Esercizi assegnati il 17 ottobre

1 Primo Esercizio

Verificare se i seguenti sequent sono validi nella semantica di **S4**:

$$\Box(\Box A \to \Box\neg\Box B), \Box B \;\Rightarrow\; \Box\neg\Box A \tag{1.1}$$
$$\Box(\Box\neg\Box B \to \Box\neg\Box A), \Box A \;\Rightarrow\; \Box\Diamond\Box B \tag{1.2}$$
$$\Box((\Box A \wedge \Box B) \to \Box C), \Box A, \Box B \;\Rightarrow\; \Box C \tag{1.3}$$
$$\Box(A \to \Box(\Box B \to \Box C)), \Box A \wedge \Box B \;\Rightarrow\; \Box C \tag{1.4}$$

Nella costruzione dell'albero di prova adotto la seguente simbologia per contrassegnare i nodi:

$\Box$: nodo chiuso (sequent valido);

$\blacksquare$: nodo aperto (sequent falsificabile);

L'applicazione della **regola di *ramificazione disgiuntiva*** è indicata con l'abbreviazione "*ram.disg.*".

Osservazione. In **S4**, da un sequent nella forma:

$$\Box\Gamma, A \;\Rightarrow\; A, \Box\Delta \qquad (\ddagger)$$

può sempre essere derivato una albero di prova chiuso.

Nel seguito, per semplificare la stesura degli alberi di prova, *assumeremo chiuso* anche un nodo nella forma (‡).

Dimostrazione. La prova procede per induzione sulla struttura della formula A. Il caso base è banale: un sequent della forma ‡, ove A è atomica, è chiuso (e dunque costituisce un albero chiuso di cui è l'unico nodo).

A riguardo del passo induttivo, è banale dimostrare questa osservazione sulle formule il cui connettivo principale è proposizionale. Ad esempio, se $A = B \wedge C$:

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\text{Chiuso per ip. induttiva}}{\vdots}\atop \Box\Gamma, B, C \;\Rightarrow\; B, \Box\Delta \qquad \overset{\text{Chiuso per ip. induttiva}}{\vdots}\atop \Box\Gamma, B, C \;\Rightarrow\; C, \Box\Delta}{\Box\Gamma, B, C \;\Rightarrow\; B \wedge C, \Box\Delta}\, r\wedge}{\Box\Gamma, B \wedge C \;\Rightarrow\; B \wedge C, \Box\Delta}\, l\wedge$$

Nel caso in cui invece $A = \Box B$, dobbiamo distinguere due casi. Se $\Box\Delta = \varnothing$ è possibile applicare direttamente la regola $\Box$-**R**:

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\text{Chiuso per ip. induttiva}}{\vdots}\atop \Box\Gamma, \Box A, A \;\Rightarrow\; A}{\Box\Gamma, \Box A \;\Rightarrow\; A}\,\Box\text{-}\mathbf{L}}{\Box\Gamma, \Box A \;\Rightarrow\; \Box A}\,\Box\text{-}\mathbf{R}$$

Nel caso in cui invece $\Box\Delta = \{\Box D_1, \dots, \Box D_n\} \neq \varnothing$, è necessario utilizzare la ramificazione disgiuntiva:

$$\dfrac{\dfrac{(*)}{\Box\Gamma, \Box A \;\Rightarrow\; \Box A} \qquad \dfrac{\dots}{D_1} \qquad \dots \qquad \dfrac{\dots}{D_n}}{\Box\Gamma, \Box A \;\Rightarrow\; \Box A, \Box D_1, \dots, \Box D_n}\, ram.disg.$$

Dove al nodo marcato con $(*)$ si ricade nel caso precedente. Siccome esiste almeno un sotto–albero chiuso, l'albero generato dalla ramificazione disgiuntiva è a sua volta chiuso. $\Box$

Esercizio 1.1

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Box\\ \vdots\\ \Box(\Box A \to \Box\neg\Box B), \Box B, \Box A \;\Rightarrow\; \Box A\end{matrix} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Box\\ \vdots\\ \Box\neg\Box B, \Box(\Box A \to \Box\neg\Box B), \Box B, \Box A \;\Rightarrow\; \Box B\end{matrix}}{\neg\Box B, \Box\neg\Box B, \Box(\Box A \to \Box\neg\Box B), \Box B, \Box A \;\Rightarrow}\, l\,\neg}{\Box\neg\Box B, \Box(\Box A \to \Box\neg\Box B), \Box B, \Box A \;\Rightarrow}\, \Box\text{-}\mathbf{L}}{\Box A \to \Box\neg\Box B, \Box(\Box A \to \Box\neg\Box B), \Box B, \Box A \;\Rightarrow}\, l \to}{\dfrac{\Box(\Box A \to \Box\neg\Box B), \Box B, \Box A \;\Rightarrow}{\Box(\Box A \to \Box\neg\Box B), \Box B \;\Rightarrow\; \neg\Box A}\, r\,\neg}\, \Box\text{-}\mathbf{L}$$

$$\dfrac{\Box(\Box A \to \Box\neg\Box B), \Box B \;\Rightarrow\; \neg\Box A}{\Box(\Box A \to \Box\neg\Box B), \Box B \;\Rightarrow\; \Box\neg\Box A}\, \Box\text{-}\mathbf{R}$$

Esercizio 1.2

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Box\\ \vdots\\ \Box(\Box\neg\Box B \to \Box\neg\Box A), \Box A, \Box\neg\Box B \;\Rightarrow\; \Box\neg\Box B\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Box\\ \vdots\\ \Box\neg\Box A, \Box(\Box\neg\Box B \to \Box\neg\Box A), \Box A, \Box\neg\Box B \;\Rightarrow\; \Box A\end{matrix}}{\Box\neg\Box A, \Box(\Box\neg\Box B \to \Box\neg\Box A), \Box A, \Box\neg\Box B \;\Rightarrow}\, \Box\text{-}\mathbf{L}, l\,\neg}{\Box\neg\Box B \to \Box\neg\Box A, \Box(\Box\neg\Box B \to \Box\neg\Box A), \Box A, \Box\neg\Box B \;\Rightarrow}\, l \to$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Box\neg\Box B \to \Box\neg\Box A, \Box(\Box\neg\Box B \to \Box\neg\Box A), \Box A, \Box\neg\Box B \;\Rightarrow}{\Box(\Box\neg\Box B \to \Box\neg\Box A), \Box A, \Box\neg\Box B \;\Rightarrow}\, \Box\text{-}\mathbf{L}}{\Box(\Box\neg\Box B \to \Box\neg\Box A), \Box A \;\Rightarrow\; \Diamond\Box B}\, r\,\neg}{\Box(\Box\neg\Box B \to \Box\neg\Box A), \Box A \;\Rightarrow\; \Box\Diamond\Box B}\, \Box\text{-}\mathbf{R}$$

Esercizio 1.3

Per rendere più compatto l'albero indichiamo con $\alpha = \Box((\Box A \wedge \Box B) \to \Box C)$, a partire dal momento in cui tale formula diventa *passiva* nella dimostrazione, ovvero a partire dall'applicazione della regola $l \to$ marcata con $(*)$.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{
 \dfrac{
  \dfrac{\begin{array}{c}\Box\\ \vdots\\ \alpha,\Box A,\Box B \Rightarrow \Box A\end{array}}{\alpha,\Box A,\Box B \Rightarrow C,\Box A}\,\mathit{ram.disg.}
  \qquad
  \dfrac{\begin{array}{c}\Box\\ \vdots\\ \alpha,\Box A,\Box B \Rightarrow \Box B\end{array}}{\alpha,\Box A,\Box B \Rightarrow C,\Box B}\,\mathit{ram.disg.}
 }{\alpha,\Box A,\Box B \Rightarrow C,(\Box A\wedge\Box B)}\,r\wedge
 \qquad
 \dfrac{\begin{array}{c}\Box\\ \vdots\\ C,\Box C,\alpha,\Box A,\Box B \Rightarrow C\end{array}}{\Box C,\alpha,\Box A,\Box B \Rightarrow C}\,\Box\text{-}\mathbf{L}
}{(\Box A\wedge\Box B)\to\Box C,\Box((\Box A\wedge\Box B)\to\Box C),\Box A,\Box B \Rightarrow C}\,l\to(*)
}{\Box((\Box A\wedge\Box B)\to\Box C),\Box A,\Box B \Rightarrow C}\,\Box\text{-}\mathbf{L}
}{\Box((\Box A\wedge\Box B)\to\Box C),\Box A,\Box B \Rightarrow \Box C}\,\Box\text{-}\mathbf{R}
$$

Esercizio 1.4

Per rendere più compatto l'albero indichiamo con $\alpha = \Box(A \to \Box(\Box B \to \Box C))$, a partire dal momento in cui tale formula diventa *passiva* nella dimostrazione, ovvero a partire dall'applicazione della regola $l \to$ marcata con $(*)$.

$$
\dfrac{\dfrac{
 \dfrac{\begin{array}{c}\Box\\ \vdots\\ \alpha,\Box A,\Box B,A \Rightarrow \Box C,A\end{array}}{\alpha,\Box A,\Box B \Rightarrow \Box C,A}\,\Box\text{-}\mathbf{L}
 \qquad
 \begin{array}{c}\text{Sotto–albero (1)}\\ \vdots\\ \Box(\Box B\to\Box C),\alpha,\Box A,\Box B \Rightarrow \Box C\end{array}
}{A\to\Box(\Box B\to\Box C),\Box(A\to\Box(\Box B\to\Box C)),\Box A,\Box B \Rightarrow \Box C}\,l\to(*)
}{\Box(A\to\Box(\Box B\to\Box C)),\Box A\wedge\Box B \Rightarrow \Box C}\,l\wedge,\Box\text{-}\mathbf{L}
$$

Sviluppo del sotto–albero (1) (per chiarezza è riportata anche la radice):

$$
\dfrac{\dfrac{
 \begin{array}{c}\Box\\ \vdots\\ \Box(\Box B\to\Box C),\alpha,\Box A,\Box B \Rightarrow \Box C,\Box B\end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}\Box\\ \vdots\\ \Box C,\Box(\Box B\to\Box C),\alpha,\Box A,\Box B \Rightarrow \Box C\end{array}
}{\Box B\to\Box C,\Box(\Box B\to\Box C),\alpha,\Box A,\Box B \Rightarrow \Box C}\,l\to
}{\Box(\Box B\to\Box C),\alpha,\Box A,\Box B \Rightarrow \Box C}\,\Box\text{-}\mathbf{L}
$$

2 Secondo Esercizio

Dimostrare, utilizzando la deduzione naturale, i seguenti teoremi:

$$(A \to \neg B) \to (B \to \neg A) \tag{2.1}$$
$$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A) \tag{2.2}$$
$$(\neg B \to \neg A) \to (A \to \neg\neg B) \tag{2.3}$$
$$((A \wedge B) \to C) \to (A \to (B \to C)) \tag{2.4}$$
$$(A \to (B \to C)) \to ((A \wedge B) \to C) \tag{2.5}$$
$$((A \to \neg B) \to A) \to (\neg\neg A) \tag{2.6}$$

Nello svolgimento dell'esercizio annoto l'assunzione di una premessa α con la notazione $[\alpha]_n$ e lo scarico della medesima con la notazione $[\alpha]_{\mathbf{n}}$.

Esercizio 2.1

Tesi: $(A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \to (B \to \bot)]_{\mathbf{1}} \qquad [A]_{\mathbf{3}}}{B \to \bot}\;\to\text{-E} \qquad [B]_{\mathbf{2}}}{\bot}\;\to\text{-E}}{[A]_{3} \to \bot}\;\to\text{-I}}{[B]_{2} \to (A \to \bot)}\;\to\text{-I}}{[(A \to (B \to \bot))]_{1} \to (B \to (A \to \bot))}\;\to\text{-I}$$

Esercizio 2.2

Tesi: $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[B \to \bot]_{\mathbf{2}} \qquad \dfrac{[A \to B]_{\mathbf{1}} \quad [A]_{\mathbf{3}}}{B}\;\to\text{-E}}{\bot}\;\to\text{-E}}{[A]_{3} \to \bot}\;\to\text{-I}}{[(B \to \bot)]_{2} \to (A \to \bot)}\;\to\text{-I}}{[(A \to B)]_{1} \to ((B \to \bot) \to (A \to \bot))}\;\to\text{-I}$$

Esercizio 2.3

Tesi: $(\neg B \to \neg A) \to (A \to \neg\neg B)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(B \to \bot) \to (A \to \bot)]_{\mathbf{1}} \quad [B \to \bot]_{\mathbf{3}}}{A \to \bot}\;\to\text{-E} \qquad [A]_{\mathbf{2}}}{\bot}\;\to\text{-E}}{[(B \to \bot)]_{3} \to \bot}\;\to\text{-I}}{[A]_{2} \to ((B \to \bot) \to \bot)}\;\to\text{-I}}{[((B \to \bot) \to (A \to \bot))]_{1} \to (A \to ((B \to \bot) \to \bot))}\;\to\text{-I}$$

Esercizio 2.4

Tesi: $((A \land B) \to C) \to (A \to (B \to C))$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(A\land B)\to C]_{\mathbf{1}} \qquad \dfrac{[A]_{\mathbf{2}} \quad [B]_{\mathbf{3}}}{(A\land B)}\,\land\text{-I}}{C}\,\to\text{-E}}{[B]_{\mathit{3}}\to C}\,\to\text{-I}}{[A]_{\mathit{2}}\to(B\to C)}\,\to\text{-I}}{[((A\land B)\to C)]_{\mathit{1}}\to(A\to(B\to C))}\,\to\text{-I}$$

Esercizio 2.5

Tesi: $(A\to(B\to C))\to((A\land B)\to C)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A\to(B\to C)]_{\mathbf{1}} \qquad \dfrac{[A\land B]_{\mathbf{2}}}{A}\,\land_1\text{-E}}{B\to C}\,\to\text{-E} \qquad \dfrac{[A\land B]_{\mathbf{2}}}{B}\,\land_2\text{-E}}{C}\,\to\text{-E}}{[(A\land B)]_{\mathit{2}}\to C}\,\to\text{-I}}{[(A\to(B\to C))]_{\mathit{1}}\to((A\land B)\to C)}\,\to\text{-I}$$

Esercizio 2.6

Tesi: $((A\to\neg B)\to A)\to(\neg\neg A)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A\to\bot]_{\mathbf{2}} \qquad \dfrac{[((A\to(B\to\bot))\to A)]_{\mathit{1}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A\to\bot]_{\mathbf{2}} \quad [A]_{\mathbf{3}}}{\bot}\,\to\text{-E}}{[B]_{\mathit{4}}\to\bot}\,\to\text{-I}}{[A]_{\mathit{3}}\to(B\to\bot)}\,\to\text{-I}}{A}\,\to\text{-E}}{\bot}\,\to\text{-E}}{[(A\to\bot)]_{\mathit{2}}\to\bot}\,\to\text{-I}}{[((A\to(B\to\bot))\to A)]_{\mathit{1}}\to((A\to\bot)\to\bot)}\,\to\text{-I}$$