Università degli studi di Verona
Corsi di laurea in Matematica Applicata, Informatica e Informatica Multimediale
Prova scritta di Matematica di Base — 20 ottobre 2006

matricola .... nome .... cognome ....

Corso di laurea: Matematica Applicata ☐ Informatica ☐ Informatica Multimediale ☐

Scrivere subito nome, cognome e numero di matricola, indicando il corso di laurea. Le soluzioni vanno trascritte solo su questi fogli, negli spazi appositamente riservati. Si può anche usare il retro dei fogli, facendo chiari riferimenti.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Tot

Compito A

1) Si consideri la seguente relazione sull'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi

$$R = \{\, (a,b) \mid a,b \in \mathbf{Z},\ a^2 - b^2 \text{ è multiplo di } 5 \,\}.$$

Dimostrare che R è una relazione d'equivalenza. Trovare le seguenti classi d'equivalenza: $[0]_R$ e $[5]_R$. Quante sono le classi d'equivalenza individuate da R?

• **Pr. Riflessiva.**
$a \in \mathbf{Z}$, $a^2 - a^2 = 0$, che è multiplo di cinque.
• **Pr. Simmetrica.**
Sia $(a,b) \in R$, allora esiste $w \in \mathbf{Z}$ tale che $a^2 - b^2 = 5w$. Ora, $a^2 - b^2 = -(b^2 - a^2) = -5w$, e quindi $(b,a) \in R$.
• **Pr. Transitiva.**
Siano $(a,b), (b,c) \in R$. Esistono, quindi, $u, v \in \mathbf{Z}$, tali che $a^2 - b^2 = 5u$ e $b^2 - c^2 = 5v$. Ora, $a^2 - c^2 = (a^2 - b^2) + (b^2 - c^2) = 5(v+u)$, e quindi $(a,c) \in R$.

$[0]_R = [5]_R = \{b \in \mathbf{Z} | \, b$ è multiplo di $5\}$.
Le classi di equivalenza di R sono tre, $[0]_R$, $[1]_R$ e $[2]_R$, infatti $[1]_R = [4]_R$ e $[2]_R = [3]_R$.

2) Mostrare che $R=\{(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(a,f),(a,g),(b,c),(b,d),(b,e),(b,f),(b,g),(c,e),(c,f),$ $(c,g),(d,f),(d,g),(e,f),(e,g)\}$ è una relazione d'ordine stretto sull'insieme $\{a,b,c,d,e,f,g\}$. Determinare gli elementi massimali, minimali, eventuali massimo, minimo, maggioranti, minoranti, estremo superiore e estremo inferiore del sottoinsieme $\{c,d,e\}$.

La relazione R è di ordine stretto, infatti è anti-riflessiva, dal momento che nel grafo non ci sono dei lacci (non ci sono cioè, coppie del tipo (x,x)); è transitiva, ad esempio vi sono le coppie (a,b) e (b,c) e c'è anche la coppia (a,c).

massimali= $\{e,d\}$ minimali= $\{c,d\}$
maggioranti= $\{f,g\}$ minoranti= $\{a,b\}$
sup= $\emptyset$ inf= $\{b\}$
max= $\emptyset$ min= $\emptyset$

3) Dimostrare per induzione che, per $n\geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{5^k}=\frac{5^n-1}{4\cdot 5^n}$$

• **Passo base.** $n=1$, $\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{5^k}=\frac{1}{5}=\frac{5-1}{4\cdot 5}=\frac{1}{5}$.

• **Passo induttivo** $\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{5^k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{5^k}+\frac{1}{5^{n+1}}=\frac{5^n-1}{4\cdot 5^n}+\frac{1}{5^{n+1}}=\frac{5^{n+1}-1}{4\cdot 5^{n+1}}$.

4) Si consideri la funzione $f:A\longrightarrow B$.

(1) Dire quando f è invertibile.
(2) Si assuma che f sia invertibile. Si dimostri che se f è suriettiva allora f^{-1} è totale.

- $f:A\longrightarrow B$ è invertibile se è **iniettiva**.
- Sia f invertibile e suriettiva. Allora $Im(f)=Def(f^{-1})$ per l'invertibilità e $B=Im(f)$ per la suriettività. Quindi f^{-1} è totale, poiché $B=Im(f)=Def(f^{-1})$.

5) Si consideri la struttura $\mathfrak{N} = (\mathbf{N}, \{\equiv, \prec\}, \{\oplus, \otimes\}, \{\mathit{0}, \mathit{1}\})$, dove $\mathbf{N}$ denota l'insieme dei numeri naturali, $\equiv$ la relazione binaria di essere lo stesso numero, $\prec$, $\oplus$ e $\otimes$ rispettivamente l'ordine, l'addizione e la moltiplicazione tra numeri naturali, *0* e *1* i numeri zero e uno.

Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio adatto alla struttura i cui simboli propri siano i predicati $=, <$; i simboli per funzione $+$, $\times$ e s; i simboli per costante 0 e 1.

Nel linguaggio $\mathcal{L}$ si scriva una formula $\varphi(v_0, v_1)$ con le sole variabili libere indicate tale che $\mathfrak{N} \models \varphi(v_0, v_1)[a, b]$ se e solo se $a - 3b > 0$, a è pari e b è dispari.

6) Dire che cosa significa che una formula γ è valida. Dire cosa significa che la formula γ è conseguenza logica di un insieme di formule Φ. Dimostrare che, per ogni scelta delle formule α e β,

$$\{\neg\alpha\} \models \rightarrow \vee\alpha\beta\beta$$

Per il teorema di deduzione semantica $\{\neg\alpha, \vee\alpha\beta\} \models \beta$. Sia σ la realizzazione che rende vere $\neg\alpha$ e $\vee\alpha\beta$, ovvero $(\neg\alpha)^\sigma = V \rightarrow \alpha^\sigma = F$. Quindi β è vera.

7) In un linguaggio in cui c'è un simbolo di relazione binaria P e un simbolo di funzione unaria f, dire quali delle seguenti successioni di simboli sono formule (F), quali termini (T) e quali nulla (N); in quest'ultimo caso scrivere nell'ultima colonna una breve giustificazione.

	F	T	N	
$fffv_3$		$\times$		
$\neg Pffv_1v_2$	$\times$			
$\wedge\forall v_0 fv_1 Pv_0v_1$			$\times$	fv_1 è un termine
$\rightarrow \wedge Pv_0 fv_1 \forall v_1 Pv_1v_2$			$\times$	manca una fomula
$fv_1 fv_0$			$\times$	2 termini accostati
$\neg \vee \forall v_0 Pv_0 fv_1 Pv_0v_1$	$\times$			
$Pv_1Pv_0v_1$			$\times$	dopo il primo simbolo di relazione ci sono un termine e una formula
$\wedge \wedge \forall Pv_0 fv_1 \neg Pv_0v_1 Pfv_1 fv_2$			$\times$	manca la variabile dopo il quantificatore $\forall$
$\wedge \rightarrow \neg\forall v_1 Pv_0v_1 Pfv_0 fv_1 \neg Pv_3 fv_4$	$\times$			

8) Siano $f, g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definite da

$$f(x) = x - \sqrt{1-x^2} \qquad g(x) = \ln x$$

(1) Trovare l'insieme di definizione di f e l'insieme di definizione di g.
(2) Determinare le funzioni composte $f \circ g$ e $g \circ f$, specificandone gli insiemi di definizione.

• $Def(f) = [-1, 1]$, $Def(g) = (0, +\infty)$.

• $f \circ g : \left[\frac{1}{e}, e\right] \longrightarrow \mathbf{R}$, $(f \circ g)(x) = \ln x - \sqrt{1-(\ln x)^2}$.
$1-(\ln x)^2 \geq 0$ iff $x \in \left[\frac{1}{e}, e\right]$.

$(g \circ f) : (\frac{\sqrt{2}}{2}, 1) \longrightarrow \mathbf{R}$, $(g \circ f)(x) = \ln(x - \sqrt{1-x^2})$.
$x - \sqrt{1-x^2} > 0$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ -1 \leq x \leq 1 \\ (\sqrt{2}x - 1)(\sqrt{2}x + 1) > 0 \end{cases}$$

then $x \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$.

9) Sia $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & x \leq 0 \\ \lambda x + 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

in cui λ è un parametro reale.
Dire se f è una funzione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ e, in caso affermativo, dire per quali valori del parametro reale λ f è:

(i) totale;
(ii) iniettiva;
(iii) suriettiva.

Per i valori del parametro λ per cui f è invertibile, determinare la funzione inversa di f.

f è una funzione di $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ indipendentemente dai valori assunti dal parametro λ. L'unico problema riguardo l'univocità di f si incontra in $x = 0$. Ma

$$f(0) = \begin{cases} 1 \\ 1 \end{cases}$$

e quindi f è una funzione di $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$.

(i) $Def(f) = \mathbf{R}$, indipendentemente da λ, quindi f è totale, per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$.
(ii) • se $\lambda = 0$, f non è iniettiva, infatti $f^{\rightarrow}(1) = \{x \in \mathbf{R}_+\}$.
• se $\lambda < 0$, f non è iniettiva, infatti $f^{\rightarrow}(0) = \{-1, -\frac{1}{\lambda}\}$.
• se $\lambda > 0$, f è iniettiva, infatti
- siano $x_1, x_2 > 0$, $\lambda x + 1$ è iniettiva;
- siano $x_1, x_2 < 0$, $1 - x^2$ è iniettiva;
- siano, $x_1 > 0$ e $x_2 < 0$. Supponiamo, per assurdo, che $1 - x_2^2 = \lambda x_1 + 1$, da cui $x_1 = -\frac{x_2^2}{\lambda}$, che contraddice $x_1 > 0$.

(iii) Se $\lambda \leq 0$ f non è suriettiva.
Se $\lambda > 0$, f è suriettiva, l'inversa è

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt{1-x}, & x \leq 1 \\ \dfrac{x-1}{\lambda}, & x \geq 1 \end{cases}$$