}_\pi = (1, 1, 0)$, che non sono ortogonali. Scriviamo l'equazione del fascio di piani $\mathcal{F}_r$ di asse r. Scriviamo delle equazioni affini per r

$$r: \begin{cases} 3 - y - 3 = 0 \\ 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

da cui il fascio $\mathcal{F}_r$ è dato da

$$\xi\,(2y-3z)+\eta\,(3x-y-3)=0$$

Consideriamo ora il piano π' del fascio che sia parallelo ala direzione $\mathbf{w}=(0,1,1)$. Tale piano è individuato dalla condizione

$$\langle \mathbf{w}, \mathbf{n}_{\mathcal{F}} \rangle = 0$$

che porge $\eta=-\xi$. Prendendo $\eta=-1$ e quindi $\xi=1$ si ottiene l'equzione di π'

$$\pi' :\ x-y+z-1=0$$

Per cui la retta $p=\pi'\cap\pi$ proiezione di r su π è definita da

$$p:\begin{cases} x-y+z-1=0 \\ x+y=0 \end{cases}$$

2. Consideriamo ora il fascio $\mathcal{F}_p$ di asse p, $\lambda(x-y+z-1)+\mu(x+y)=0$, $(\lambda,\mu)\neq(0,0)$. I piani cercati sono quelli per cui

$$\cos(\mathcal{F}_p,\pi') = \frac{\langle \mathbf{n}_{\mathcal{F}_p}, \mathbf{n}_{\pi'}\rangle}{\|\mathbf{n}_{\mathcal{F}_p}\|\,\|\mathbf{n}_{\pi'}\|} = \frac{1}{2}$$

Sostituendo si ricava l'equazione

$$\frac{3\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+2\mu^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Sicuramente deve essere $\lambda\neq 0$, allora dividiamo tutto per λ e poniamo $\kappa^2=\frac{\mu^2}{\lambda^2}$, da cui si ricava $\kappa=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ oppure $\kappa=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$. I due piani cercati sono quindi

$$\lambda : x-y+z-1+\frac{3\sqrt{2}}{2}(x+y)=0$$
$$\mu : x-y+z-1-\frac{3\sqrt{2}}{2}(x+y)=0$$

3. Ovviamente π' biseca λ e μ. L'altro piano è il piano del fascio $\mathcal{F}_p$ ortogonale a π' che π.

Esercizio 5. 1. Scrivere l'equazione affine del piano π ortogonale al piano π' di equazione affine $x-y+2z=0$ e contenente la retta

$$r:\begin{cases} x+2y=3 \\ x-z=1 \end{cases}$$

2. Scrivere le equazioni parametriche di r.

3. Determinare i punti di che hanno distanza $\sqrt{6}$ dalla retta $s=\pi\cap\pi'$.

4. Scrivere le equazioni di π nel sistema di riferimento determinato dai punti $Q_0:(1,1,0)$, $Q_1:(2,0,2)$, $Q_2:(1,3,1)$ e $Q_3:(6,2,-2)$.

Sol. 1. Il piano π è parallelo alla direzione $\mathbf{n}_{\pi'}=(1,-1,2)$ ortogonale a π'. Inoltre π è un piano del fascio di piani $\mathcal{F}_r$ di asse r di equazione $x(\lambda+\mu)+2\lambda y-\mu z-(3\lambda+\mu)=0$. Quindi π è li piano del fascio la cui direzione ortogonale $\mathbf{n}_\pi$ é ortogonale a $\mathbf{n}_{\pi'}$

$$\langle(\lambda+\mu,2\lambda,-\mu),\mathbf{n}_{\pi'}\rangle=0$$

Da cui si ricava $\lambda=-\mu$. Prendendo $\lambda=1$ si ottiene $\pi: 2y+z-2=0$.

2. Le equazioni parametriche di r sono

$$r : \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = t \qquad\qquad t \in \mathbb{R} \\ z = 2 - 2t \end{cases}$$

3. Ricordiamo che $\pi \perp \pi'$, quindi, dal momento che $s = \pi \cap \pi'$, per ogni punto P di π, $d(P, s) = d(P, \pi')$. In particolare ciò vale per i punti di r. Usando la distanza punto/piano si ottiene $\sqrt{6} = d(P, s) = d(P, \pi') = \frac{\langle P, \mathbf{n}_{pi'} \rangle}{\|\mathbf{n}_{\pi'}\|} = \frac{|7-7t|}{\sqrt{6}}$. Da cui $t = \frac{1}{7}$ oppure $t = \frac{13}{7}$.

4. Il nuovo sistema di riferimento centrato in Q_0 ha come direzioni coordinate i vettori $Q_1 - Q_0$, $Q_2 - Q_0$ e $Q_3 - Q_0$. Quindi il cambiamento di sistema di coordinate è dato dalla trasformazione affine

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

Sostituendo nell'equazione di π le espressioni di x, y e z in funzione di X, Y e Z si ricavache l'equazione di π ridpetto al nuovo sitema di rifermento

$$\pi : Y = 0$$

Osserviamo, d'altra parte, che ciò era immediato, dal momento che π passa per il punto Q_0 ed è ortogonale al vettore $Q_2 - Q_0 = (0, 2, 1)$.