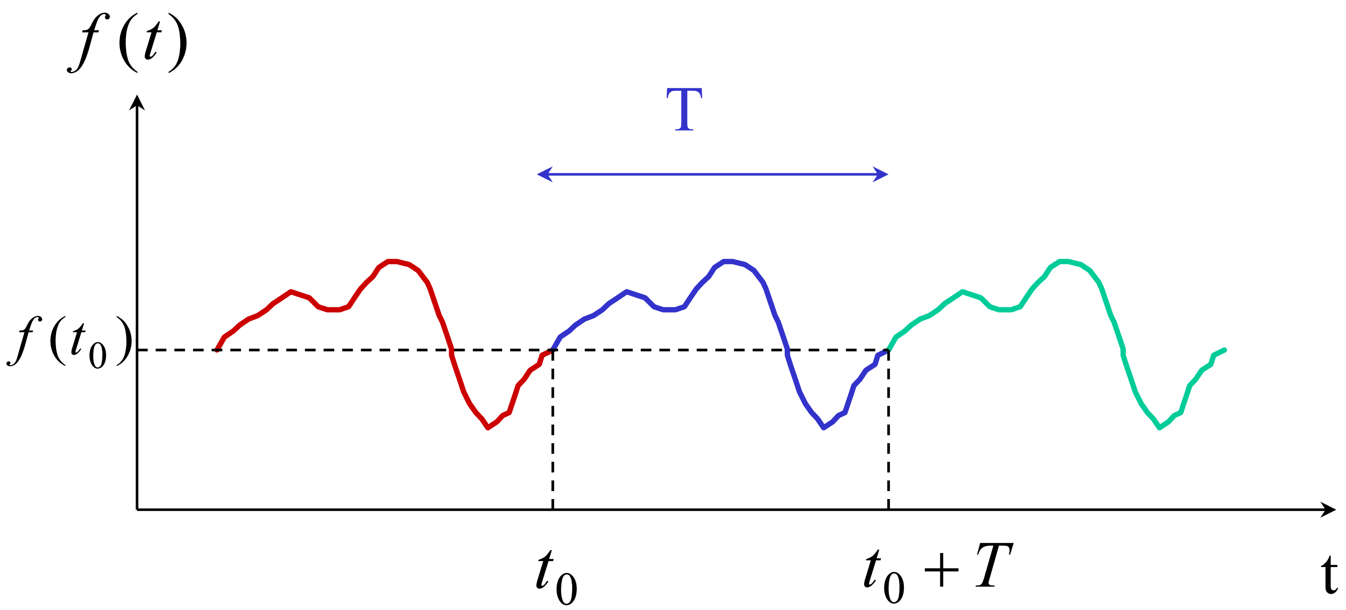
Moti periodici :

moti la cui legge oraria è una funzione periodica $f\,(t)$ del tempo:

$\Rightarrow$ esiste una costante T tale che :

$$\boxed{f\,(t+T) = f\,(t)} \qquad \forall t$$

"periodo"



Teorema di Fourier:

una qualsiasi funzione periodica è esprimibile come somma di una serie di termini sinusoidali:

$$\boxed{f\,(t) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty}\left[a_m \sin(m\,\omega t) + b_m \cos(m\,\omega t)\right]}$$

"sviluppo in serie di Fourier" di $f(t)$

dove: $\boxed{\omega = \dfrac{2\pi}{T}}$ **"frequenza fondamentale"**

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f\,(t)\,dt$$ **"valor medio"**

"coefficienti di Fourier": $a_m = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f\,(t)\sin(m\omega t)\,dt \qquad b_m = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f\,(t)\cos(m\omega t)\,dt$

“Moto armonico semplice”:

moto con legge oraria: $\boxed{x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)}$

“ampiezza” del moto — “pulsazione” — “fase”

Periodo T:

$$x(t+T) = A\sin[\omega(t+T)+\varphi] \equiv x(t) = A\sin[\omega t+\varphi] \qquad \forall t$$

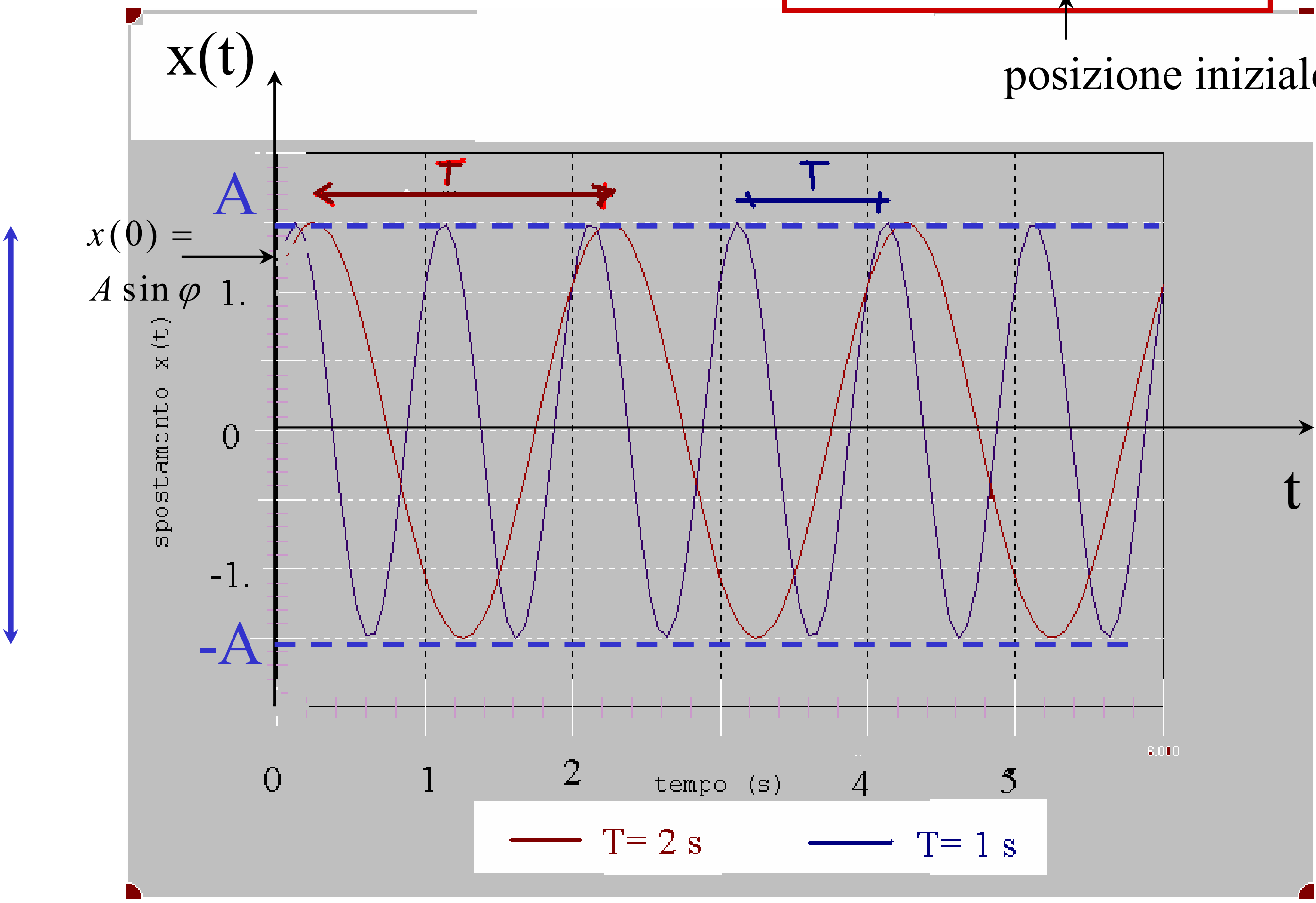
$$\Rightarrow \quad \omega T = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$$

“Frequenza”: $\boxed{\nu \equiv \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}}$

Fase:

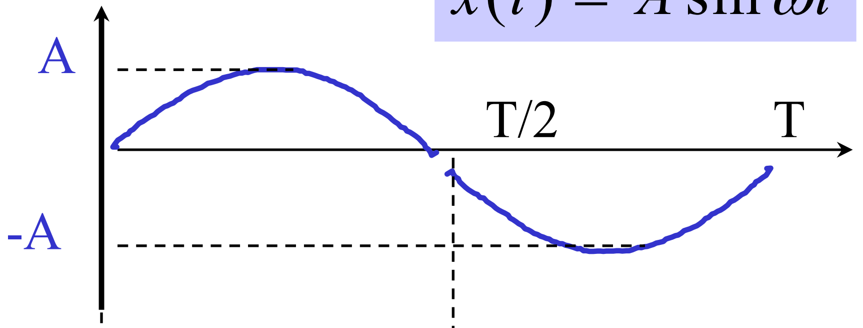
$$x(t=0) = A\sin\varphi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi = \arcsin(x(0)/A)}$$

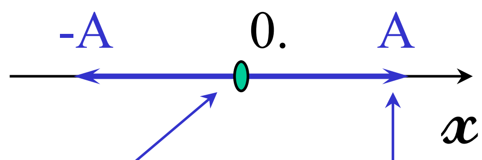
posizione iniziale



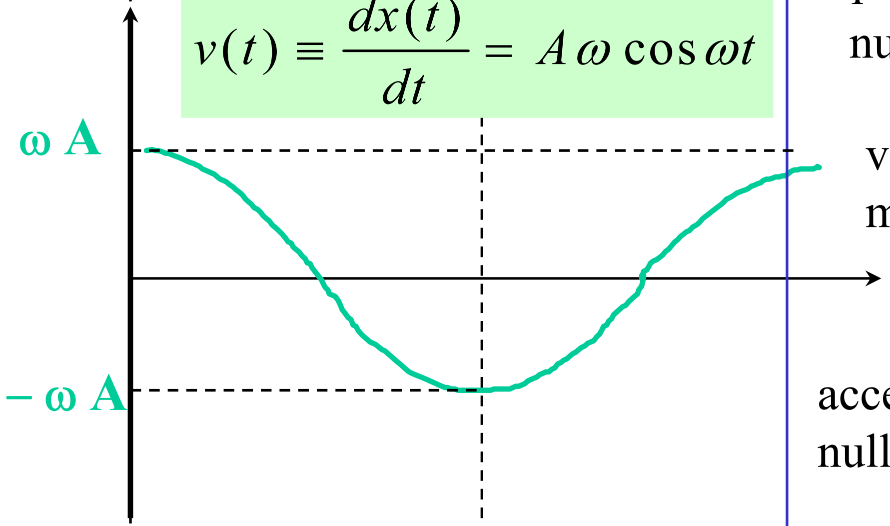
Velocità e accelerazione in un moto armonico

Posizione: $x(t) = A \sin \omega t$





Velocità: $v(t) \equiv \dfrac{dx(t)}{dt} = A\omega \cos \omega t$



spostamento nullo: x=0

velocità massima

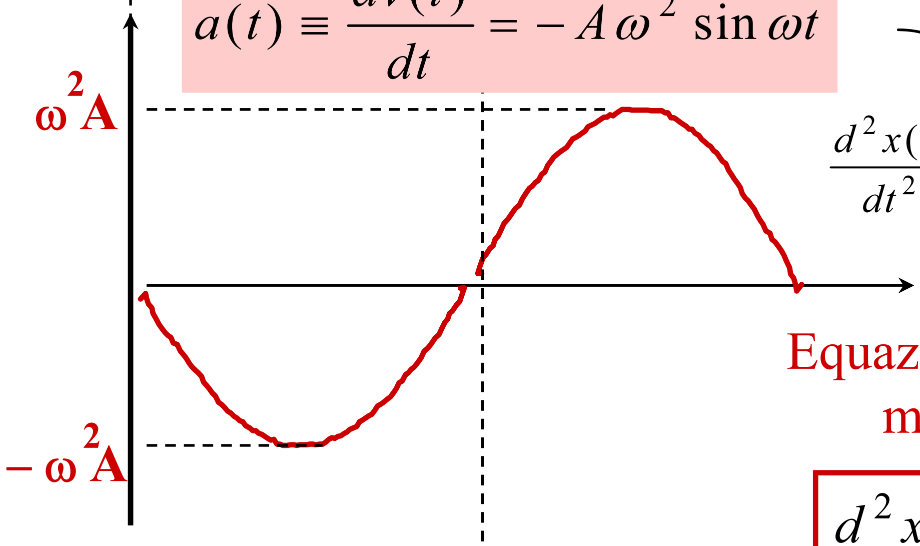
accelerazione nulla

massimo spostamento: x=A

velocità nulla: v=0

accelerazione massima (in modulo): $a = -\omega^2 A$

Accelerazione: $a(t) \equiv \dfrac{dv(t)}{dt} = -A\omega^2 \sin \omega t$



$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega^2 A \sin \omega t = -\omega^2 x(t)$$

Equazione differenziale del moto armonico:

$$\boxed{\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0}$$

Condizioni inziali e costanti di integrazione :

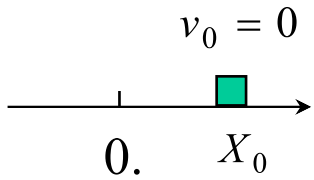
Nella legge oraria: $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$

le costanti di integrazione A e φ sono determinate dalle "condizioni iniziali" (posizione e velocità iniziali del moto).

Esempi:

i) posizione iniziale : $\boxed{x(t=0) \equiv X_0 \neq 0}$

velocità iniziale nulla: $\boxed{v(t=0) = 0.}$

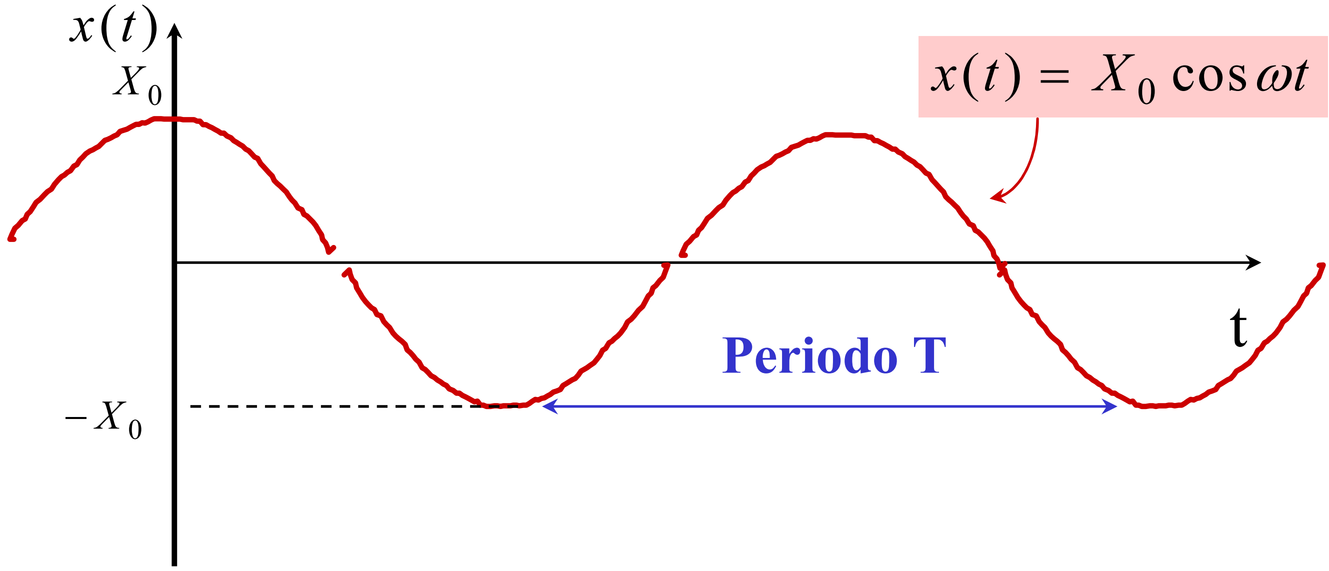


$$\Rightarrow \begin{cases} x(t=0) = A\sin\varphi = X_0 \\ v(t=0) = A\omega\cos\varphi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} A = X_0 \\ \cos\varphi = 0. \rightarrow \varphi = \pi/2 \end{array}$$

$\Rightarrow$ la soluzione particolare che corrisponde alle condizioni iniziali specificate è:

$$\boxed{x(t) = X_0\sin(\omega t + \pi/2) = X_0\cos\omega t}$$

$\Rightarrow$ l'ampiezza dell'oscillazione ("elongazione") coincide con lo spostamento iniziale dall'origine

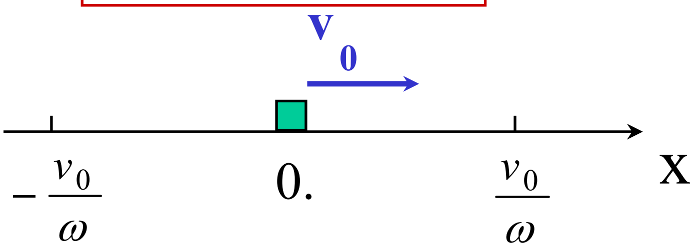


Condizioni iniziali: esempi

ii) posizione iniziale nulla:

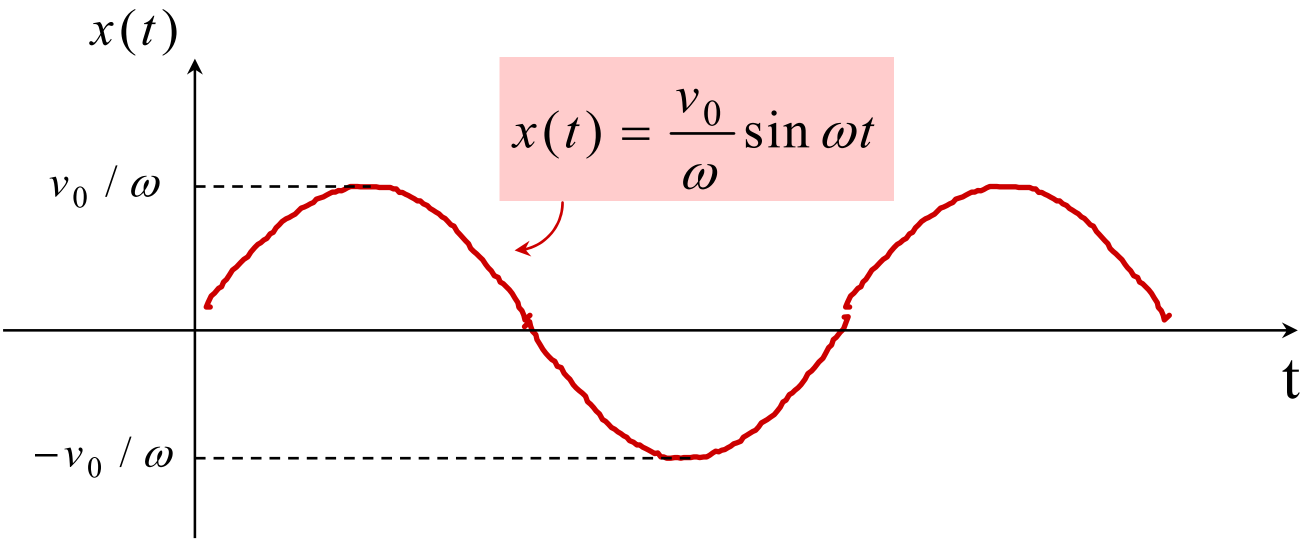
velocità iniziale :

$$\boxed{\begin{aligned} x(t=0) &= 0. \\ v(t=0) &\equiv v_0 > 0. \end{aligned}}$$



$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} x(t=0) &= A\sin\varphi = 0. \\ v(t=0) &= \omega A\cos\varphi \equiv v_0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &\sin\varphi = 0. \rightarrow \cos\varphi = 1 \\ &\omega A = v_0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} &\varphi = 0. \\ &A = v_0 / \omega \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x(t) = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t}$$



$\Rightarrow$ l'oscillazione avviene con ampiezza $A = v_0 / \omega$