CAPITOLO 4

Il determinante

1. Motivazione

Ogni matrice $\mathbf{A} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ può essere considerata come una trasformazione f del piano in sé: identificando un punto come un vettore colonna $\mathbf{P} = [a\ b]^T \in \mathbb{R}^2$, a esso possiamo associare il punto

$$f(\mathbf{P}) = \mathbf{A} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

La composizione di due trasformazioni di questo tipo corrisponde come sappiamo al prodotto delle matrici associate.

Vediamo un caso particolare: se $\mathbf{A} = \mathbf{E}_{12}$, questa trasformazione è la riflessione attorno alla bisettrice del primo e terzo quadrante. In una trasformazione del genere, i percorsi cambiano senso di percorrenza: se immaginiamo di percorrere un triangolo in senso antiorario, il triangolo trasformato verrà percorso in senso orario.

Se invece $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1(c)$, avremo $f([a\ b]^T) = [ca\ b]$. Se proviamo a confrontare l'area di un triangolo con quella del triangolo trasformati, troviamo che la seconda è c volte la prima. Per esempio, il triangolo di vertici $[0\ 0]^T$, $[1\ 0]^T$, $[1\ 1]^T$ ha area $1/2$. Il triangolo trasformato ha vertici $[0\ 0]^T$, $[c\ 0]^T$, $[c\ 1]^T$ e ha area $c/2$.

Proviamo invece il caso $\mathbf{A} = \mathbf{E}_{21}(d)$. Il trasformato dello stesso triangolo di prima ha vertici $[0\ 0]^T$, $[1\ d]^T$, $[1\ 1+d]$ che ha area ancora $1/2$.

Non è difficile verificare che lo stesso accade per ogni triangolo: le trasformazioni $\mathbf{E}_i(c)$ moltiplicano le aree per c, le trasformazioni $\mathbf{E}_{ij}(d)$ non modificano le aree.

Si potrebbe eseguire un calcolo simile nello spazio tridimensionale. Si vedrebbe che le trasformazioni $\mathbf{E}_i(c)$ moltiplicano i volumi per c e che le $\mathbf{E}_{ij}(d)$ non li modificano. Invece le trasformazioni $\mathbf{E}_{ij}$ cambiano l'orientazione: una mano destra diventa una mano sinistra.

Se poi la matrice $\mathbf{A}$ è singolare, l'immagine della trasformazione dello spazio è tutta contenuta in un piano (o addirittura in una retta e, se la matrice $\mathbf{A}$ è nulla, in un punto): in tal caso i volumi si annullano.

2. Funzioni determinanti

Consideriamo una *funzione determinante*, cioè un'applicazione $\varphi\colon \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ che abbia le proprietà seguenti:

(D_1) per ogni $\mathbf{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, $\varphi(\mathbf{A}\mathbf{E}_i(c)) = c\varphi(\mathbf{A})$;
(D_2) per ogni $\mathbf{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, $\varphi(\mathbf{A}\mathbf{E}_{ij}(d)) = \varphi(\mathbf{A})$;
(D_3) per ogni $\mathbf{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, $\varphi(\mathbf{A}\mathbf{E}_{ij}) = -\varphi(\mathbf{A})$.

Dimostreremo che una tale applicazione è essenzialmente unica. Il succo della definizione è che il comportamento della funzione φ è buono rispetto alle trasformazioni elementari sulle colonne. Notiamo che avremmo potuto altrettanto bene considerare la premoltiplicazione per matrici elementari, esaminando il comportamento di φ rispetto alle trasformazioni elementari sulle righe. Vedremo infatti che sarà comunque $\varphi(\mathbf{A}) = \varphi(\mathbf{A}^T)$.

LEMMA 2.1. *Se $\varphi\colon \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ è una funzione determinante e $\mathbf{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ ha una colonna nulla, allora $\varphi(\mathbf{A}) = 0$.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che la colonna nulla sia la i-esima. Allora $\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{E}_i(2)$ e, per la proprietà (D_1), $\varphi(\mathbf{A}) = \varphi(\mathbf{A}\mathbf{E}_i(2)) = 2\varphi(\mathbf{A})$, da cui la tesi. □

LEMMA 2.2. *Se* $\varphi\colon \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ *è una funzione determinante e* $\mathbf{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ *è singolare, allora* $\varphi(\mathbf{A}) = 0$.

DIMOSTRAZIONE. Siccome $\mathbf{A}$ è singolare, una colonna è combinazione lineare delle altre; non è restrittivo supporre che sia la prima, usando la proprietà (D_3) per scambiare le colonne, eventualmente.

Abbiamo allora, scritta $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \dots\ \mathbf{a}_n]$,

$$\mathbf{a}_1 = \alpha_2\mathbf{a}_2 + \alpha_3\mathbf{a}_3 + \dots + \alpha_n\mathbf{a}_n.$$

Se applichiamo nell'ordine le trasformazioni elementari $\mathbf{E}_{21}(-\alpha_2)$, $\mathbf{E}_{31}(-\alpha_3)$, …, $\mathbf{E}_{n1}(-\alpha_n)$, la matrice $\mathbf{B}$ che otteniamo ha la prima colonna nulla, quindi, per il lemma precedente, $\varphi(\mathbf{B}) = 0$. Ma

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{E}_{21}(-\alpha_2)\mathbf{E}_{31}(-\alpha_3)\dots\mathbf{E}_{n1}(-\alpha_n)$$

e quindi, per la proprietà (D_2), $\varphi(A) = 0$. □

TEOREMA 2.3. *Dato* $a \in \mathbb{C}$*, esiste al più una funzione determinante* $\varphi\colon \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ *tale che* $\varphi(\mathbf{I}_n) = a$.

DIMOSTRAZIONE. L'applicazione φ è determinata una volta che ne conosciamo il valore sulle matrici non singolari, per il lemma precedente. Ora, una matrice non singolare $\mathbf{A}$ è prodotto di matrici elementari, quindi, per le proprietà imposte alla funzione determinante φ, possiamo calcolare $\varphi(\mathbf{A})$ una volta che conosciamo il valore di φ sulle matrici elementari:

(1) $\varphi(\mathbf{E}_i(c)) = \varphi(\mathbf{I}\mathbf{E}_i(c)) = c\varphi(\mathbf{I}) = ca$;
(2) $\varphi(\mathbf{E}_{ij}(d)) = \varphi(\mathbf{I}\mathbf{E}_{ij}(d)) = \varphi(\mathbf{I}) = a$;
(3) $\varphi(\mathbf{E}_{ij}) = \varphi(\mathbf{I}\mathbf{E}_{ij}) = -\varphi(\mathbf{I}) = -a$. □

Prima di dimostrare l'esistenza di una funzione determinante, vediamo due proprietà importanti.

TEOREMA 2.4 (Binet). *Se* $\varphi\colon \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ *è una funzione determinante e* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$*, allora* $\varphi(\mathbf{AB}) = \varphi(\mathbf{A})\varphi(\mathbf{B})$.

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo una matrice $\mathbf{C} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ e consideriamo la funzione $\psi\colon \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ definita da

$$\psi(\mathbf{X}) = \varphi(\mathbf{CX}).$$

Allora

$$\begin{aligned}
\psi(\mathbf{X}\mathbf{E}_i(c)) &= \varphi(\mathbf{CX}\mathbf{E}_i(c)) = c\varphi(\mathbf{CX}) = c\psi(\mathbf{X});\\
\psi(\mathbf{X}\mathbf{E}_{ij}(d)) &= \varphi(\mathbf{CX}\mathbf{E}_{ij}(d)) = \varphi(\mathbf{CX}) = \psi(\mathbf{X});\\
\psi(\mathbf{X}\mathbf{E}_{ij}) &= \varphi(\mathbf{CX}\mathbf{E}_{ij}) = -\varphi(\mathbf{CX}) = -\psi(\mathbf{X}).
\end{aligned}$$

Dunque ψ è una funzione determinante e $\psi(\mathbf{I}) = \varphi(\mathbf{C})$.

Se consideriamo la funzione $\psi'\colon \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ definita da

$$\psi'(\mathbf{X}) = \varphi(\mathbf{C})\varphi(\mathbf{X}),$$

con verifiche del tutto analoghe alle precedenti troviamo che anche ψ' è una funzione determinante e che $\psi'(\mathbf{I}) = \varphi(\mathbf{C})$. Dunque $\psi = \psi'$. Calcolando per $\mathbf{C} = \mathbf{A}$ e $\mathbf{X} = \mathbf{B}$, abbiamo la tesi. □

TEOREMA 2.5. *Se* $\varphi\colon \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ *è una funzione determinante e* $\mathbf{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$*, allora* $\varphi(\mathbf{A}^T) = \varphi(\mathbf{A})$.

DIMOSTRAZIONE. La tesi è ovvia se $\mathbf{A}$ è singolare, perché in tal caso lo è anche $\mathbf{A}^T$. Supponiamo allora $\mathbf{A}$ non singolare e scriviamola come prodotto di matrici elementari $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\dots\mathbf{E}_r$ che dà

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{E}_r^T\dots\mathbf{E}_2^T\mathbf{E}_1^T,$$

perciò

$$\varphi(\mathbf{A}^T) = \varphi(\mathbf{E}_r^T)\dots\varphi(\mathbf{E}_2^T)\varphi(\mathbf{E}_1^T)$$

e abbiamo la tesi, poiché $\mathbf{E}_i(c)^T = \mathbf{E}_i(c)$, $\mathbf{E}_{ij}(d)^T = \mathbf{E}_{ji}(d)$ e $\mathbf{E}_{ij}^T = \mathbf{E}_{ij}$. □

Con la stessa tecnica si dimostra anche il risultato seguente.

TEOREMA 2.6. *Supponiamo esista una funzione determinante* $\varphi_1\colon \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ *tale che* $\varphi_1(\mathbf{I}) = 1$. *Allora, per ogni* $a \in \mathbb{C}$, *l'unica funzione determinante* $\varphi_a\colon \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ *tale che* $\varphi_a(\mathbf{I}) = a$ *si ottiene ponendo, per* $\mathbf{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\varphi_a(\mathbf{A}) = a\varphi_1(\mathbf{A}).$$

Nella sezione successiva dimostreremo che una funzione determinante come quella del teorema *esiste* e quindi saremo autorizzati a chiamarla *la funzione determinante*. Useremo allora una notazione abbreviata che vale per ogni matrice: se $\mathbf{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, invece di scrivere $\varphi^{(n)}(\mathbf{A})$ scriveremo $\det \mathbf{A}$; questo numero sarà chiamato *determinante* di $\mathbf{A}$.

3. Esistenza di funzioni determinanti

Quanto abbiamo visto finora dice che le funzioni determinanti hanno alcune proprietà molto importanti, purché tali funzioni esistano. Ci sono vari modi di dimostrarne l'esistenza; quello che scegliamo ci permetterà di dare anche un metodo per il calcolo.

Quanto abbiamo visto prima riguardo all'unicità delle funzioni determinanti potrebbe apparire una dimostrazione anche dell'esistenza: si scrive una matrice non-singolare $\mathbf{A}$ come prodotto di matrici elementari e le proprietà richieste permetterebbero di calcolarne il determinante. Tuttavia la scrittura di $\mathbf{A}$ come prodotto di matrici elementari non è affatto unica, quindi occorrerebbe verificare che da due scritture del genere si ricava lo stesso numero, cosa tutt'altro che facile. Per questo preferiamo seguire una strada diversa.

TEOREMA 3.1. *Per ogni* $n \geq 1$ *esiste una funzione determinante* $\varphi^{(n)}\colon \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ *tale che* $\varphi^{(n)}(I) = 1$.

DIMOSTRAZIONE. L'asserto è ovvio per $n = 1$: l'applicazione identità di $\mathrm{M}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ soddisfa alle richieste. Perciò faremo induzione su n.

Supponiamo dunque $n > 1$ e di avere già a disposizione la funzione determinante $\varphi^{(n-1)}$, che quindi possiamo calcolare su ogni matrice che si ottiene da una data matrice $n \times n$ cancellandone una riga e una colonna. Fissiamo alcune notazioni: se $\mathbf{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, denoteremo con a_{ij} il suo coefficiente di posto (i, j) e con $\mathbf{A}_{ij}$ la matrice che si ottiene da $\mathbf{A}$ cancellandone la i-esima riga e la j-esima colonna.

Risulterà che non dovremo considerare tutte le *sottomatrici* così fatte, perché una funzione determinante assume lo stesso valore, oppure questo cambia di segno o viene moltiplicato per uno scalare, su matrici che si ottengono l'una dall'altra con trasformazioni elementari.

Definiamo allora, per $\mathbf{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\varphi(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \varphi^{(n-1)}(\mathbf{A}_{1j})$$

e verifichiamo che questa è una funzione determinante.

Consideriamo $\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{E}_k(c)$; abbiamo

$$b_{1j} = \begin{cases} a_{1j} & \text{se } j \neq k, \\ ca_{1k} & \text{se } j = k, \end{cases} \qquad \mathbf{B}_{1j} = \begin{cases} \mathbf{A}_{1j}\mathbf{E}_k(c) & \text{se } j \neq k, \\ \mathbf{A}_{1k} & \text{se } j = k. \end{cases}$$

Perciò

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{B}) &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} b_{1j} \varphi^{(n-1)}(\mathbf{B}_{1j}) \\ &= (-1)^{1+k} ca_{1k} \varphi^{(n-1)}(\mathbf{A}_{1k}) + \sum_{j \neq k}^{n} (-1)^{i+1} a_{1j} \varphi^{(n-1)}(\mathbf{A}_{1j}\mathbf{E}_k(c)) \\ &= c\varphi(\mathbf{A}) \end{aligned}$$

avendo applicato l'ipotesi induttiva per $\varphi^{(n-1)}$ e raccogliendo c.

Consideriamo $\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{E}_{12}$; nel caso generale si aggiungono solo complicazioni tecniche. Abbiamo

$$b_{1j} = \begin{cases} a_{12} & \text{se } j = 1, \\ a_{11} & \text{se } j = 2, \\ a_{1j} & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad \mathbf{B}_{1j} = \begin{cases} \mathbf{A}_{12} & \text{se } j = 1, \\ \mathbf{A}_{11} & \text{se } j = 2, \\ \mathbf{A}_{1j}\mathbf{E}_{12} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Perciò

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{B}) &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} b_{1j} \varphi^{(n-1)}(\mathbf{B}_{1j}) \\ &= (-1)^{1+1} b_{11} \varphi^{(n-1)}(\mathbf{B}_{11}) + (-1)^{1+2} b_{12} \varphi^{(n-1)}(\mathbf{B}_{12}) + \sum_{j=3}^{n} (-1)^{1+j} b_{1j} \varphi^{(n-1)}(\mathbf{B}_{1j}) \\ &= a_{12} \varphi^{(n-1)}(\mathbf{A}_{12}) - a_{11} \varphi^{(n-1)}(\mathbf{A}_{11}) + \sum_{j=3}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \varphi^{(n-1)}(\mathbf{A}_{1j}\mathbf{E}_{12}) \\ &= -(a_{11} \varphi^{(n-1)}(\mathbf{A}_{11}) + a_{12} \varphi^{(n-1)}(\mathbf{A}_{12})) + (-1) \sum_{j=3}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \varphi^{(n-1)}(\mathbf{A}_{1j}) \\ &= -\varphi(\mathbf{A}), \end{aligned}$$

applicando ancora una volta l'ipotesi induttiva.

Vediamo ora l'ultimo caso, $\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{E}_{21}(d)$; ancora esaminiamo questo caso particolare per evitare le complicazioni tecniche. Abbiamo

$$b_{1j} = \begin{cases} a_{11} + d a_{12} & \text{se } j = 1, \\ a_{1j} & \text{se } j > 1, \end{cases} \qquad \mathbf{B}_{1j} = \begin{cases} \mathbf{A}_{11} & \text{se } j = 1, \\ \mathbf{X} & \text{se } j = 2, \\ \mathbf{A}_{1j}\mathbf{E}_{21}(d) & \text{se } j > 2. \end{cases}$$

Perciò

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{B}) &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} b_{1j} \varphi^{(n-1)}(\mathbf{B}_{1j}) \\ &= (-1)^{1+1} (a_{11} + d a_{12}) \varphi^{(n-1)}(\mathbf{A}_{11}) + (-1)^{1+2} a_{12} \varphi^{(n-1)}(\mathbf{X}) + \sum_{j=3}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \varphi^{(n-1)}(\mathbf{A}_{1j}\mathbf{E}_{21}(d)) \\ &= \varphi(\mathbf{A}) + d a_{12} \varphi^{(n-1)}(\mathbf{A}_{11}) + (-1)^{1+2} a_{12} \varphi^{(n-1)}(\mathbf{X}) - (-1)^{1+2} a_{12} \varphi^{(n-1)}(\mathbf{A}_{12}) \end{aligned}$$

e la tesi sarà dimostrata se proviamo che

$$\varphi^{(n-1)}(\mathbf{X}) = \varphi^{(n-1)}(\mathbf{A}_{12}) + d\varphi^{(n-1)}(\mathbf{A}_{11}).$$

Più in generale, dimostreremo che, posto $m = n - 1$, $\varphi^{(m)}$ è *lineare nella prima colonna*, cioè che, se

$$\begin{aligned} \mathbf{X}' &= [\mathbf{x}' \ \mathbf{x}_2 \ \mathbf{x}_3 \ \dots \ \mathbf{x}_m], \\ \mathbf{X}'' &= [\mathbf{x}'' \ \mathbf{x}_2 \ \mathbf{x}_3 \ \dots \ \mathbf{x}_m], \\ \mathbf{X} &= [\mathbf{x}' + \mathbf{x}'' \ \mathbf{x}_2 \ \mathbf{x}_3 \ \dots \ \mathbf{x}_m], \end{aligned}$$

allora

$$\varphi^{(m)}(\mathbf{X}) = \varphi^{(m)}(\mathbf{X}') + \varphi^{(m)}(\mathbf{X}'').$$

Ricordiamo che sappiamo già che, se

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= [\mathbf{y} \ \mathbf{y}_2 \ \mathbf{y}_3 \ \dots \ \mathbf{y}_m], \\ \mathbf{Y}' &= [\alpha\mathbf{y} \ \mathbf{y}_2 \ \mathbf{y}_3 \ \dots \ \mathbf{y}_m], \end{aligned}$$

allora

$$\varphi^{(m)}(\mathbf{Y}') = \alpha\varphi^{(m)}(\mathbf{Y})$$

(tutti i vettori considerati sono in $\mathbb{C}^m$). È chiaro che, quando consideriamo la forma della matrice $\mathbf{A}'$ che stiamo trattando, da questa linearità segue la tesi, in quanto è proprio un caso particolare.

Possiamo senz'altro dare l'asserto per ovvio quando $m = 1$: la funzione $\varphi^{(1)}$ è l'identità su $\mathbb{C}$. Faremo pertanto induzione su m e dunque consideriamo l'asserto vero per $\varphi^{(m-1)}$. Fissiamo alcune notazioni: x_1', x_1'' e x_1 sono i coefficienti sulla prima riga di $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}''$ e $\mathbf{x}$ rispettivamente; indicheremo con $\mathbf{y}'$, $\mathbf{y}''$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{y}_j$ ($j = 2, \dots, m$) i vettori di $\mathbb{C}^{m-1}$ che si ottengono da quelli dati cancellando il coefficiente sulla prima riga.

Quando applichiamo la definizione di $\varphi^{(m)}$ alla matrice $\mathbf{X}$, dobbiamo cancellare via via una colonna, oltre alla prima riga; se cancelliamo la prima colonna, rimane la matrice

$$[\mathbf{y}_2\ \mathbf{y}_3\ \dots\ \mathbf{y}_m],$$

mentre se cancelliamo la seconda colonna otteniamo la matrice

$$[\mathbf{y}' + \mathbf{y}''\ \mathbf{y}_3\ \dots\ \mathbf{y}_m],$$

e così anche per le successive, alle quali potremo dunque applicare l'ipotesi induttiva. Con facili calcoli si ottiene allora la tesi. □

4. Come calcolare il determinante

Possiamo riassumere quanto visto nelle sezioni precedenti nel modo seguente:

TEOREMA 4.1. *Per ogni $n > 0$ esiste un'unica funzione determinante $\varphi^{(n)} \colon \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ tale che $\varphi^{(n)}(\mathbf{I}_n) = 1$.*

Per semplicità di notazione, si scrive $\varphi^{(n)}(\mathbf{A}) = \det \mathbf{A}$; il numero $\det \mathbf{A}$ si chiama *determinante* di $\mathbf{A}$. Possiamo allora, usando le notazioni precedenti, trascrivere i risultati ottenuti nel modo seguente.

TEOREMA 4.2 (Binet). *Se $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, allora*

$$\det(\mathbf{AB}) = (\det \mathbf{A})(\det \mathbf{B}).$$

TEOREMA 4.3. *Una matrice $\mathbf{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ è singolare se e solo se $\det \mathbf{A} = 0$.*

TEOREMA 4.4. *Per ogni $\mathbf{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, $\det \mathbf{A} = \det(\mathbf{A}^T)$.*

Esistono almeno due modi per calcolare il determinante di una matrice. Uno viene dalla definizione di funzione determinante, l'altro dalla dimostrazione di esistenza.

PRIMO METODO DI CALCOLO DEL DETERMINANTE. *Sia $\mathbf{A}$ una matrice $n \times n$ non singolare. Sia s il numero di scambi di riga e siano c_1, c_2, ..., c_n i pivot per ottenere da $\mathbf{A}$ una matrice in forma ridotta. Allora*

$$\det \mathbf{A} = (-1)^s c_1 c_2 \dots c_n.$$

DIMOSTRAZIONE. Scriviamo $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T\mathbf{LU}$, con $\mathbf{U}$ unitriangolare superiore, visto che $\mathbf{A}$ è non-singolare; allora

- $\mathbf{P}$ è prodotto di s matrici del tipo $\mathbf{E}_{ij}$;
- $\mathbf{L}$ è prodotto di matrici elementari dove compaiono le matrici $\mathbf{E}_1(c_1)$, $\mathbf{E}_2(c_2)$, ..., $\mathbf{E}_n(c_n)$ oltre a matrici del tipo $\mathbf{E}_{ij}(d)$;
- $\mathbf{U}$ è prodotto di matrici elementari del tipo $\mathbf{E}_{ij}(d)$.

Siccome det è una funzione determinante che vale 1 sulla matrice identità, il teorema di Binet permette di calcolare $\det \mathbf{A}$ come prodotto dei determinanti delle matrici elementari suddette. Le matrici $\mathbf{E}_{ij}(d)$ hanno determinante 1, quelle del tipo $\mathbf{E}_i(c)$ hanno determinante c e quelle del tipo $\mathbf{E}_{ij}$ hanno determinante -1. □

Vediamo alcune conseguenze del metodo di calcolo.

COROLLARIO 4.5. *Se $\mathbf{A}$ è una matrice quadrata a coefficienti reali, allora $\det \mathbf{A}$ è un numero reale.*

Dimostrazione. L'eliminazione su $\mathbf{A}$ si può eseguire interamente con numeri reali; quindi i pivot saranno reali e così il loro prodotto. □

Corollario 4.6. *Il determinante di una matrice triangolare è il prodotto degli elementi sulla diagonale.*

Dimostrazione. Una matrice triangolare è singolare se e solo se uno dei coefficienti sulla diagonale è nullo.

Se la matrice è non-singolare e triangolare superiore, i pivot dell'eliminazione, che si può eseguire senza scambi di righe, sono esattamente i coefficienti sulla diagonale.

Per le triangolari inferiori, basta applicare la trasposizione. □

Corollario 4.7. *Se* $\mathbf{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$*, allora* $\det \overline{\mathbf{A}} = \overline{\det \mathbf{A}}$*.*

Dimostrazione. Se $\mathbf{A}$ è singolare, non c'è niente da dimostrare: il coniugato di zero è zero. Supponiamo allora che $\mathbf{A}$ sia non-singolare e scriviamola nella forma $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T\mathbf{L}\mathbf{U}$, con $\mathbf{L}$ triangolare inferiore e $\mathbf{U}$ unitriangolare superiore. Allora abbiamo $\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^T\overline{\mathbf{L}}\overline{\mathbf{U}}$; per il teorema di Binet

$$\det \overline{\mathbf{A}} = (\det \mathbf{P}^T)(\det \overline{\mathbf{L}})(\det \overline{\mathbf{U}})$$

e, per il corollario precedente, $\det \overline{\mathbf{U}} = 1$. Inoltre, siccome $\det \overline{\mathbf{L}}$ è il prodotto dei coefficienti sulla diagonale, vale $\det \overline{\mathbf{L}} = \overline{\det \mathbf{L}}$. □

Corollario 4.8. *Se* $\mathbf{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$*, allora* $\det(\mathbf{A}^H) = \overline{\det \mathbf{A}}$*.*

Dimostrazione. Basta ricordare che $\mathbf{A}^H = (\overline{\mathbf{A}})^T$. □

Veniamo ora al secondo metodo di calcolo, che ricaviamo dalla dimostrazione di esistenza. Ricordiamo che denotiamo con $\mathbf{A}_{ij}$ la matrice che si ottiene da $\mathbf{A}$ cancellandone la i-esima riga e la j-esima colonna (supponendo che $\mathbf{A}$ sia $n \times n$ e che $n > 1$). Il determinante di una matrice 1×1, cioè un numero, è il numero stesso.

Le formule che enunceremo si chiamano *sviluppo del determinante per righe o per colonne* e sono dovute a Laplace.

Secondo metodo di calcolo del determinante. *Sia* $\mathbf{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$*,* $n > 1$*. Allora*

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det \mathbf{A}_{ij} \qquad (\textit{sviluppo secondo la } i\textit{-esima riga})$$

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det \mathbf{A}_{ij} \qquad (\textit{sviluppo secondo la } j\textit{-esima colonna})$$

Dimostrazione. La prima delle due formule, nel caso $i = 1$, è esattamente la formula usata per dimostrare l'esistenza delle funzioni determinanti.

Prima di dimostrarla nel caso generale, proviamo a calcolare quanti scambi di righe occorrono per portare la i-esima riga sulla prima e *far scalare* le altre. Per esempio, supponiamo $n = 5$ e di voler portare la terza riga al posto della prima, la prima al posto della seconda e la seconda al posto della terza lasciando ferme la quarta e la quinta. Se la matrice è, scritta per righe,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{R}_3 \\ \mathbf{R}_4 \\ \mathbf{R}_5 \end{bmatrix},$$

la vogliamo far diventare

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_3 \\ \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{R}_4 \\ \mathbf{R}_5 \end{bmatrix}.$$

Occorrerà impiegare la $\mathbf{E}_{13}$, poi la $\mathbf{E}_{23}$.

Supponiamo invece di voler portare la quarta riga in alto, ottenendo la matrice

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_4 \\ \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{R}_3 \\ \mathbf{R}_5 \end{bmatrix}.$$

Occorrerà la $\mathbf{E}_{14}$, poi la $\mathbf{E}_{34}$ e infine la $\mathbf{E}_{23}$.

Ci si accorge che, in ogni caso, il numero di scambi di riga necessari per portare in alto la i-esima riga è $i-1$.

Se $\mathbf{B}$ è la matrice ottenuta portando la i-esima riga in alto e facendo scalare le altre, avremo che $\det \mathbf{B} = (-1)^{i-1} \det \mathbf{A}$, perché abbiamo applicato $i-1$ scambi di righe. Inoltre $\mathbf{B}_{1j} = \mathbf{A}_{ij}$, quindi

$$\det \mathbf{A} = (-1)^{i-1} \det \mathbf{B} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i-1}(-1)^{1+j} b_{1j} \det \mathbf{B}_{1j} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det \mathbf{A}_{ij}.$$

La formula dello sviluppo per colonne segue dal fatto che $\det \mathbf{A} = \det(\mathbf{A}^T)$. □

Questo metodo di calcolo è utile quando la matrice $\mathbf{A}$ ha "molti zeri", ma non è molto efficiente nel caso generale. Infatti si richiedono n prodotti per il primo sviluppo; ciascuno dipende dal determinante di una matrice $(n-1) \times (n-1)$ e così via.

Dunque lo sviluppo completo per righe richiede un numero di moltiplicazioni piuttosto grande: $n!$ (si legge *n fattoriale* e significa $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$). Se consideriamo che $6! = 720$ e che $30! = 2{,}65 \cdot 10^{32}$ ci rendiamo conto che il metodo con l'eliminazione di Gauss è certamente più efficiente, perché richiede n^2 moltiplicazioni per il primo passo, $(n-1)^2$ per il secondo, e così via. In totale il numero di moltiplicazioni è uguale a $s_n = n(n+1)(2n+1)/6$.

Abbiamo $s_4 = 30$ e $4! = 24$; invece $s_5 = 55$ e $5! = 120$, $s_6 = 91$ e $6! = 720$. Come si vede, dalle matrici 5×5 il metodo con l'eliminazione è di gran lunga più efficiente.

Tuttavia il metodo dello sviluppo per righe o colonne è insostituibile nel caso in cui la matrice dipenda da un parametro ed è quello che si usa nel calcolo del polinomio caratteristico, che si vedrà nel prossimo capitolo.

Il metodo dei determinanti ha un uso anche nella risoluzione di sistemi lineari, più teorico che pratico, visto che richiede il calcolo di $n+1$ determinanti.

Cominciamo con una semplice considerazione: se consideriamo $j \neq k$, con $1 \le j \le n$ e $1 \le k \le n$, abbiamo

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det \mathbf{A}_{ik} = 0.$$

Infatti questa formula è lo sviluppo del determinante rispetto alla j-esima colonna della matrice che si ottiene da $\mathbf{A}$ sostituendo la j-esima colonna con la k-esima e lasciando invariate le altre. Questa matrice ha dunque due colonne uguali e quindi determinante zero. Possiamo allora scrivere

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det \mathbf{A}_{ik} = (\det \mathbf{A}) \delta_{jk}$$

dove $\delta_{jk} = 1$ se $j = k$ e $\delta_{jk} = 0$ se $j \neq k$ (sono cioè i coefficienti della matrice identità).

Questo permette di scrivere in modo esplicito l'inversa di una matrice non-singolare $\mathbf{A}$ di ordine $n > 1$. Definiamo la sua *aggiunta* nel modo seguente: $\operatorname{adj} \mathbf{A} = [\alpha_{ij}]$ dove

$$\alpha_{ji} = (-1)^{i+j} \det \mathbf{A}_{ij}.$$

In altre parole il coefficiente di posto (j,i) della matrice $\operatorname{adj} \mathbf{A}$ si calcola moltiplicando per $(-1)^{i+j}$ il determinante della matrice ottenuta cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna. Si faccia attenzione all'inversione degli indici.

Proposizione 4.9. *Se* $\mathbf{A}$ *è una matrice quadrata, allora* $(\operatorname{adj}\mathbf{A})\mathbf{A} = (\det\mathbf{A})\mathbf{I}$*. In particolare, se* A *è non-singolare,* $\mathbf{A}^{-1} = (\det\mathbf{A})\operatorname{adj}\mathbf{A}$*.*

Dimostrazione. Basta eseguire il calcolo di $(\operatorname{adj}\mathbf{A})\mathbf{A}$; il coefficiente di posto (k, j) in questo prodotto è

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+k} \det \mathbf{A}_{ik} = (\det\mathbf{A})\delta_{jk},$$

quindi

$$(\operatorname{adj}\mathbf{A})\mathbf{A} = (\det\mathbf{A})\mathbf{I}_n,$$

cioè la tesi. □

Esempio 4.10. L'unico caso in cui questo metodo sia migliore del metodo dell'eliminazione per il calcolo dell'inversa è quando $n = 2$. Infatti in questo caso i determinanti per calcolare l'aggiunta sono semplici numeri. Se

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix},$$

allora $\det\mathbf{A} = 10$ e quindi, come si è già visto nel capitolo 1,

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 4/10 & -3/10 \\ 2/10 & 1/10 \end{bmatrix}$$

cioè: si scambiano gli elementi della diagonale e gli altri vengono cambiati di segno. Poi tutti i coefficienti vanno divisi per il determinante.

Se $\mathbf{A}$ è una matrice $n \times n$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$, indichiamo con $\mathbf{A}(\mathbf{b}, j)$ la matrice che si ottiene da $\mathbf{A}$ sostituendone la j-esima colonna con $\mathbf{b}$.

Possiamo analizzare il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tenendo conto della teoria appena sviluppata e ottenere un classico risultato dovuto a Cramer.

Teorema 4.11 (Cramer). *Sia* $\mathbf{A}$ *una matrice* $n \times n$ *non-singolare e sia* $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$*. Se* $\mathbf{x} = [x_1\ x_2\ \dots\ x_n]^T$ *è la soluzione del sistema* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$*, allora*

$$x_k = \frac{\det\mathbf{A}(\mathbf{b}, j)}{\det\mathbf{A}} \qquad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Dimostrazione. Scriviamo come prima $\operatorname{adj}\mathbf{A} = [\alpha_{ij}]$ e poniamo $\mathbf{b} = [b_1\ b_2\ \dots\ b_n]^T$. Sappiamo che $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$, dunque

$$(\det\mathbf{A})\mathbf{x} = (\operatorname{adj}\mathbf{A})\mathbf{b},$$

e dunque

$$(\det\mathbf{A})x_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} b_j = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+k} b_j \det\mathbf{A}_{jk}$$

che è proprio lo sviluppo rispetto alla j-esima colonna della matrice $\mathbf{A}(\mathbf{b}, j)$. □

Esempio 4.12. Il sistema lineare

$$\begin{cases} ax + by = l \\ cx + dy = m \end{cases}$$

ha una ed una sola soluzione se e solo se $ad - bc \neq 0$ e in tal caso

$$x = \frac{\det\begin{bmatrix} a & l \\ c & m \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} = \frac{am - cl}{ad - bc}, \qquad y = \frac{\det\begin{bmatrix} l & b \\ m & d \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} = \frac{dl - bm}{ad - bc}.$$

È questa la nota *regola di Cramer*. Anche in questo caso il metodo è efficiente solo per sistemi 2×2.

5. Conservazione della parità nelle permutazioni e determinanti

Vedremo in questa sezione un'applicazione delle proprietà dei determinanti. È però necessario conoscere gli elementi della teoria delle permutazioni e la loro decomposizione in cicli disgiunti.

PROPOSIZIONE 5.1. *Sia σ un elemento del gruppo delle permutazioni S_n, con $n > 1$. Allora σ è prodotto di trasposizioni.*

DIMOSTRAZIONE. Basta dimostrarlo per ogni ciclo. Ma

$$(i_1 i_2 \dots i_k) = (i_1 i_k)(i_1 i_{k-1}) \dots (i_1 i_2)$$

nel caso in cui il ciclo abbia lunghezza almeno due. Se il ciclo ha lunghezza uno è l'identità, ma allora coincide con (12)(12). □

Notiamo che si usa l'ipotesi $n > 1$, perché per $n = 1$ il gruppo S_1 non ha trasposizioni!

TEOREMA 5.2. *Sia $\sigma \in S_n$ e scriviamo*

$$\sigma = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r = \beta_1 \beta_2 \dots \beta_s$$

come prodotto di trasposizioni in due modi. Allora r e s sono entrambi pari o entrambi dispari.

DIMOSTRAZIONE. Useremo una tecnica indiretta, associando a ogni permutazione una opportuna matrice $n \times n$. Ricordiamo che $\mathbf{e}_i$ denota la i-esima colonna dell'identità. Definiamo allora, per $\sigma \in S_n$,

$$\widehat{\sigma} = [\mathbf{e}_{\sigma(1)} \ \mathbf{e}_{\sigma(2)} \ \dots \ \mathbf{e}_{\sigma(n)}],$$

cioè la matrice che ha come colonne le colonne dell'identità mescolate attraverso la permutazione σ. Per esempio, se σ è la permutazione identità, allora $\widehat{\sigma}$ è la matrice identità.

Ricordiamo anche che, se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sono matrici $n \times n$ e scriviamo $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \dots \ \mathbf{b}_n]$, allora

$$\mathbf{AB} = [\mathbf{Ab}_1 \ \mathbf{Ab}_2 \ \dots \ \mathbf{Ab}_n]$$

e che il prodotto di $\mathbf{Ae}_i$ dà la i-esima colonna di $\mathbf{A}$. In particolare $\widehat{\sigma}\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_{\sigma(i)}$.

Siano $\sigma, \tau \in S_n$; allora abbiamo

$$\widehat{\sigma}\widehat{\tau} = [\widehat{\sigma}\mathbf{e}_{\tau(1)} \ \widehat{\sigma}\mathbf{e}_{\tau(2)} \ \dots \ \widehat{\sigma}\mathbf{e}_{\tau(n)}] = [\mathbf{e}_{\sigma(\tau(1))} \ \mathbf{e}_{\sigma(\tau(2))} \ \dots \ \mathbf{e}_{\sigma(\tau(n))}] = \widehat{\sigma\tau}.$$

In altre parole abbiamo una relazione fra la composizione di permutazioni e il prodotto di matrici (si tratta di un omomorfismo del gruppo delle permutazioni nel gruppo delle matrici $n \times n$ non-singolari) e questo ci permette di usare il teorema di Binet.

Osserviamo che ogni matrice $\widehat{\sigma}$ ha determinante 1 oppure -1. Infatti, ogni riga e ogni colonna di $\widehat{\sigma}$ ha un solo coefficiente uguale a uno e gli altri nulli; sviluppando lungo la prima colonna, otteniamo un'altra matrice che ha la stessa forma (ma ordine inferiore). Se poi α è una trasposizione, abbiamo che $\det \widehat{\alpha} = -1$, perché $\widehat{\alpha}$ si ottiene dall'identità scambiando due colonne.

Ne segue che, scrivendo $\sigma = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r$ come prodotto di trasposizioni, abbiamo dapprima

$$\widehat{\sigma} = \widehat{\alpha_1}\widehat{\alpha_2} \dots \widehat{\alpha_r}$$

e, per il teorema di Binet,

$$\begin{aligned} \det \widehat{\sigma} &= \det(\widehat{\alpha_1}\widehat{\alpha_2} \dots \widehat{\alpha_r}) \\ &= (\det \widehat{\alpha_1})(\det \widehat{\alpha_2}) \dots (\det \widehat{\alpha_r}) \\ &= (-1)^r \end{aligned}$$

da cui segue l'enunciato del teorema. □

Di fatto l'assegnazione $\sigma \mapsto \det \widehat{\sigma}$ definisce un omomorfismo di S_n nel gruppo $\{1, -1\}$ degli elementi invertibili di $\mathbb{Z}, \cdot$ che si suole chiamare *segnatura*: allora $\operatorname{sgn} \sigma = \det \widehat{\sigma}$. Questo omomorfismo è definito anche nel caso di $n = 1$.

L'introduzione della segnatura permette di scrivere un'altra formula per il determinante di una matrice.

Teorema 5.3. *Se* $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ *è una matrice* $n \times n$*, allora*

$$\det \mathbf{A} = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n}.$$

Per esempio, quando $n = 2$ le permutazioni sono l'identità ι e $\sigma = (12)$; quindi

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = (\operatorname{sgn} \iota) a_{\iota(1),1} a_{\iota(2),2} + (\operatorname{sgn} \sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Per esercizio si scriva la formula esplicita per $n = 3$, considerando che S_n consiste della permutazione identità ι e di $\alpha = (12)$, $\beta = (13)$, $\gamma = (23)$, $\delta = (123)$, $\varepsilon = (132)$.

Dimostrazione. Si tratta di vedere che la funzione

$$\mathbf{A} \mapsto \varphi(\mathbf{A}) = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n}$$

è una funzione determinante e che $\varphi(\mathbf{I}_n) = 1$. Porremo

$$\mathbf{A}[\sigma] = a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n},$$

quindi

$$\varphi(\mathbf{A}) = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) \mathbf{A}[\sigma].$$

(1) Poniamo $\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{E}_i(c)$ e $\mathbf{B} = [b_{ij}]$. Allora

$$\mathbf{B}[\sigma] = b_{\sigma(1),1} \dots b_{\sigma(i),i} \dots b_{\sigma(n),n} = a_{\sigma(1),1} \dots c a_{\sigma(i),i} \dots a_{\sigma(n),n} = c\mathbf{A}[\sigma],$$

quindi il caso è banale.

(2) Poniamo $\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{E}_{ij}$ e $\mathbf{C} = [c_{ij}]$. Avremo allora

$$\mathbf{C}[\sigma] = c_{\sigma(1),1} \dots c_{\sigma(i),i} \dots c_{\sigma(j),j} \dots c_{\sigma(n),n} = b_{\sigma(1),1} \dots b_{\sigma(j),i} \dots b_{\sigma(i),j} \dots b_{\sigma(n),n} = \mathbf{B}[\sigma\alpha],$$

dove $\alpha = (12)$. Perciò

$$\varphi(\mathbf{C}) = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) \mathbf{C}[\sigma] = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) \mathbf{B}[\sigma\alpha] = \sum_{\tau \in S_n} (\operatorname{sgn}(\tau\alpha^{-1})) \mathbf{B}[\tau] = -\sum_{\tau \in S_n} (\operatorname{sgn} \tau) \mathbf{B}[\tau],$$

dove abbiamo eseguito il cambio di indici $\sigma\alpha = \tau$ e applicato il fatto che $\operatorname{sgn}(\tau\alpha^{-1}) = (\operatorname{sgn} \tau)(\operatorname{sgn}(\alpha^{-1}))$ e che $\operatorname{sgn}(\alpha^{-1}) = \operatorname{sgn}(ij) = -1$.

(3) Poniamo $\mathbf{F} = \mathbf{A}\mathbf{E}_{ij}(d)$ e $\mathbf{F} = [f_{ij}]$. Avremo allora

$$\mathbf{F}[\sigma] = f_{\sigma(1),1} \dots f_{\sigma(j),j} \dots f_{\sigma(n),n} = a_{\sigma(1),1} \dots (d a_{\sigma(j),i} + a_{\sigma(j),j} \dots a_{\sigma(n),n} = \mathbf{A}[\sigma] + d(a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(j),i} \dots a_{\sigma(n),n}).$$

Poniamo

$$t_\sigma = a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(j),i} \dots a_{\sigma(n),n},$$

dove il coefficiente $a_{\sigma(j),i}$ sta al j-esimo posto. Si tratta di verificare che $\sum_\sigma (\operatorname{sgn} \sigma) t_\sigma = 0$. Infatti, posto $\alpha = (ij)$ e $\tau = \sigma\alpha$, abbiamo

$$t_\tau = t_\sigma$$

e nella sommatoria i due addendi compaiono con segni opposti. Dunque $\varphi(\mathbf{F}) = \varphi(\mathbf{A})$.

(4) Ci basta ora calcolare $\varphi(\mathbf{I}_n)$; nella sommatoria che lo definisce, solo un addendo ha tutti i fattori non nulli, precisamente quello con σ la permutazione identità. Questo addendo è 1. □

Siccome $\det \mathbf{A} = \det(\mathbf{A}^T)$, abbiamo anche

$$\det \mathbf{A} = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \dots a_{n,\sigma(n)}.$$

Rimarchiamo ancora una volta che queste formule sono inapplicabili nella pratica: l'insieme delle permutazioni S_n ha $n!$ elementi e vengono richieste qui $n \cdot n!$ moltiplicazioni.

Esercizi

Paragrafo 1

1.1. Trovare una formula esplicita per l'area di un triangolo note le coordinate dei suoi vertici e verificare le asserzioni fatte sul cambiamento dell'area dopo una trasformazione lineare.

1.2. Trovare una formula esplicita per il volume di un parallelepipedo note le coordinate di quattro vertici su spigoli concorrenti e verificare le asserzioni fatte sul cambiamento di volume dopo una trasformazione lineare.

1.3. Si usino le proprietà delle funzioni determinanti per dimostrare che, moltiplicando una colonna di una matrice per uno scalare α, il determinante viene moltiplicato per α.

1.4. Si usino le proprietà delle funzioni determinanti per dimostrare che, scambiando due colonne di una matrice, il determinante viene moltiplicato per -1.

Paragrafo 2

2.1. Dare le definizioni di funzione determinante usando la premoltiplicazione per matrici elementari e dimostrare le proprietà rilevanti.

2.2. Dimostrare senza l'uso del teorema di Binet che, date le matrici $n \times n$ $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, si ha $\varphi(AB) = \varphi(BA)$ per ogni funzione determinante φ.

Paragrafo 3

3.1. Usando l'unicità delle funzioni determinanti, dimostrare che $\det \mathbf{A} = \overline{\det \mathbf{A}^H}$.

3.2. Usando l'unicità delle funzioni determinanti, dimostrare che, per ogni matrice $\mathbf{A}$ $n \times n$ si ha

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det \mathbf{A}_{i2} = 0.$$

3.3. Dimostrare che, se $\mathbf{N}$ è nilpotente (cioè esiste $n > 0$ tale che $\mathbf{N}^n = \mathbf{O}$), allora $\mathbf{I} - \mathbf{N}$ è invertibile. Suggerimento: calcolare $(\mathbf{I} - \mathbf{N})(\mathbf{I} + \mathbf{N} + \mathbf{N}^2 + \cdots + \mathbf{N}^{n-1})$.

Paragrafo 4

4.1. Scrivere esplicitamente la formula per il determinante di una matrice della forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e interpretarne l'invertibilità in termini di cambiamenti di coordinate cartesiane.

4.2. Si consideri la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & x_1^1 & x_1^2 \\ 1 & x_2^1 & x_2^2 \\ 1 & x_3^1 & x_3^2 \end{bmatrix},$$

Si dimostri che

$$\det \mathbf{V}(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2).$$

4.3. Si consideri la matrice

$$\mathbf{V}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} 1 & x_1^1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2^1 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & & & & \\ 1 & x_n^1 & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix},$$

dove $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C}$, detta *matrice di Vandermonde*. Si dimostri che

$$\det \mathbf{V}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

Suggerimento: induzione su n; si usi il fatto che il determinante non cambia postmoltiplicando per le matrici elementari $\mathbf{E}_{ij}(d)$, usando successivamente

$$\mathbf{E}_{n,n-1}(-x_n), \quad \mathbf{E}_{n-1,n-2}(-x_n), \quad \dots, \quad \mathbf{E}_{2,1}(-x_n),$$

si verifichi che la matrice che ne risulta ha la forma

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{u} & \mathbf{V}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \\ \hline 1 & \mathbf{0}^T \end{array}\right] \mathbf{E}_2(x_n - x_1)\mathbf{E}_3(x_n - x_2) \dots \mathbf{E}_n(x_n - x_{n-1}).$$