

Sistemi - Modulo di Sistemi a Eventi Discreti

Laurea Magistrale in Ingegneria e Scienze Informatiche
Tiziano Villa

17 Giugno 2011

Nome e Cognome:

Matricola:

Posta elettronica:

problema	punti massimi	i tuoi punti
problema 1	10	
problema 2	10	
problema 3	10	
totale	30	

1. (a) Si consideri la seguente macchina a stati finiti M_2 :

- stati: s_1 con s_1 stato iniziale;
- due variabili d'ingresso $X = \{0, 1\}$ e $V = \{0, 1\}$, due variabili d'uscita $U = \{0, 1\}$ e $Z = \{0, 1\}$;
- transizione da s_1 a s_1 : 00/00,
transizione da s_1 a s_1 : 01/11,
transizione da s_1 a s_1 : 10/00,
transizione da s_1 a s_1 : 11/11.

Siano date le seguenti macchine a stati finiti.

M_1 :

- stati: a_1 con a_1 stato iniziale;
- una variabile d'ingresso $U = \{0, 1\}$, una variabile d'uscita $V = \{0, 1\}$;
- transizione da a_1 a a_1 : 0/1,
transizione da a_1 a a_1 : 1/0.

M'_1 :

- stati: a_1 con a_1 stato iniziale;
- una variabile d'ingresso $U = \{0, 1\}$, una variabile d'uscita $V = \{0, 1\}$;
- transizione da a_1 a a_1 : 0/0,
transizione da a_1 a a_1 : 1/1.

M''_1 :

- stati: a_1 con a_1 stato iniziale;
- una variabile d'ingresso $U = \{0, 1\}$, una variabile d'uscita $V = \{0, 1\}$;
- transizione da a_1 a a_1 : 0/0,
transizione da a_1 a a_1 : 1/0.

M'''_1 :

- stati: a_1 con a_1 stato iniziale;
- una variabile d'ingresso $U = \{0, 1\}$, una variabile d'uscita $V = \{0, 1\}$;
- transizione da a_1 a a_1 : 1/1,
transizione da a_1 a a_1 : 0/1.

Si chiudano ad anello le varianti della macchina M_1 con la macchina M_2 , eliminando i segnali U e V per ottenere una macchina composta con ingresso X e uscita Z ; si determini quando la composizione e' ben formata e si mostri la composizione in caso affermativo. Precisamente, si risponda alle seguenti domande:

- i. La composizione di M_1 e M_2 e' ben formata ? Se si, si costruisca la macchina composta.

Traccia di soluzione.

Si noti che l'analisi del punto fisso deve essere svolta rispetto alle variabili U e V che sono eliminate dalla composizione. In altri termini, per ogni stato del prodotto delle macchine da comporre (a partire dal prodotto degli stati iniziali) si deve verificare se esiste un unico valore della coppia di variabili U, V tale che in tale stato del prodotto sia definita univocamente l'uscita Z in funzione dell'ingresso X .

La composizione di M_1 e M_2 non e' ben formata, perche' non c'e' alcun punto fisso.

- ii. La composizione di M'_1 e M_2 e' ben formata ? Se si, si costruisca la macchina composta.

Traccia di soluzione.

La composizione di M'_1 e M_2 non e' ben formata, perche' non c'e' un punto fisso unico.

- iii. La composizione di M''_1 e M_2 e' ben formata ? Se si, si costruisca la macchina composta.

Traccia di soluzione.

La composizione di M''_1 e M_2 e' ben formata, perche' c'e' un punto fisso unico $U/V = 0/0$. La macchina composta $M''_1 \bullet M_2$ segue:

- stati: (a_1, s_2) con (a_1, s_2) stato iniziale;
- una variabile d'ingresso $X = \{0, 1\}$, una variabile d'uscita $Z = \{0, 1\}$;
- transizione da (a_1, s_2) a (a_1, s_2) : $0/0$,
transizione da (a_1, s_2) a (a_1, s_2) : $1/0$.

- iv. La composizione di M'''_1 e M_2 e' ben formata ? Se si, si costruisca la macchina composta.

Traccia di soluzione.

La composizione di M'''_1 e M_2 e' ben formata, perche' c'e' un punto fisso unico $U/V = 1/1$. La macchina composta $M'''_1 \bullet M_2$ segue:

- stati: (a_1, s_2) con (a_1, s_2) stato iniziale;
- una variabile d'ingresso $X = \{0, 1\}$, una variabile d'uscita $Z = \{0, 1\}$;
- transizione da (a_1, s_2) a (a_1, s_2) : 0/1,
transizione da (a_1, s_2) a (a_1, s_2) : 1/1.

(b) Si considerino le seguenti macchine a stati finiti M_2 e M_1^5 .

M_2 :

- stati: s_1, s_2, s_3 con s_1 stato iniziale;
- due variabili d'ingresso $X = \{0, 1\}$ e $V = \{0, 1\}$, due variabili d'uscita $U = \{0, 1\}$ e $Z = \{0, 1\}$;
- transizione da s_1 a s_1 : $1 - / 11$,
transizione da s_1 a s_2 : $00/10$,
transizione da s_1 a s_3 : $01/10$,
transizione da s_2 a s_1 : $-0/01$,
transizione da s_2 a s_3 : $-1/10$,
transizione da s_3 a s_1 : $-1/01$,
transizione da s_3 a s_2 : $-0/00$.

M_1^5 :

- stati: s_a, s_b, s_c, s_d con s_a stato iniziale;
- una variabile d'ingresso $U = \{0, 1\}$, una variabile d'uscita $V = \{0, 1\}$;
- transizione da s_a a s_d : $0/-$,
transizione da s_a a s_b : $1/1$,
transizione da s_b a s_a : $0/1$,
transizione da s_b a s_c : $1/0$,
transizione da s_c a s_a : $0/0$,
transizione da s_c a s_c : $1/0$,
transizione da s_d a s_d : $-/-$.

- i. Si chiudano ad anello la macchina M_1^5 con la macchina M_2 , eliminando i segnali U e V per ottenere una macchina composta con ingresso X e uscita Z . La composizione di M_1^5 e M_2 è ben formata? Se sì, si costruisca la macchina composta.
- ii. Si minimizzi il numero degli stati della macchina composta.

Traccia di soluzione.

La composizione $M_2 \bullet M_1^5$ e' ben formata ed e' definita come segue:

- stati: $(s_1, s_a), (s_1, s_b), (s_1, s_c), (s_2, s_c), (s_3, s_b)$ con (s_1, s_a) stato iniziale;
- una variabile d'ingresso $X = \{0, 1\}$, una variabile d'uscita $Z = \{0, 1\}$;
- transizione da (s_1, s_a) a (s_1, s_b) : $1/1$,
transizione da (s_1, s_a) a (s_3, s_b) : $0/0$,
transizione da (s_1, s_b) a (s_1, s_c) : $1/1$,
transizione da (s_1, s_b) a (s_2, s_c) : $0/0$,
transizione da (s_1, s_c) a (s_1, s_c) : $1/1$,
transizione da (s_1, s_c) a (s_2, s_c) : $0/0$,
transizione da (s_2, s_c) a (s_1, s_a) : $-/1$,
transizione da (s_3, s_b) a (s_1, s_a) : $-/1$.

Minimizzando la macchina composta precedente, se ne ottiene una con due soli stati come segue:

- stati: s_A, s_B con s_A stato iniziale;
- una variabile d'ingresso $X = \{0, 1\}$, una variabile d'uscita $Z = \{0, 1\}$;
- transizione da s_A a s_A : $1/1$,
transizione da s_A a s_B : $0/0$,
transizione da s_B a s_A : $-/1$.

2. Una rete di Petri marcata e' specificata da una quintupla: $\{P, T, A, w, x\}$, dove P sono i posti, T le transizioni, A gli archi, w la funzione di peso sugli archi, e x il vettore di marcamento (numero di gettoni per posto). $I(t_i)$ indica l'insieme dei posti in ingresso alla transizione t_i , $O(t_j)$ indica l'insieme dei posti in uscita dalla transizione t_j .

Si consideri la rete di Petri P_{g1-29} definita da:

- $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$
- $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$
- $A = \{(p_1, t_1), (p_2, t_2), (p_3, t_3), (p_4, t_4), (t_1, p_2), (t_2, p_3), (t_3, p_2), (t_2, p_4)\}$
- $\forall i, j \ w(p_i, t_j) = 1$, tranne che $w(p_4, t_4) = 4$
- $\forall i, j \ w(t_i, p_j) = 1$, tranne che $w(t_2, p_4) = 2$

Sia $x_0 = [1, 0, 0, 0]$ la marcatura iniziale.

- (a) Si disegni il grafo della rete di Petri P_{g1-29} .

(b) Si costruiscano il grafo di copertura e l'albero di copertura della rete di Petri P_{g1-29} .

Traccia di soluzione.

Albero di copertura

$$\begin{array}{l}
 [1, 0, 0, 0] \xrightarrow{t_1} [0, 1, 0, 0] \xrightarrow{t_2} [0, 0, 1, 2] \xrightarrow{t_3} [0, 1, 0, \omega] \\
 [0, 1, 0, \omega] \xrightarrow{t_4} [0, 1, 0, \omega] D \xrightarrow{t_4} [0, 0, 1, \omega] D \\
 \quad \quad \quad \xrightarrow{t_2} [0, 0, 1, \omega] \xrightarrow{t_3} [0, 1, 0, \omega] D
 \end{array}$$

La differenza tra l'albero di copertura e il grafo di copertura e' che nel primo si riportano esplicitamente i nodi duplicati (contrassegnati con D , da cui poi si arresta la ricerca) e nel secondo al loro posto si hanno lati diretti al nodo gia' esistente. Ad es. le marcature $[0, 1, 0, \omega]$ e $[0, 0, 1, \omega]$ hanno un autoanello sotto t_4 al posto delle transizioni sotto t_4 ai nodi rispettivi $[0, 1, 0, \omega] D$ e $[0, 0, 1, \omega] D$; inoltre c'e' un lato da $[0, 0, 1, \omega]$ a $[0, 1, 0, \omega]$ sotto t_3 alla posto della transizione sotto t_3 da $[0, 0, 1, \omega]$ $[0, 1, 0, \omega] D$.

(c) La marcatura $[0, 1, 1, 0]$ e' raggiungibile ?

Traccia di soluzione.

No. Questa marcatura non e' contenuta in nessuna dell'albero di copertura.

(d) La marcatura $[0, 1, 0, 20]$ e' raggiungibile ?

Traccia di soluzione.

Si. E' verificata la condizione necessaria (ma non sufficiente) che questa marcatura sia contenuta in una dell'albero di copertura. In quest'esempio si puo' verificare che essa e' proprio raggiungibile.

(e) La marcatura $[0, 1, 0, 21]$ e' raggiungibile ?

Traccia di soluzione.

No. Anche se questa marcatura e' contenuta in una dell'albero di copertura, tale condizione e' necessaria ma non sufficiente affinche' sia raggiungibile. In quest'esempio c'e' sempre un numero pari di gettoni nel posto p_4 .

(f) A partire da x_0 , $t_1 t_2 t_4$ e' una successione di scatti ammissibile ?

Traccia di soluzione.

No. Questa sequenza non compare nell'albero di copertura.

(g) A partire da x_0 , $t_1 t_2 t_3$ e' una successione di scatti ammissibile ?

Traccia di soluzione.

Si. E' verificata la condizione necessaria (ma non sufficiente) che questa sequenza compaia nell'albero di copertura. In quest'esempio si puo' verificare che tale sequenza puo' scattare.

(h) A partire da x_0 , $t_1 t_2 t_3 t_4$ e' una successione di scatti ammissibile ?

Traccia di soluzione.

No. Anche se questa sequenza compare nell'albero di copertura, tale condizione e' necessaria ma non sufficiente. Alla transizione t_4 servono 4 gettoni per scattare, percio' la transizione t_2 deve scattare almeno 2 volte prima che possa scattare t_4 .

- (i) Si definisca la limitatezza di un posto in una rete di Petri e la limitatezza di una rete di Petri.

Esiste una condizione necessaria e sufficiente per verificare la limitatezza di un posto ?

Quali posti sono limitati (con che limite di gettoni) e quali no nella rete di Petri P_{g1-29} ?

Traccia di soluzione.

Un posto p e' limitato con limite k se e solo se nell'albero di copertura k e' il massimo valore nel posto p per tutti i nodi.

Un posto p e' illimitato se e solo se nell'albero di copertura compare un nodo con valore di ω nel posto p .

In definitiva, il grafo di copertura contiene l'informazione per una condizione necessaria e sufficiente per la limitatezza.

I posti p_1, p_2, p_3 sono 1-limitati; p_4 e' illimitato.

3. Siano dati K e $M = \overline{M}$ linguaggi sull'alfabeto di eventi E , gli eventi controllabili $E_c \subseteq E$, gli eventi osservabili $E_o \subseteq E$, e sia P la proiezione da E^* a E_o^* .

- (a) Si presenti intuitivamente la nozione di K osservabile rispetto a M, E_o, E_c e poi la si scriva formalmente, commentando come la definizione matematica rispecchi puntualmente la nozione intuitiva.

Traccia di soluzione.

Si consultino le dispense per i dettagli.

Definizione intuitiva: se non si possono differenziare due stringhe in base alla loro osservazione, allora esse dovrebbero richiedere la medesima azione di controllo.

Si considerino i linguaggi K e $M = \overline{M}$ definiti sull'alfabeto di eventi E , con $E_c \subseteq E$, $E_o \subseteq E$ e P la proiezione naturale da E^* a E_o^* .

Si dice che K e' osservabile rispetto a M, E_o, E_c se per tutte le stringhe $s \in \overline{K}$ e per tutti gli eventi $\sigma \in E_c$

$$(s\sigma \notin \overline{K}) \wedge (s\sigma \in M) \Rightarrow P^{-1}[P(s)]\sigma \cap \overline{K} = \emptyset.$$

L'insieme di stringhe denotato dal termine $P^{-1}[P(s)]\sigma \cap \overline{K}$ contiene tutte le stringhe che hanno la medesima proiezione di s e possono essere prolungate in \overline{K} con il simbolo σ . Se tale insieme non e' vuoto, allora \overline{K} contiene due stringhe s e s' tali che $P(s) = P(s')$ per cui $s\sigma \notin \overline{K}$ e $s'\sigma \in \overline{K}$. Tali due stringhe richiederebbero un'azione di controllo diversa rispetto a σ (disabilitare σ nel caso di s , abilitare σ nel caso di s'), ma un supervisore non saprebbe distinguere tra s e s' per l'osservabilita' ristretta, e quindi non potrebbe esistere un supervisore che ottiene esattamente il linguaggio \overline{K} .

(b) Siano $E = \{u, b\}$ e $M = \overline{\{ub, bu\}}$, $E_o = \{b\}$, $E_c = \{u\}$.

Applicando la definizione, si verifichi se il linguaggio $K_1 = \{bu\}$ e' osservabile rispetto a M, E_o, E_c .

Traccia di soluzione.

Si noti che $M = \{\epsilon, u, b, ub, bu\}$ e $\overline{K_1} = \{\epsilon, b, bu\}$, $\sigma = u$.

Dobbiamo dimostrare che per ogni stringa $s \in \overline{K_1}$ e ogni evento $\sigma \in E_c$ si ha

$$(s\sigma \notin \overline{K_1}) \wedge (s\sigma \in M) \Rightarrow P^{-1}[P(s)]\sigma \cap \overline{K_1} = \emptyset.$$

- Si consideri la stringa $s = \epsilon \in \overline{K_1}$.

La stringa $s = \epsilon$ puo' essere estesa fuori da $\overline{K_1}$ per mezzo dell'evento controllabile $\sigma = u$, cioe' $s\sigma = \epsilon u = u \notin \overline{K_1}$; dato che $s\sigma = u \in M$, l'antecedente della definizione e' vero.

Verifichiamo se il conseguente e' vero. Non c'e' un'altra stringa $s'u \in \overline{K_1}$ tale che $P(s) = P(s') = \epsilon$ e $s'\sigma \in \overline{K_1}$ (cioe' non c'e' un'altra stringa in $\overline{K_1}$ che inizia con una sottostringa la cui proiezione e' ϵ ed e' conclusa dal simbolo u). Ripetendo quanto detto algebricamente, si ha $P^{-1}[P(s)]\sigma \cap \overline{K_1} = \emptyset$, poiche' $P^{-1}[P(s)] = P^{-1}[P(\epsilon)] = P^{-1}[\epsilon] = u^*$ da cui $P^{-1}[P(s)]\sigma = u^*u = u^+$ e $P^{-1}[P(s)]\sigma \cap \overline{K_1} = \emptyset$, cioe' il conseguente e' vero. Percio' l'implicazione e' vera.

- Si consideri la stringa $s = b \in \overline{K_1}$. Non c'e' un evento controllabile che estenda questa stringa s in M ma non in $\overline{K_1}$, cioe' $s\sigma = bu \in \overline{K_1}$ e $s\sigma = bu \in M$, per cui l'antecedente della definizione e' falso e percio' l'implicazione e' vera.
- Si consideri la stringa $s = bu \in \overline{K_1}$. Non c'e' un evento controllabile che estenda questa stringa s in M , cioe' $s\sigma = buu \notin \overline{K_1}$ e $s\sigma = buu \notin M$, per cui l'antecedente della definizione e' falso e percio' l'implicazione e' vera.

Si conclude che K_1 e' osservabile rispetto a M, E_o, E_c .