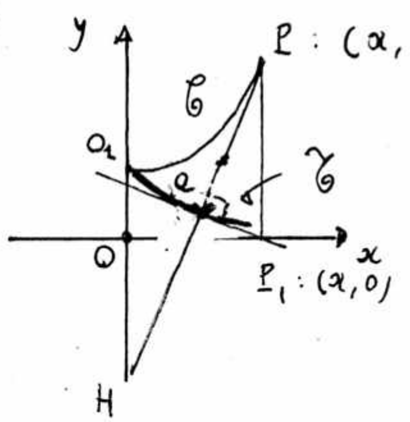
Geometria - Prova scritta dell' 11/12/2007

(Prof. M. Spera)

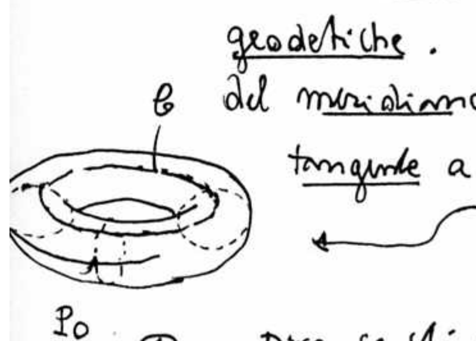
① Dato il toro $\Sigma: \begin{cases} x = (2+\cos v)\cos u \\ y = (2+\cos v)\sin u \\ z = \sin v \end{cases}$ $(u, v) \in [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$

si determinino, nel punto $P_0 = (3, 0, 0)$, la prima e la seconda forma fondamentale, la curvatura gaussiana e media, l'operatore di forma e le relative direzioni principali in $T_{P_0}\Sigma$, e si abbozzi il grafico dell'indicatrice di Dupin.

② 

Si consideri la superficie Σ generata dalla rotazione della trattrice γ in figura attorno all'asse y. Si determini la curvatura gaussiana di Σ in un generico pto Q. Suggerimento: si ricordi che γ è un'evolvente della catenaria $\mathcal{C}$ (vi fig.). Basta determinare, in Q, la curvatura di γ e la gran normale $\overline{QH}$...

③ Con riferimento al toro dell'es. ①, si dimostri che il meridiano e il parallelo passanti per $P_0 : (3, 0, 0)$ sono geodetiche. Quale angolo α deve formare con la direzione del meridiano uscente da P_0 la geodetica per P_0 che risulta tangente a $\mathcal{C}$: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 1 \end{cases}$?

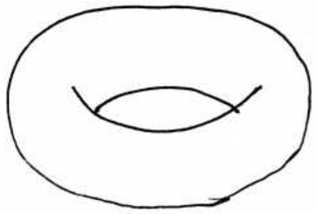


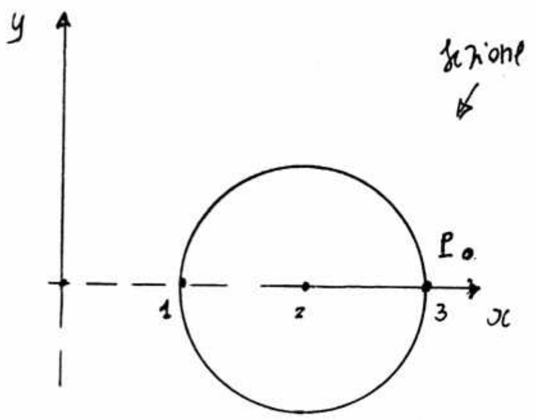
④ Dire se gli spazi topologici X = ○-○ e Y = ○ sono compatti e connessi. È vero che X e Y sono omeomorfi? Spiegare.

Svolgere 3 esercizi a scelta, tra cui c'è 1 o c'è 2.

Tempo a disposizione 2h. Le risposte vanno adeguatamente giustificate.

(1) [cf. anche l'ex (2) della prova del 2/7/2007]





$P_0 : (3, 0, 0)$

$u = v = 0$

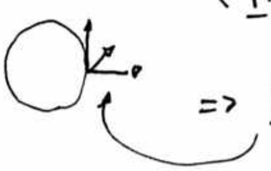
toro :
$$\begin{cases} x = (2+\cos v)\cdot \cos u \\ y = (2+\cos v)\cdot \sin u \\ z = \sin v \end{cases} \qquad \begin{array}{l} u \in [0, 2\pi) \\ v \in [0, 2\pi) \end{array}$$

Calcoliamo:

$$\begin{cases} \underline{r} = \left((2+\cos v)\cos u ,\ (2+\cos v)\sin u ,\ \sin v \right) \\ \underline{r}_u = \left(-(2+\cos v)\sin u ,\ (2+\cos v)\cos u ,\ 0 \right) \\ \underline{r}_v = \left(-\sin v \cos u ,\ -\sin v \sin u ,\ \cos v \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{r}_{uu} = \left(-(2+\cos v)\cos u ,\ -(2+\cos v)\sin u ,\ 0 \right) \\ \underline{r}_{uv} = \left(+\sin v \sin u ,\ -\sin v \cos u ,\ 0 \right) \\ \underline{r}_{vv} = \left(-\cos v \cos u ,\ -\cos v \sin u ,\ -\sin v \right) \end{cases}$$

in P_0:
$$\begin{array}{l} \underline{r}^\circ_u = (0, 3, 0) \\ \underline{r}^\circ_v = (0, 0, 1) \\ \langle \underline{r}^\circ_u, \underline{r}^\circ_v \rangle = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} E^\circ = 9 \\ G^\circ = 1 \\ F^\circ = 0 \end{cases}$$



$\Rightarrow \underline{N}^\circ = (1, 0, 0)$ (chiaro...)

piano tangente: $\boxed{x = 3}$

Chiaro...

$\langle \underline{r}_{uu}, N \rangle$

$$\underline{r}^\circ_{uu} = (-3,\ 0,\ 0) \qquad e^\circ = -3$$

$$\underline{r}^\circ_{uv} = (0,\ 0,\ 0) \qquad f^\circ = 0$$

$$r^\circ_{vv} = (-1,\ 0,\ 0) \qquad g^\circ = -1$$

in P_0

$$\Rightarrow \quad \text{da} \quad m_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(dN) = \begin{pmatrix} \frac{fF - eG}{EG - F^2} & \frac{gF - fG}{\cdot} \\ \frac{eF - fE}{\cdot} & \frac{fF - gE}{\cdot} \end{pmatrix}$$

e da $\quad S = -dN$

op. di forma

$$\text{è} \quad m_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(S_{P_0}) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} = k_1 & \end{array} \\ \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} & = k_2 \end{array} \end{array}$$

i segni sono entrambi negativi: ecco perché

$$\Rightarrow \quad K = k_1 k_2 = \left(-\frac{1}{3}\right)(-1) = \frac{1}{3} \qquad H = \left(-\frac{1}{3} - 1\right)\frac{1}{2} = -\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{2}{3}$$

* ottenibili direttamente:

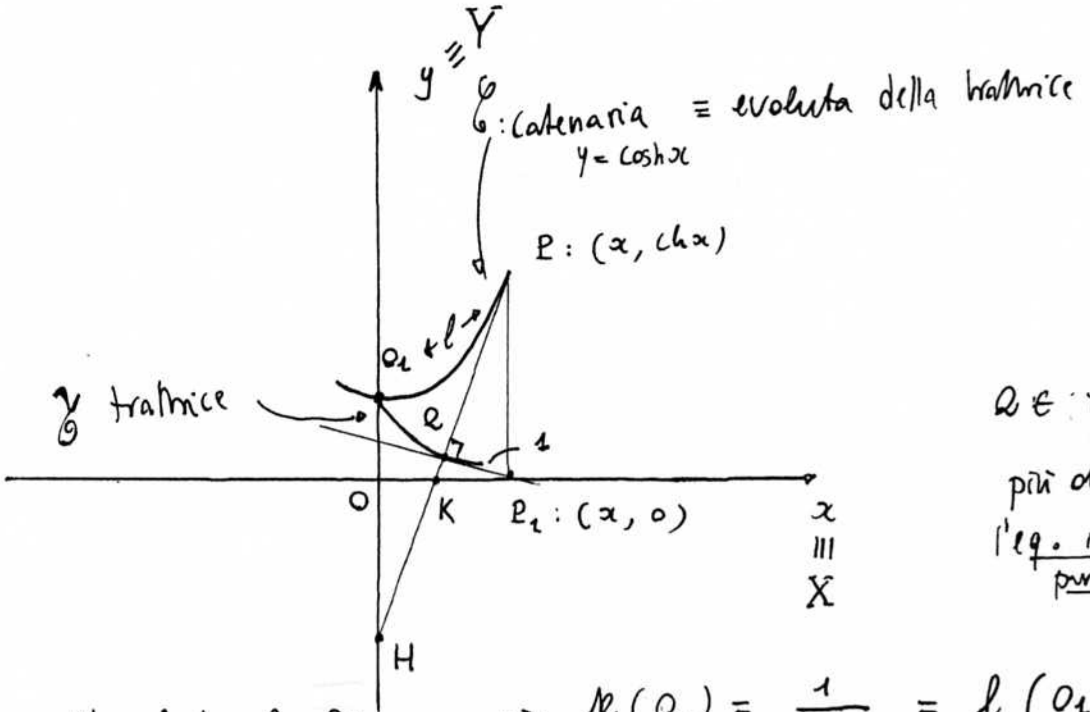
circonferenze: raggio del parallelo per P_0 = 3 — geodetica (in questo caso part.)

— meridiano per P_0 = 1 — geodetica (sempre: è un meridiano)

* indicatrice di Dupin: $\frac{1}{3}\xi^2 + \eta^2 = 1$ (ellisse)

direzioni asintotiche immaginarie

2



$Q \in$ trattrice

più oltre ricaviamo l'eq. in termini del parametro x

★ $\mathcal{C}$ è l'evoluta di γ $\Rightarrow$ $k(Q) = \dfrac{1}{\rho(Q)} = \underbrace{l(O_1, P)}_{\text{l. arco di catenaria}}^{-1} \equiv l^{-1}$

[i.e. luogo dei centri di curvatura]

$$l = \sinh x \quad \Rightarrow \quad k(Q) = \frac{1}{\sinh x}$$

calcolo di l :

$$y = \cosh x$$
$$y' = \sinh x$$
$$l = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2(\xi)}\, d\xi$$
$$= \int_0^x \sqrt{\underbrace{1 + \sinh^2 \xi}_{\cosh \xi}}\, d\xi$$
$$= \int_0^x \cosh \xi \, d\xi$$
$$= \sinh \xi \Big|_0^x = \sinh x$$

proprietà dell'evoluta di una curva

Calcoliamo $\overline{QH}$ (gran normale).

Determiniamo la retta tangente alla catenaria in P :

$$Y - \cosh x = \sinh x \cdot (X - x)$$

! necessario un cambiamento provvisorio di notazione

intersechiamola con l'asse y $(X = 0)$

$$Y = \cosh x - x \sinh x$$
$$\Rightarrow \quad H : (0, \cosh x - x \sinh x)$$

determiniamo l'eq. della retta tangente alla trattrice in Q
$\equiv$ retta per P_1 ortogonale a PH ★

$$Y = -\frac{1}{\sinh x}(X - x) \qquad (m m^{\perp} = -1)$$

$$Q: \begin{cases} Y - \cosh x = \sinh x\,(X - x) \\ Y = -\dfrac{1}{\sinh x}(X - x) \end{cases} \qquad x \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad -\sinh x \cdot Y = \frac{Y - \cosh x}{\sinh x}$$

$$\Rightarrow \quad -\sinh^2 x \; Y = Y - \cosh x$$

$$Y \cdot (\underbrace{1 + \sinh^2 x}_{\cosh^2 x}) = \cosh x$$

$$Y = \frac{1}{\cosh x}$$

$$\Rightarrow \quad X - x = -\sinh x \cdot Y = -\tanh x$$

$$\Rightarrow \quad X = x - \tanh x$$

$$\Rightarrow \quad Q: \left(x - \tanh x, \; \frac{1}{\cosh x}\right)$$

eq. par. di γ

$$\left(H: \; (0, \cosh x - x \sinh x)\right)$$

Calcoliamo la grannormale $\overline{QH}$

$$\overline{QH}^2 = (x-\tanh x)^2 + \underbrace{\left(\frac{1}{\cosh x} - \cosh x + x \sinh x\right)^2}_{A}$$

$$A = \left(\frac{\overbrace{1-\cosh^2 x}^{-\sinh^2 x}}{\cosh x} + x \sinh x\right)^2 =$$

$$= \left(-\sinh x \tanh x + x \sinh x\right)^2 =$$

$$= \sinh^2 x \,(x - \tanh x)^2$$

$$\Rightarrow \quad \overline{QH}^2 = (x-\tanh x)^2 (1+\sinh^2 x) =$$

$$= (x-\tanh x)^2 \cdot \cosh^2 x$$

⚠ ai segni!

$$\Rightarrow \quad \overline{QH} = \underbrace{(x - \tanh x)}_{>0 \text{ per } x > 0} \cosh x$$

curvatura gaussiana

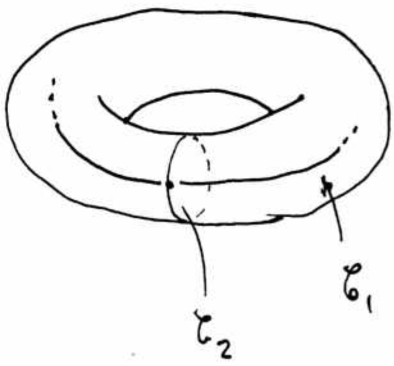
$$\Rightarrow \quad K = k_1 k_2 = +\frac{1}{\sinh x} \cdot \left(-\frac{1}{\cosh x (x - \tanh x)}\right)$$

$$= -\frac{1}{sh \cdot ch \cdot x - sh \cdot ch \cdot \frac{sh}{ch}} = -\frac{1}{sh\,[ch \cdot x - sh]}$$

$$= -\frac{1}{\sinh x \,[\cosh x \cdot x - \sinh x]}$$

! curvatura negativa ma non costante

(3)

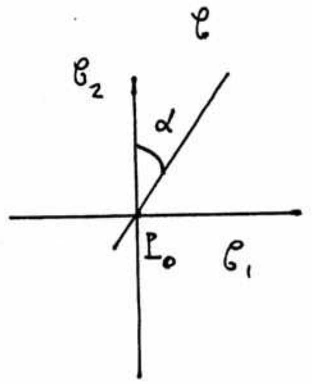


$\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ sono <u>geodetiche</u>,

una ($\mathcal{C}_2$) poichè è un <u>meridiano</u>

e l'altra ($\mathcal{C}_1$) poichè è subito visto

che $k_g(\mathcal{C}_1) \equiv 0$

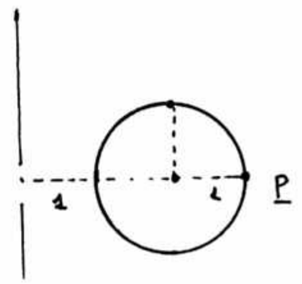


Successivamente, in base al <u>teorema</u> <u>di Clairaut</u>, deve essere

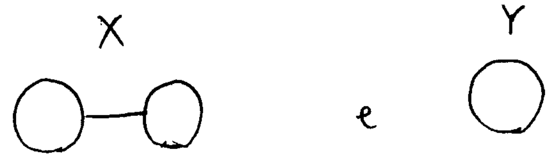
$$\underbrace{3}_{r_{P_0}} \sin\alpha = \underbrace{2}_{r_{\mathcal{C}}} \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1} = 2$$

$$\Rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \arcsin\frac{2}{3} \qquad \left(> \frac{\pi}{3} \right)$$

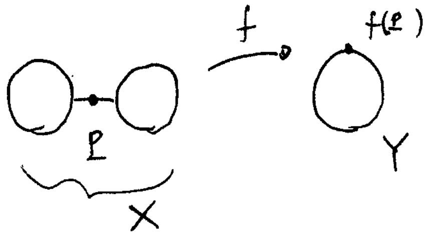


(4)



<u>sono</u> entrambi <u>compatti</u> e <u>connessi</u>, ma <u>non</u> sono <u>omeomorfi</u>. Se lo fossero, e detto

$f: X \to Y$ un tale omeomorfismo,



$$f\big|_{X\setminus\{p\}} : X\setminus\{p\} \to Y\setminus\{f(p)\}$$

risulterebbe pure un omeomorfismo, ma ciò è <u>impossibile</u> in quanto $X\setminus\{p\}$ è <u>sconnesso</u>, mentre $Y\setminus\{f(p)\}$ è <u>connesso</u>.