GEOMETRIA — Prova scritta del 16/7/2009

(Prof. M. Spera)

Tempo a disposizione 2h
Le risposte vanno adeguatamente giustificate.

(1) Nello spazio euclideo, sia assegnato un riferimento cartesiano.

Sia S : $\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^3 - 3uv^2 \end{cases}$ (sella di scimmia)

Dimostrare che si tratta di una superficie regolare, e se ne determinino il piano tangente, la prima e la seconda forma fondamentale, nonché la curvatura gaussiana, media, e le curvature principali nel punto $P = (0, 1, 0)$ (corr. a $u = 0$, $v = 1$). Si determinino sempre in P, l'operatore di forma, le direzioni asintotiche e le direzioni principali (nel piano dei parametri e nello spazio) e si abbozzi il grafico dell'indicatrice di Dupin (di che tipo di curva si tratta?)

(2) Sia data $\mathcal{C}$: $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -2t^3 \end{cases}$ Mostrare che $\mathcal{C} \subset S$

Dimostrare che $\mathcal{C}$ è una curva regolare e calcolarne la curvatura e la torsione (mostrare in due modi che $\mathcal{C}$ è piana, e determinare il piano cui appartiene.
Dire se $\mathcal{C}$ è una geodetica di S

(3) Dimostrare che la bottiglia di Klein K (costruita come un opportuno spazio di identificazione) è connessa e compatta

(1)

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^3 - 3uv^2 \end{cases}$$

Sella di Scimmia

$\underline{r} = (u, v, u^3 - 3uv^2)$ $\qquad$ ($\underline{r} = \underline{r}(u,v) \in C^\infty$ iniettiva)

$\underline{r}_u = (1, 0, 3u^2 - 3v^2)$ $\qquad$ $\underline{r}_u \times \underline{r}_v \neq \underline{0}$

$\underline{r}_v = (0, 1, -6uv)$ $\qquad$ in ogni pto, v. anche oltre

$\underline{r}_{uu} = (0, 0, 6u)$

$\underline{r}_{vv} = (0, 0, -6u)$

$\underline{r}_{uv} = (0, 0, -6v)$ $\qquad$ $(= \underline{r}_{vu})$

$$\underline{r}_u \times \underline{r}_v = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 0 & 3u^2-3v^2 \\ 0 & 1 & -6uv \end{vmatrix} =$$

$$= -\underline{i}\,(3u^2-3v^2) - j\left[-6uv\right] + \underline{k}$$

$$= 3(v^2-u^2)\,\underline{i} + 6uv\,\underline{j} + \underline{k}$$

$$\|\underline{r}_u \times \underline{r}_v\| = \sqrt{9(v^2-u^2)^2 + 36u^2v^2 + 1}$$

$$= \sqrt{9(u^4+v^4-2u^2v^2) + 36u^2v^2 + 1}$$

$$= \sqrt{9u^4 + 18u^2v^2 + 9v^4 + 1}$$

$$= \sqrt{9(u^2+v^2)^2+1}$$

$$\underline{N} = \frac{\underline{r}_u \times \underline{r}_v}{\|\underline{r}_u \times \underline{r}_v\|} = \frac{3(v^2-u^2)}{\sqrt{9(u^2+v^2)^2+1}}\underline{i} + \frac{6uv\,\underline{j}}{\sqrt{\ }} + \frac{\underline{k}}{\sqrt{\ }}$$

$$E = \langle \underline{r}_u, \underline{r}_u \rangle = 1 + 9(u^2-v^2)^2$$

$$F = \langle \underline{r}_u, \underline{r}_v \rangle = -6uv \cdot 3(u^2-v^2) = -18uv(u^2-v^2)$$

in $\underline{P}:(0,1,0)$

$\underline{r}_u^0 \times \underline{r}_v^0 = 3\,\underline{i} + \underline{k}$.

$\Rightarrow$ piano tangente in $\underline{P}$:

$$3 \cdot x + z = 0$$

$$\pi:\ 3x + z = 0$$

$$G = 1 + 36u^2v^2$$

$$e = \langle \underline{r}_{uu}, \underline{N} \rangle = + \frac{6u}{\sqrt{9(u^2+v^2)^2+1}}$$

$$f = \langle \underline{r}_{uv}, \underline{N} \rangle = \frac{-6v}{\sqrt{\ }}$$

$$g = \langle \underline{r}_{vv}, \underline{N} \rangle = -\frac{6u}{\sqrt{\ }}$$

$$\Rightarrow \quad K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{-36u^2 - 36v^2}{[9(u^2+v^2)^2+1]\left\{(1+9(u^2-v^2)^2)(1+36u^2v^2) - 18^2u^2v^2(u^2-v^2)^2\right\}}$$

in $(\overset{u}{0}, \overset{v}{1})$ $\quad (r_0 = (0,1,0))$

$$E_0 = 1 + 9 = 10 \qquad e_0 = 0$$

$$F_0 = 0 \qquad f_0 = \frac{-6}{\sqrt{10}}$$

$$G_0 = 1 \qquad g_0 = 0 \ldots$$

$$K_0 = \frac{-36}{10 \cdot 10} = \frac{-\cancel{36}^{\,9}}{\cancel{100}_{25}} = -\left(\frac{3}{5}\right)^2$$

$$H_0 = \frac{1}{2}\,\frac{e_0 G_0 - 2F_0 f_0 + E_0 g_0}{E_0 G_0 - F_0^2} = \dots = 0$$

(immediato)

Si ha allora $k_1 = -\frac{3}{5}$, $k_2 = +\frac{3}{5}$

☆ L'indicatrice di Dupin sarà un'iperbole equilatera

Direzioni asintotiche! $\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{e_0}\, l^2 + 2f_0\, lm + \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{g_0}\, m^2 = 0$

nello spazio: $v_1 = \frac{r_u}{\|r_u\|}$ e $v_2 = \frac{r_v}{\|r_v\|}$

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}$ $\quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$lm = 0 \Rightarrow$

$l = 0$ o $m = 0$

sul piano tangente

-- direzioni principali (ortogonali)

operatore di forma in P_0

$$\begin{pmatrix} \frac{e_0}{E_0} & \frac{f_0}{E_0} \\ \frac{f_0}{G_0} & \frac{g_0}{G_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{6}{\sqrt{10}\,10} \\ -\frac{6}{\sqrt{10}} & 0 \end{pmatrix}$$

direzioni principali:

$$\begin{vmatrix} m^2 & -lm & l^2 \\ 10 & 0 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{-\frac{6}{\sqrt{10}}} & \cancel{0} \end{vmatrix} = 0$$

$$+\frac{6}{\sqrt{10}}\left(m^2 - 10 l^2\right) = 0$$

$l = 1$

$m = \pm\sqrt{10}$

⚠ si lavora rispetto alla base r_u, r_v, che non è ortonormale in generale (e neanche ortogonale)

ma $\underline{v}_2 = \frac{r_u}{\|r_u\|}\|r_u\|\, l \pm \underbrace{\frac{r_v}{\|r_v\|}}_{1}\, \underbrace{\|r_v\|}_{1} \cdot \sqrt{10}$

$$\Rightarrow \underline{w}_{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}\, e_1 \pm \sqrt{10}\, e_2$$

normalizzandolo:

$$\underline{x}_{\frac{1}{2}} = \frac{\underline{w}_i}{\|w_i\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} e_1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} e_2$$

r_u° r_v°

normalizzati

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

direzioni principali:

necessariamente ortogonali

individuate da $$\underline{x}_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ 0 \\ -\frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \pm 1 \\ -3/\sqrt{10} \end{pmatrix}$$

(più precisamente, $\langle \underline{x}_{\frac{1}{2}} \rangle$ s. spazi vett. generati da $x_{\frac{1}{2}}$

$$\frac{1}{10} + 1 + \frac{9}{10} = 2$$

(ulteriore controllo, $\underline{x}_1 \perp \underline{x}_2$: $\frac{1}{10} - 1 + \frac{9}{10} = 0$ ✓)

② $\mathcal{C}: \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -2t^3 \end{cases}$

$\mathcal{C} \subset \underset{\text{Sella di Scimmia}}{\Sigma}$ (chiaro)

* È subito visto come piana:

$At + Bt + C(-2t^3) + D \equiv 0$

$\Leftarrow A = -B, \; C = D = 0$

è contenuta in $x - y = 0$

$\underline{r} = (t, t, -2t^3)$

$\dot{\underline{r}} = (1, 1, -6t^2)$ $\qquad \|\dot{\underline{r}}\| = \sqrt{2 + 36t^4} = \sqrt{2}\sqrt{1+18t^4}$

$\ddot{\underline{r}} = (0, 0, -12t)$

$\dddot{\underline{r}} = (0, 0, -12)$

$$\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 1 & -6t^2 \\ 0 & 0 & -12t \end{vmatrix} = \underline{i}(-12t) - \underline{j}(-12t) + 0 \cdot \underline{k} = -12t\,\underline{i} + 12t\,\underline{j}$$

$2^{\frac{1}{2}} 2^{-\frac{3}{2}} = 2^{-1}$

$$\kappa = \frac{\|\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}\|}{\|\dot{\underline{r}}\|^3} = \frac{\sqrt{12^2 \cdot 2t^2}}{2^{3/2}(1+18t^4)^{3/2}} = \frac{\sqrt{2}\; 12|t|}{2^{3/2}(1+18t^4)^{3/2}}$$

$$= \frac{12\,|t|}{2\,(1+18t^4)^{3/2}} = 6\,\frac{|t|}{(1+18t^4)^{3/2}}$$

$$\tau = -\frac{\langle \dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}, \dddot{\underline{r}} \rangle}{\|\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}\|^2} = \underset{\text{immediato!}}{\ldots} = 0 \implies \mathcal{C} \text{ è piana, come già trovato. } (*)$$

Vediamo se $\mathcal{C}$ è una geodetica

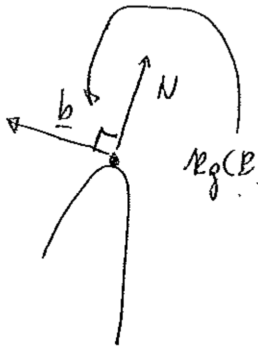
calcoliamo $\langle \underline{N}, \underline{b} \rangle$ è $\underline{b} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

⚠ (il piano osculatore di $\mathcal{C}$ è $x - y = 0$ $\forall$ pto)

$$\underline{N} = \left(3(v^2-u^2),\ 6uv,\ 1\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{9(u^2+v^2)^2+1}}$$

$$\underline{N}\big|_{\mathcal{C}} = \left(\underbrace{3(t^2-t^2)}_{0},\ 6t^2,\ 1\right) \frac{1}{\sqrt{36t^4+1}}$$

$$= \frac{6t^2}{\sqrt{36t^4+1}}\,\underline{j} + \frac{\underline{k}}{\sqrt{36t^4+1}}$$



$$\langle \underline{N}, \underline{b} \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{6t^2}{\sqrt{36t^4+1}} \neq 0$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{C}$ <u>non</u> <u>è</u> <u>una</u> <u>geodetica</u> ($k_g \neq 0$, $\forall t \neq 0$)

(*) per trovare rapidamente il piano su cui giace $\mathcal{C}$, osserviamo che $\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}} = -12t\,\underline{i} + 2t\,\underline{j}$ è $\perp$ piano e che $O \in \mathcal{C}$ $\Rightarrow$ si arriva a $x - y = 0$

(3) La bottiglia di Klein si ottiene come $[0,1] \times S^1 / \sim \equiv \mathcal{K}$

$[0,1] \times S^1$ è compatto e connesso.

Dato che $[0,1] \times S^1 \xrightarrow[\pi]{} \mathcal{K}$
pr. naturale

è continua per costruzione, $\mathcal{K}$ è pure compatto e connesso.

[una f. continua manda compatti connessi in compatti connessi]