ELEMENTI DI GEOMETRIA — Lezione IV

Prof. M. Spera a.a. 2007/08

◈ Recupero della geometria classica (nel piano e nello spazio) (II)

Prendendo uno spazio euclideo (su $\mathbb{R}$) (*) di dimensione 2, sono soddisfatti anche gli assiomi di Euclide mancanti

III : La circonferenza di centro $c \in V$ e raggio $r \geq 0$ è $C_{c,r} : \{ x \in V \mid \|x - c\| = r \}$

IV : è la nozione di perpendicolarità, che è invariante per movimenti rigidi.

Nello spazio, la sfera di centro c e raggio $r \geq 0$ è, parimenti, $\{ x \in V : \|x - c\| = r \}$, $\dim V = 3$

$\equiv S_{c,r}$

(*) Al solito, prendiamo $(V, \langle \, | \, \rangle)$ euclideo e lo riguardiamo come spazio affine su se stesso

◈ Geometria affine ed euclidea nel piano e nello spazio

• retta nel piano (passante per $P_0 \equiv \underline{r}_0$) $P \equiv \underline{r}$

$$\underline{r} = \underline{r}_0 + t\,\underline{a}$$

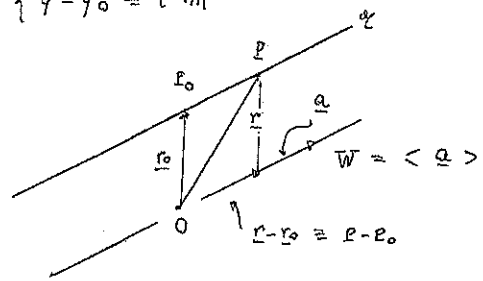
eq. parametriche

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} \qquad \underline{a} = \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

parametri direttori

$$\begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \end{cases}$$

$$(*) \quad \begin{cases} x - x_0 = tl \\ y - y_0 = tm \end{cases}$$



Equazione affine:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ l & m \end{vmatrix} = 0 \qquad m(x - x_0) - l(y - y_0) = 0$$

Dunque, l'eq. affine cercata è della forma

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \qquad (A, B) \neq (0,0)$$

(passaggio per P_0) ovvero $(*)\ [\, Ax + By + C = 0 \,]$ $(A, B) \neq (0,0)$

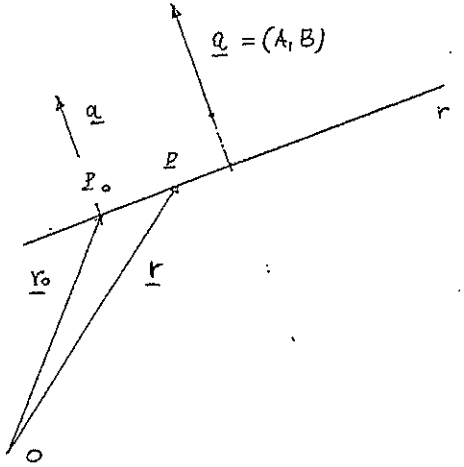
Siccome (*) rappresenta una retta nel piano

Interpretazione euclidea di

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) = 0$$

$$\langle \underline{a} \mid \underline{r}-\underline{r}_0 \rangle = 0$$

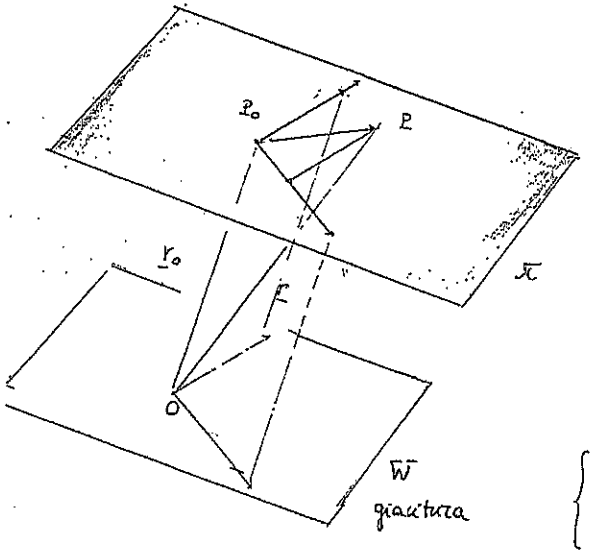
prodotto scalare standard



• piano (nello spazio)

$$\underline{P} = \underline{P}_0 + t\underline{a} + s\underline{b}$$
$$\underline{r} = \underline{r}_0 + t\underline{a} + s\underline{b}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} l' \\ m' \\ n' \end{pmatrix}$$



$\underline{a}, \underline{b}$ indipendenti (in part. $\neq \underline{0}$).

$\underline{a} = (l, m, n)$

$\underline{b} = (l', m', n')$

$$\begin{cases} x = x_0 + tl + sl' \\ y = y_0 + tm + sm' \\ z = z_0 + tn + sn' \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - x_0 = tl + sl' \\ y - y_0 = tm + sm' \\ z - z_0 = tn + sn' \end{cases}$$

Equazioni affini:

$$(*) \quad \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ si arriva a $\quad Ax + By + Cz + D = 0$

$((A, B, C) \neq (0, 0, 0)) \qquad (\star)$

parametri di giacitura

Passaggio per P_0 : $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \Rightarrow$

$$(**) \quad A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$(A, B, C) \neq (0,0,0)$

viceversa $(*)$ rappresenta un piano

osserviamo ancora che

$$A = \rho \left(\begin{vmatrix} m & n \\ n & m' \end{vmatrix} \right)$$

$$B = \rho \left(\begin{vmatrix} n & \ell \\ n' & \ell' \end{vmatrix} \right) \qquad \rho \neq 0$$

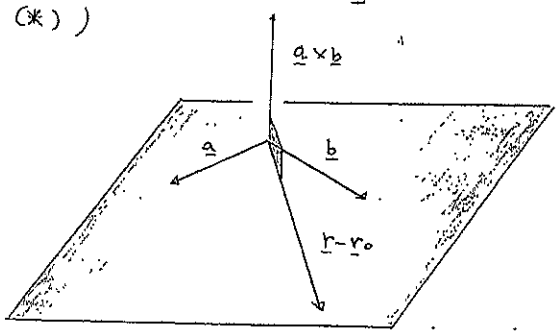
$$C = \rho \left(\begin{vmatrix} \ell & m \\ \ell' & m' \end{vmatrix} \right)$$

In termini <u>cartesiani</u> (euclidei) possiamo scrivere

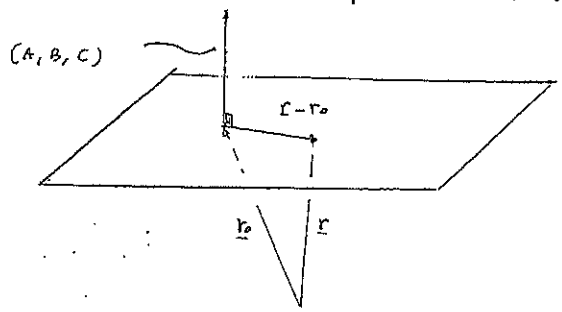
($\langle \, | \, \rangle$ = prod. scalare standard su $\mathbb{R}^3$)

$$\left[\langle r - r_0 \mid \underline{a} \times \underline{b} \rangle = 0 \right]$$

(t la $(*)$)

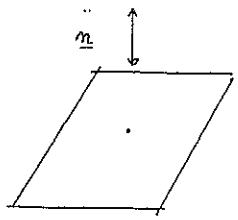


Anche la $(**)$ si interpreta allo stesso modo



$$\underline{n} = \pm \frac{(A, B, C)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

versori normali di π

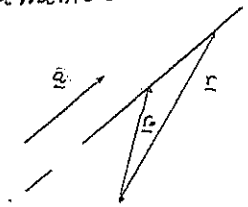


Scelgono uno, è

$$\underline{a} \times \underline{b} = \underset{\neq 0}{\xi} \, \underline{n}$$

- <u>retta nello spazio</u>

Eq. parametrica



$$\underline{r} = \underline{r}_0 + t\,\underline{a}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \\ z = z_0 + tn \end{cases} \qquad \begin{cases} x - x_0 = tl \\ y - y_0 = tm \\ z - z_0 = tn \end{cases} \qquad \underline{0} \neq \underline{a} = \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$$

"parametri" direttori

Eq. affini : applichiamo il principio dei minori orlati

$$\begin{pmatrix} \boxed{x - x_0} & \boxed{y - y_0} & \boxed{z - z_0} \\ \boxed{l} & \boxed{m} & \boxed{n} \end{pmatrix}$$

assumiamo $l \neq 0$

$$\det\begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix} = 0, \quad \det\begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{cases} m(x - x_0) - l(y - y_0) = 0 \\ n(x - x_0) - l(z - z_0) = 0 \end{cases}$$

In generale $\quad r: \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 & \pi \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 & \pi' \end{cases}$

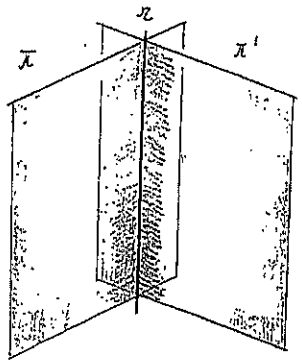
passaggio per P_0

$$\begin{cases} A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \\ A'(x - x_0) + B'(y - y_0) + C'(z - z_0) = 0 \end{cases}$$

Deve essere, chiaramente, per avere una retta

$$r\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} = 2 \quad (= \max)$$

Sicché automaticamente $\quad r\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix} = 2$

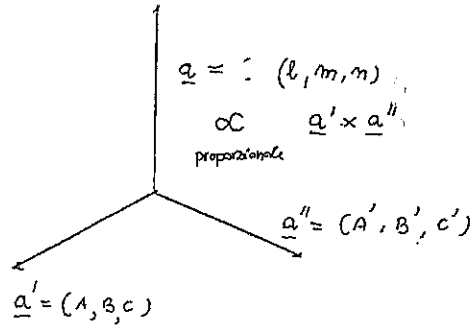


relazione tra le due forme

$$\begin{cases} l = \lambda \begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix} \\ m = -\lambda \begin{vmatrix} A & C \\ A' & C' \end{vmatrix} \\ n = \lambda \begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix} \end{cases}$$

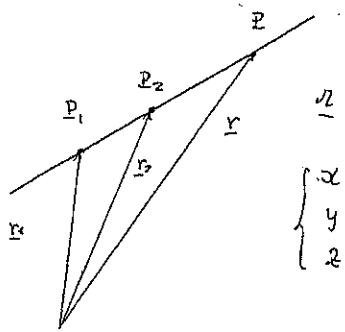
$\lambda \neq 0$

Interpretazione cartesiana



- retta per due punti distinti

(nello spazio, nel piano è analoga..)

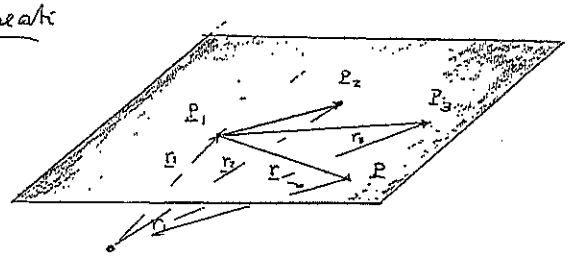


$$\underline{r} - \underline{r}_1 = t\,(\underline{r}_2 - \underline{r}_1) \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x - x_1 = t\,(x_2 - x_1) \\ y - y_1 = t\,(y_2 - y_1) \\ z - z_1 = t\,(z_2 - z_1) \end{cases}$$

per fissare le idee

- piano per tre punti distinti e non allineati



$$\underline{r} - \underline{r}_1 = t\,(\underline{r}_2 - \underline{r}_1) + s\,(\underline{r}_3 - \underline{r}_1)$$

$$\begin{cases} x - x_1 = t\,(x_2 - x_1) + s\,(x_3 - x_1) \\ y - y_1 = t\,(y_2 - y_1) + s\,(y_3 - y_1) \\ z - z_1 = t\,(z_2 - z_1) + s\,(z_3 - z_1) \end{cases}$$

ovvero :

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

che si può anche scrivere così :

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

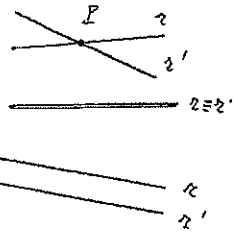
(perché ?)

Posizioni mutue di rette e piani

Piano affine $\mathbb{A}^2$ (reale) (o euclideo $\mathbb{E}^2$)

r, r' rette

- incidenti
- coincidenti (caso particolare di parallelismo) $r \equiv r'$
- parallele (non coincidenti)



$$\begin{cases} r: & ax + by + c = 0 \\ r': & a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

$(a,b) \neq (0,0)$
$(a',b') \neq (0,0)$

- incidenza $\quad r\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 2$ (rango)

(• coincidenza $\quad r\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 1$)

(di fatto, c'è una sola equazione ....)

- parallelismo $\quad r\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2 > r\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 1$

più esattamente, la condizione di parallelismo è $r\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 1$, e, successivamente si selezionano le condizioni $r \equiv r'$, $r \neq r'$

Nel piano:

☆ fascio di rette determinato da r e r' $(r \neq r')$

(simbolicamente $\lambda r + \mu r' = 0$)

$(\lambda, \mu) \neq (0,0)$ [λ e μ sono coordinate "omogenee", dette anche coordinate plückeriane di retta, nel senso che sono definite a meno di un fattore di proporzionalità v. oltre...]

$$\lambda(ax + by + c) + \mu(a'x + b'y + c') = 0$$

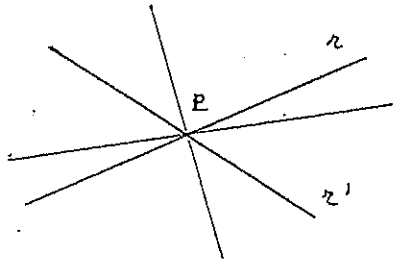
$$\parallel$$

$$\left[(\lambda a + \mu a')x + (\lambda b + \mu b')y + (\lambda c + \mu c') = 0 \right]$$

Si hanno due tipi di fasci (a livello proiettivo tale distinzione cadrà)

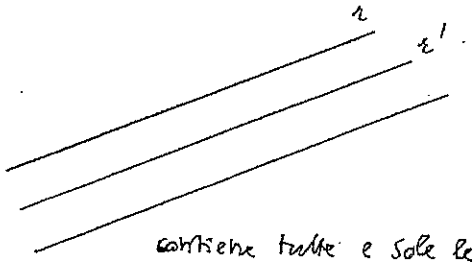
- fascio proprio se r e r' sono incidenti (in P, sicché tutte le rette del fascio passano per tale punto e, viceversa, ogni retta per P appartiene al fascio determinato da r e r' (o da due rette qualsiasi di questo, purché distinte).

P: centro del fascio



P: centro del fascio

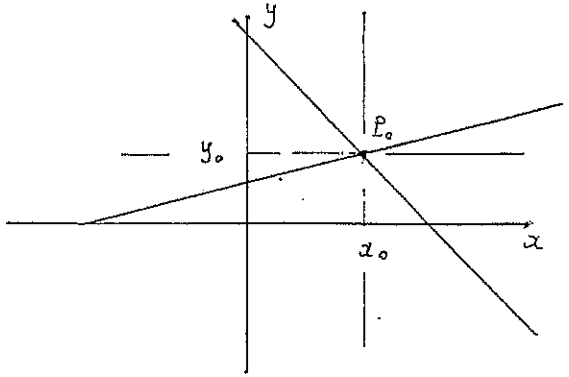
- fascio improprio $\quad r \neq r'$ e $r \parallel r'$



contiene tutte e sole le rette $\parallel r$ (o anche r')

$$ax + by + k = 0$$

$(a,b) \neq (0,0)$ $\quad$ ← variabile



$$\underset{\lambda}{\underset{|||}{a}}(x-x_0)+\underset{\mu}{\underset{|||}{b}}(y-y_0)=0 \qquad (a,b)\neq(0,0)$$

retta generica per $P_0:(x_0,y_0)$; tale fascio si può pensare generato, per esempio, da

$x=x_0$ e $y=y_0$

($\parallel$ asse y) ($\parallel$ asse x)

Se $b\neq 0$, si ha $y-y_0=\underbrace{-\frac{a}{b}}_{m}(x-x_0)$

m : coefficiente angolare

Al variare di m, descrivo tutte le rette del fascio tranne $x=x_0$ (che corrisponde a $m=\infty$)

[⚠ il concetto di angolo è metrico]

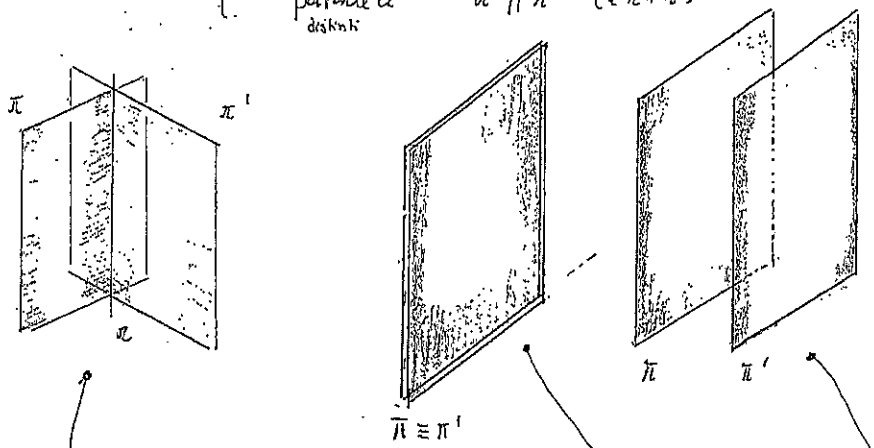
parametri direttori:

⚠ Se $l=1$ è $\frac{m}{l}=m$ ⟶ $l=\rho b$, $m=-\rho a$ $\quad \rho\neq 0$

- Piani nello spazio $\mathbb{A}^3$ (o $\mathbb{E}^3$)

π,π' :
- incidenti : $\pi\neq\pi'$ $\quad \pi\cap\pi'=r$ retta
- (coincidenti) $\pi=\pi'$
- paralleli distinti $\pi\parallel\pi'$ $(\pi\neq\pi')$

(*) di nuovo, valgono considerazioni analoghe al caso delle rette nel piano



$$\begin{matrix}\pi\\ \pi'\end{matrix}\begin{cases}ax+by+cz+d=0\\ a'x+b'y+c'z+d'=0\end{cases} \qquad \begin{matrix}(a,b,c)\neq(0,0,0)\\ (a',b',c')\neq(0,0,0)\end{matrix}$$

$$r\left[\begin{pmatrix}a&b&c&d\\a'&b'&c'&d'\end{pmatrix}\right]=r\left[\begin{pmatrix}a&b&c\\a'&b'&c'\end{pmatrix}\right]=2 \qquad r\left[\begin{pmatrix}a&b&c&d\\a'&b'&c'&d'\end{pmatrix}\right]=r\left[\begin{pmatrix}a&b&c\\a'&b'&c'\end{pmatrix}\right]=1$$

$$r\left[\begin{pmatrix}a&b&c&d\\a'&b'&c'&d'\end{pmatrix}\right]=2>r\left[\begin{pmatrix}a&b&c\\a'&b'&c'\end{pmatrix}\right]=1$$

- fascio di piani

Siano $\pi : ax + by + cz + d = 0$ $\quad (a,b,c) \neq (0,0,0)$

$\pi' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$ $\quad (a',b',c') \neq (0,0,0)$

di rank $\left(r\left[\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}\right] = 2 \right)$

$\Rightarrow$ il fascio di piani determinato da π e π' (o generato da π e π') è l'insieme dei piani della forma (simbol.: $\lambda\pi + \mu\pi' = 0$)

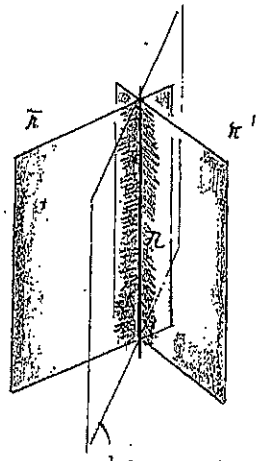
$$\lambda(ax+by+cz+d) + \mu(a'x+b'y+c'z+d') = 0$$

ovvero

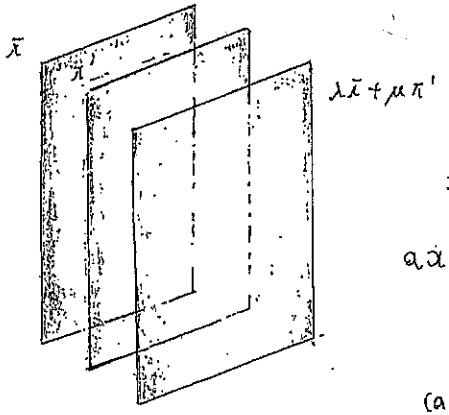
$$\left[(\lambda a + \mu a')x + (\lambda b + \mu b')y + (\lambda c + \mu c')z + (\lambda d + \mu d') = 0 \right]$$

$\therefore$ Si hanno due tipi di fasci

- fascio proprio, se π e π' sono incidenti (in una retta r, necessariamente (Euclide XI. 3 v. dispensa 2)); r è detta asse del fascio, che pertanto consiste dei piani contenenti r,
- fascio improprio, se π e π' sono paralleli, che consta di tutti e soli i piani paralleli a π o π'



fascio proprio



fascio improprio

prende la forma

$$ax + by + cz + k = 0$$

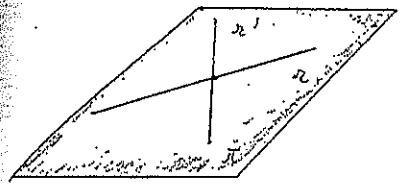
variabile

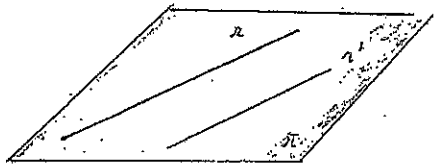
$(a,b,c) \neq (0,0,0)$

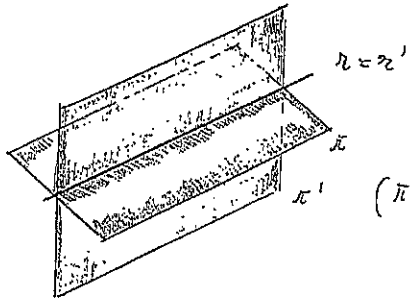
- posizioni mutue di due rette nello spazio

r e r' complanari $\begin{cases} \text{incidenti} \\ \text{(coincidenti)} \\ \text{parallele} \end{cases}$

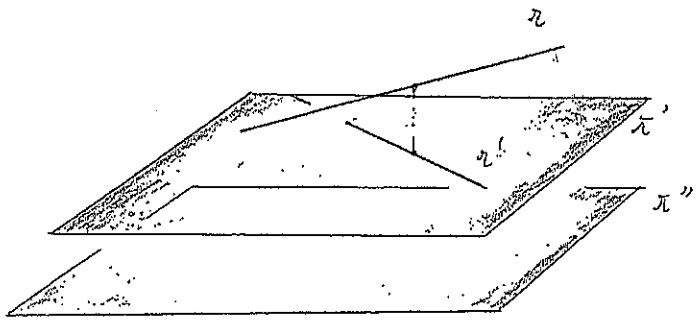
sghembe







(π non è unico!)

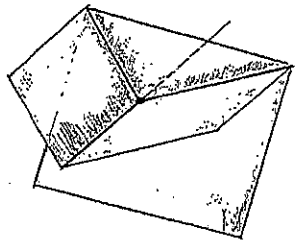


V. oltre per i dettagli analitici

- posizioni mutue di tre piani

$$\boxed{\pi \cap \pi' \cap \pi'' \neq \phi}$$ (Incidenti)

- un punto

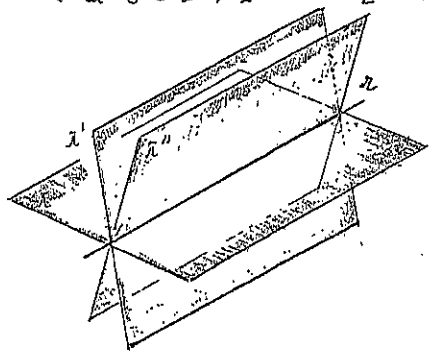


$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ a''x + b''y + c'z + d'' = 0 \end{cases}$$

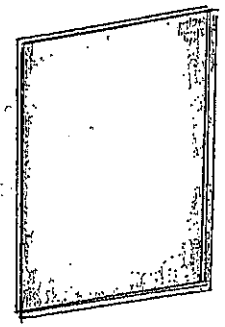
$$r\left[\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix}\right] = r\left[\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}\right] = 3$$

- una retta ($\Rightarrow$ formano fascio)

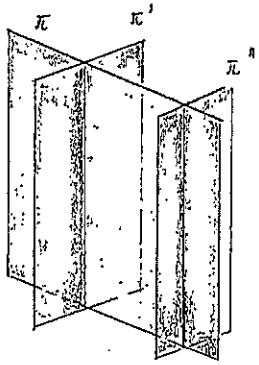
$$r\left[\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix}\right] = r\left[\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}\right] = 2$$



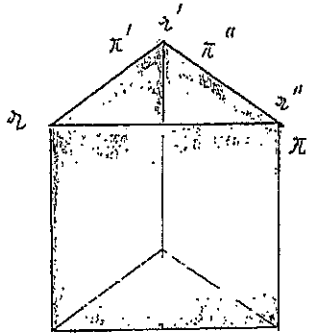
• <u>un piano</u> : $\pi \equiv \pi' \equiv \pi''$



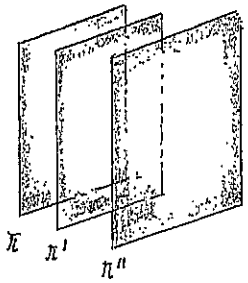
$$\boxed{\pi \cap \pi' \cap \pi'' = \phi}$$



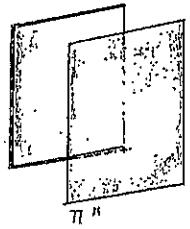
$\pi' \neq \pi''$ $\quad \pi' \parallel \pi''$



$r \parallel r' \parallel r''$

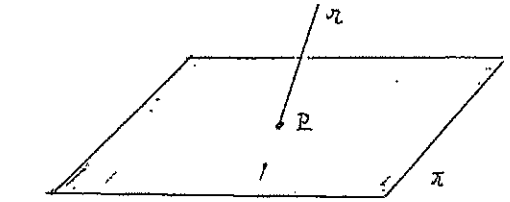


π, π', π'' distinte $\parallel$

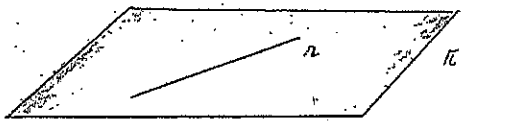


$\underbrace{\pi = \pi' \parallel \pi''}_{\text{distinti}}$

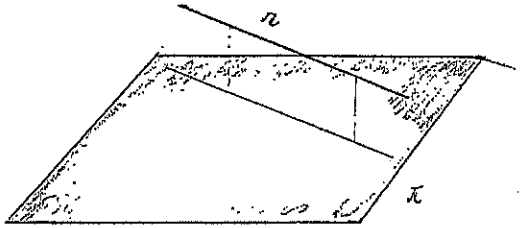
• piano e retta nello spazio



$\pi \cap r = P$



$\pi \cap r = r$



$\pi \cap r = \phi$

$(r \parallel \pi \quad r \subsetneq \pi)$

discutere i dettagli analitici
(ci si riconduce all'intersezione di tre piani ...)

Parallelismo di due rette

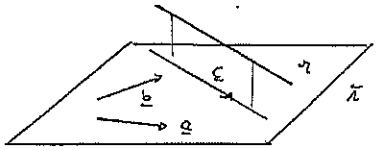
nel piano, o nello spazio: stessa direzione

$\equiv$ proporzionalità dei rispettivi parametri direttori:

$$r\left[\begin{pmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \end{pmatrix}\right] = 1$$

Parallelismo di retta e piano (nello spazio)

1ª forma



(sono date eq. parametriche di π e r)

$$\det(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) = 0 \qquad \begin{array}{l} \underline{a} = (l, m, n) \\ \underline{b} = (l', m', n') \\ \underline{c} = (l'', m'', n'') \end{array}$$

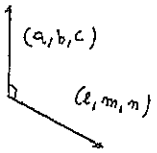
$$(*) \quad \begin{vmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \\ l'' & m'' & n'' \end{vmatrix} = 0$$

2° forma $\quad \pi: \; ax + by + cz + d = 0 \qquad (a, b, c) \neq (0,0,0)$

r: direzione $\left\langle \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \right\rangle \qquad (l, m, n) \neq (0,0,0)$

si arriva subito da $(*)$ a

$$(*) \qquad al + bm + cn = 0:$$



in termini euclidei la $(*)$ è lampante.

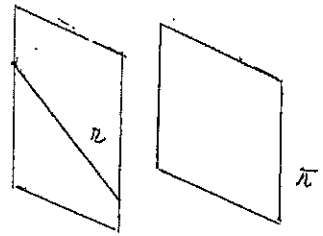
3ª forma in termini di equazioni affini

$$r: \begin{cases} a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \end{cases}$$

$$\left(r\left[\begin{pmatrix} a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix}\right] = r\left[\begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}\right] = 2 \right) \quad *$$

$$\pi: \quad ax + by + cz + d = 0$$

Si impone la condizione che esista un piano del fascio di asse r parallelo a π



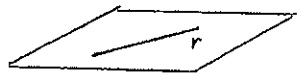
ovvero: $\exists\, (\lambda, \mu, \nu) \neq 0$

$$\begin{cases} \lambda a + \mu a' + \nu a'' = 0 \\ \lambda b + \mu b' + \nu b'' = 0 \\ \lambda c + \mu c' + \nu c'' = 0 \end{cases}$$

tuttavia (in base a $*$) $\quad r\left[\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}\right] = 2$

ovvero

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0$$



Se, in più, vogliamo che $\underline{\underline{r \subset \pi}}$, bisogna imporre $r\left[\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix}\right] = 2$, ovvero, che π sia uno dei piani del fascio di asse r

Complanarità di due rette nello spazio

$$r: \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \qquad r\left[\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix}\right] = r\left[\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}\right] = 2$$

$$r_1: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_1'x + b_1'y + c_1'z + d_1' = 0 \end{cases}$$

analoga condizione

r e r_1 sono complanari $\iff$ una delle due (r_1, per fissare le idee) appartiene ad un piano del fascio che ha per asse l'altra (r)

ovvero, se esiste un piano del fascio di asse r coincidente con un piano del fascio di asse r_1.

Analiticamente, devono esistere

$$(\lambda, \mu) \neq (0,0) \qquad (\lambda_1, \mu_1) \neq (0,0)$$

tali che

$$\begin{cases} \lambda a + \mu a' + \lambda_1 a_1 + \mu_1 a_1' = 0 \\ \lambda b + \mu b' + \lambda_1 a_1 + \mu_1 b_1' = 0 \\ \lambda c + \mu c' + \lambda_1 c_1 + \mu_1 c_1' = 0 \\ \lambda d + \mu d' + \lambda_1 d_1 + \mu_1 d_1' = 0 \end{cases}$$

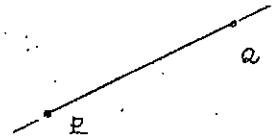
$\Rightarrow$ il sistema omogeneo appena scritto deve avere soluzioni non banali $\Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_1' & b_1' & c_1' & d_1' \end{vmatrix} = 0$$

Nozioni metriche

- Distanza tra $P, Q \in E$

$$d(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|$$

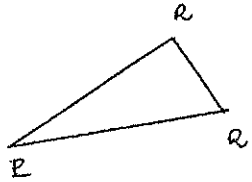


Proprietà caratterizzanti

i) $d(P,Q) \geq 0 \quad \forall P,Q \in E$
$(= 0 \iff P = Q)$

ii) $d(Q,P) = d(P,Q) \quad \forall P,Q \in E$
simmetria

iii) $d(P,Q) \leq d(P,R) + d(R,Q)$
disuguaglianza triangolare

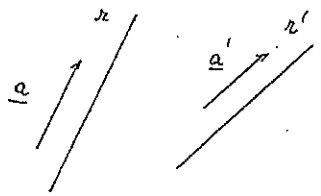


Conseguenza immediata della disuguaglianza di Schwarz

Lavoriamo con $E \equiv V$, V sp. euclideo per semplicità:

$$d(P,Q)^2 = \|x-y\|^2 = \|x-z+z-y\|^2 = \|x-z\|^2 + \|z-y\|^2 + 2\langle x-z \mid z-y\rangle \leq \|x-z\|^2 + \|z-y\|^2 + 2|\langle x-z \mid z-y\rangle| \leq \|x-z\|^2 + \|z-y\|^2 + 2\|x-z\|\,\|z-y\| \underset{\text{Schwarz}}{=} (\|x-z\| + \|z-y\|)^2 = (d(P,R) + d(R,Q))^2 \quad \square$$

• Angolo di due rette r, r' (nel piano o nello spazio)



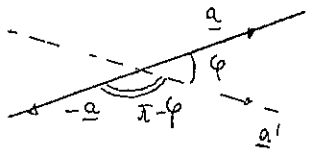
• angolo convesso tra r, r'

(*) $0 \le \varphi \le \pi$

(**) $\cos\varphi = \dfrac{\langle \underline{a} \mid \underline{a}' \rangle}{\|\underline{a}\|\,\|\underline{a}'\|}$

⚠ tale definizione dipende dal verso di $\underline{a}$ e $\underline{a}'$:

se, per fissare le idee $\underline{a} \longmapsto -\underline{a}$, $\underline{a}' \longmapsto \underline{a}'$, si ha: $\varphi \longmapsto \pi - \varphi$



• $\mathbb{E}^2$

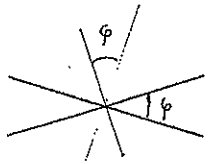
$r: \quad ax + by + c = 0 \qquad (a,b) \neq (0,0)$

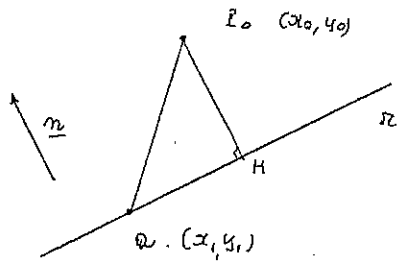
$r' \quad a'x + b'y + c' = 0 \qquad (a',b') \neq (0,0)$

$\underline{a} = (\ell, m) = \rho\,(-b, a) \qquad \rho, \rho' \neq 0$

$\underline{a}' = (\ell', m') = \rho'\,(-b', a')$

$0 \le \varphi \le \pi \qquad \cos\varphi = \ldots = \dfrac{a'a + b'b}{\sqrt{a^2+b^2}\,\sqrt{a'^2+b'^2}}$ (NOTARE!)





$\underline{n} = \left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$

$\|\underline{n}\| = 1$

$d(P_0, r) = |\langle \overrightarrow{P_0 Q} \mid \underline{n} \rangle| =$

distanza di P_0 da r $= \inf_{Q \in r} d(P_0, Q) = d(P_0, H)$

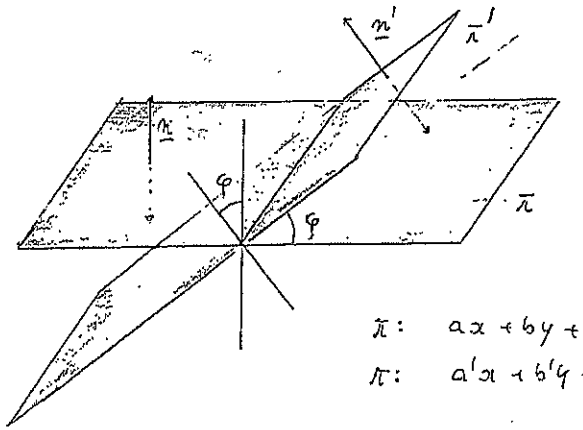
$= \dfrac{|a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0)|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$= \ldots = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

(facile da ricordare)

$\mathbb{E}^3$

- angolo convesso tra due piani π, π'



$$\underline{n} = \frac{(a, b, c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$\pi: \quad ax + by + cz + d = 0$

$\pi: \quad a'x + b'y + c'z + d' = 0$

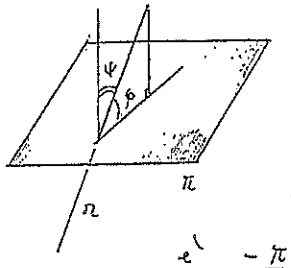
$(a, b, c) \neq (0,0,0)$

$(a', b', c') \neq (0\ 0\ 0)$

$$\cos\varphi = \frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\ \sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}$$

$0 \leq \varphi \leq \pi$

- angolo tra una retta e un piano



$\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$

se $0 \leq \psi \leq \pi \quad (\Rightarrow -\pi \leq -\psi \leq 0)$

è $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

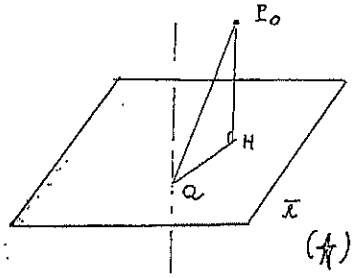
r: pn. direttori $(l, m, n) \neq (0,0,0)$

$\pi: \ ax + by + cz + d = 0$

$$\sin\varphi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = \cos\psi$$

$$= \frac{al + bm + cn}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\ \sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

- distanza di un punto da un piano



Con un ragionamento analogo a quello svolto per calcolare la distanza pto - retta nel piano si ha:

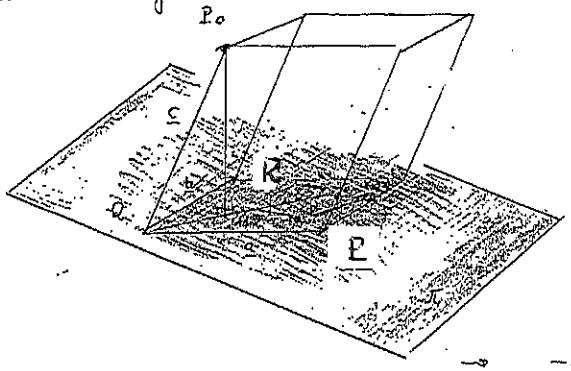
$$(*) \quad d(P, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$P_0: (x_0, y_0, z_0)$

$\pi: \ ax + by + cz + d = 0$

$(a, b, c) \neq (0,0,0)$

osserviamo che si può procedere anche nel modo seguente, suscettibile di generalizzazioni.



Sia $Q \in \pi$ arbitrario e $\overrightarrow{QP}$, $\overrightarrow{QR}$ una base della giacitura di π: allora $\|P_0H\| =$

$$= d(P_0, \pi) = \frac{\text{volume parallelepipedo}}{\text{area parallelogramma}} \quad (\text{valori assoluti})$$

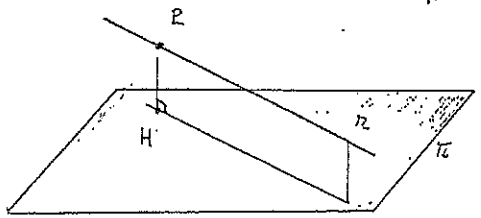
$$= \frac{|V(\overrightarrow{QP_0}, \overrightarrow{QP}, \overrightarrow{QR})|}{|A(\overrightarrow{QP}, \overrightarrow{QR})|} = \frac{|\det(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})|}{\|\underline{a} \times \underline{b}\|}$$

$$= \frac{|\langle \underline{a} \times \underline{b} \mid \underline{c} \rangle|}{\|\underline{a} \times \underline{b}\|} = |\langle \underline{n} \mid \underline{c} \rangle|$$

che conduce subito a (*)

+d'

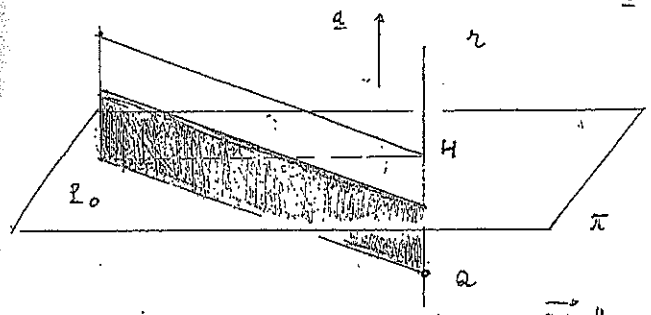
- <u>Distanza</u> tra r e π, $r \parallel \pi$



$d(r, \pi) = \|PH\|$ ($P \in r$; arbitrario)

- <u>Distanza</u> <u>punto</u> - <u>retta</u> (nello spazio)

$\underline{a} = (l, m, n) \neq (0,0,0)$



$P_0 \in \pi$

$\pi \perp r$

$$d(P_0, r) = \|P_0 H\| = \frac{\|\underline{a} \times \overrightarrow{QP_0}\|}{\|\underline{a}\|} =$$

$$\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_0-y_1 & z_0-z_1 \\ m & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_0-x_1 & z_0-z_1 \\ l & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_0-x_1 & y_0-y_1 \\ l & m \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

Notare anche qui

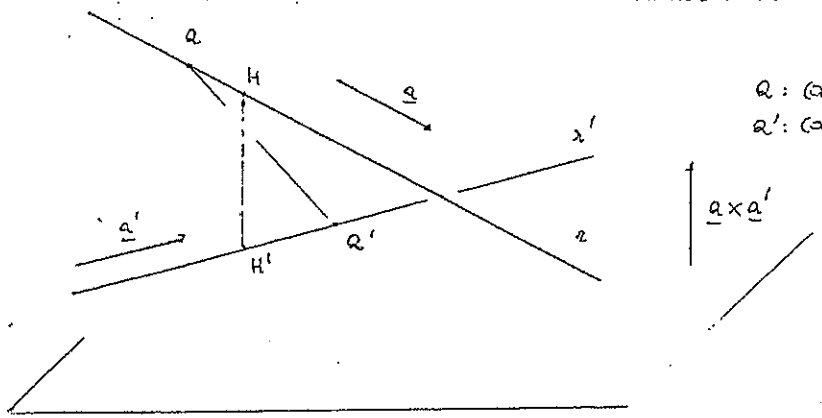
$$d(P_0, r) = \frac{|A(\overrightarrow{P_0Q}, \underline{a})|}{\|\underline{a}\|}$$

← area del parallelogramma di "lati" $\overrightarrow{P_0Q}$, $\underline{a}$ approssimato.

↖ lunghezza di $\|\underline{a}\|$

- Distanza tra due rette sghembe

r e r' sono $\parallel$ ad una stessa giacitura individuata da $\underline{a} \times \underline{a}'$

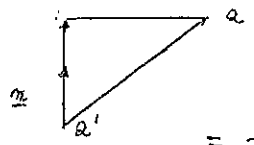


$Q: (x_0\ y_0\ z_0)$

$Q': (x_0'\ y_0'\ z_0')$

$$d(r, r') = d(H, H') = \frac{|\langle \underline{a} \times \underline{a}' \mid \overrightarrow{QQ'} \rangle|}{\|\underline{a} \times \underline{a}'\|}$$

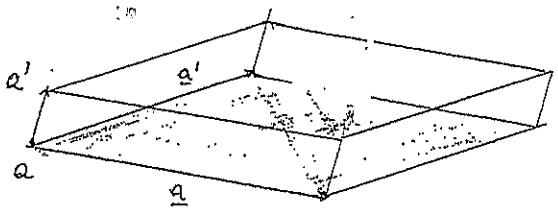
$$\underline{n} = \frac{\underline{a} \times \underline{a}'}{\|\underline{a} \times \underline{a}'\|}$$



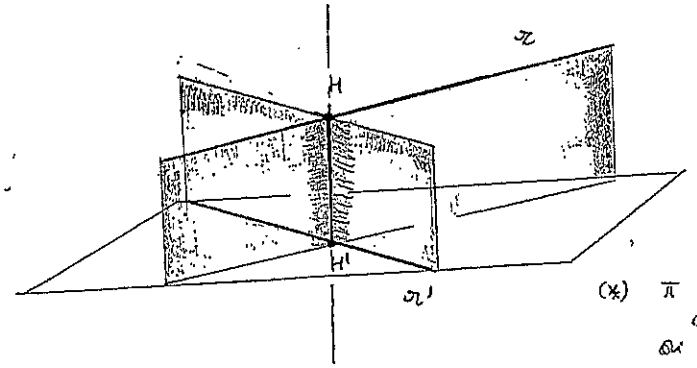
$$= \frac{\left| \begin{vmatrix} x_0-x_0' & y_0-y_0' & z_0-z_0' \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} \right|}{\sqrt{\begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l & n \\ l' & n' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l & m \\ l' & m' \end{vmatrix}^2}}$$

Anche qui si ha la stessa interpretazione geometrica

$$d(r,r') = \frac{|v(\vec{QQ'}, \underline{a}, \underline{a}')|}{|A(\underline{a}, \underline{a}')|}$$

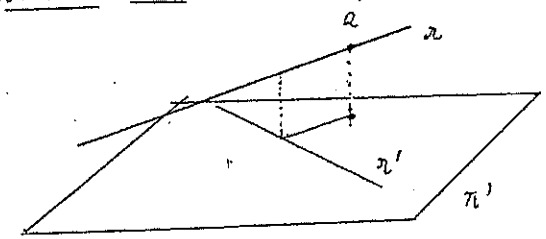


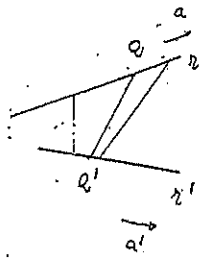
Determiniamo l'equazione di $HH' = r''$ (perpendicolare comune a r e r'): essa è data come intersezione del piano del fascio di asse $r \perp \pi$ (*) e di quello di asse $r' \perp \pi$. Risultano così determinati anche H e H'



(*) π piano qualsiasi di giacitura individuata da $\underline{a} \times \underline{a}'$

Un altro metodo per calcolare $d(r,r')$ (r, r' sghembe) è il seguente: sia $Q \in r$ arbitrario. Si scrive l'equazione del piano $\pi' \supset r'$ parallelo a r. Infine si calcola $d(Q, \pi')$





Molto rapido risulta il metodo seguente (v. figura)

per determinare HH' ... O: origine, $Q, Q' \in r, r'$ arbitrari

$$\vec{OH} = \vec{OQ} + t\,\underline{a}$$
$$\vec{OH'} = \vec{OQ'} + t'\,\underline{a}'$$

⚠: t, t' variano indipendentemente.

$$\begin{cases} \langle \vec{HH'} \mid \underline{a} \rangle = 0 \\ \langle \vec{HH'} \mid \underline{a}' \rangle = 0 \end{cases}$$

$$\vec{HH'} = \vec{QQ'} + t'\underline{a}' - t\,\underline{a}$$

sostituendo

$$\begin{cases} \langle \vec{QQ'} \mid \underline{a} \rangle + t' \langle \underline{a}' \mid \underline{a} \rangle - t \langle \underline{a} \mid \underline{a} \rangle = 0 \\ \langle \vec{QQ'} \mid \underline{a}' \rangle + t' \langle \underline{a}' \mid \underline{a}' \rangle - t \langle \underline{a} \mid \underline{a}' \rangle = 0 \end{cases}$$

ma $\det(\ ) = (\text{Lagrange}^{(*)}) = \|\underline{a} \times \underline{a}'\| \neq 0$

$\Rightarrow$ si ha ... sol unica per t, t'.

(*) $\langle \underline{v} \times \underline{w} \mid \underline{a} \times \underline{b} \rangle = \begin{vmatrix} \langle \underline{v} \mid \underline{a} \rangle & \langle \underline{v} \mid \underline{b} \rangle \\ \langle \underline{w} \mid \underline{a} \rangle & \langle \underline{w} \mid \underline{b} \rangle \end{vmatrix}$

La discussione precedente suggerisce un metodo generale per determinare la distanza di due sottospazi affini

$S = P + \bar{U}$, $T = Q + \bar{W}$

(P e Q qualsiasi in S e T)

si considera una base qualsiasi di $\bar{U} + \bar{W}$, sia

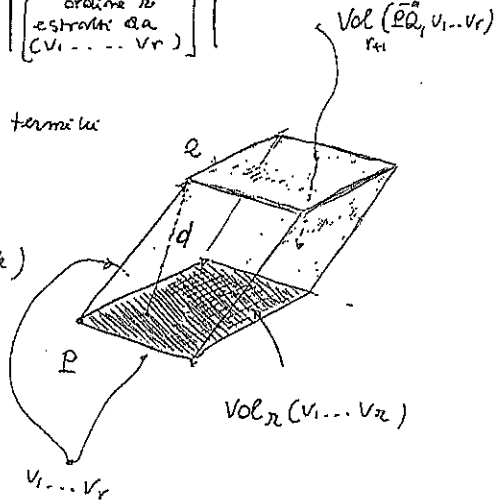
$(v_1 \dots v_r)$ $\qquad r \le n$

Essa dà luogo ad un r-parallelepipedo di "volume" $\rightsquigarrow$ $Vol_r(v_1 \dots v_r)$ dato da

$$\sqrt{\sum \left| \begin{bmatrix} \text{minori di ordine } r \\ \text{estratti da} \\ (v_1 \dots v_r) \end{bmatrix} \right|^2}$$

$\binom{n}{r}$ termini

($\sim$ la "lunghezza" di un vettore in uno spazio $\binom{n}{r}$ dimensionale)



Si ha allora (v. figura)

$$d = \sqrt{\frac{\sum \left| \begin{bmatrix} \text{minori di ordine} \\ r+1 \text{ estratti da} \\ (\vec{PQ}, v_1 \dots v_r) \end{bmatrix} \right|^2}{\sum \left| \begin{bmatrix} \text{minori di ordine} \\ r \text{ estratti da} \\ (v_1 \dots v_r) \end{bmatrix} \right|^2}}$$

$\binom{n}{r+1}$ termini

$\binom{n}{r}$ termini

$$\equiv \frac{Vol_{r+1}(\vec{PQ}, v_1 \dots v_r)}{Vol_r(v_1 \dots v_r)}$$

($r+1$-parallelepipedo di volume Vol_{r+1})

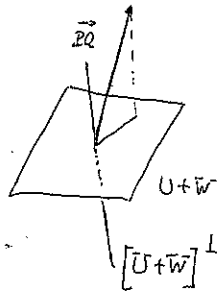
(si prendono i valori assoluti)

Tale distanza è zero $\Leftrightarrow$ $S \cap T \neq \phi$

ovviamente è anche

$$d = \sqrt{\|\vec{PQ}\|^2 - \|P_{\bar{U}+\bar{W}}(\vec{PQ})\|^2}$$

$$= \|P_{[\bar{U}+\bar{W}]^\perp}(\vec{PQ})\|$$



P : proiezione ortogonale

Per utilizzare tale formula, basta ortonormalizzare $(v_1 \dots v_r)$ tramite G.S.

Nota: il problema precedente può essere anche efficacemente affrontato per via analitica nel modo seguente: descritti S e T tramite equazioni parametriche ... si ha

$$d(P, Q)^2 = \underline{\text{polinomio di 2° grado}} \text{ nelle variabili } t_1, t_2, \dots, t_{\underbrace{\dim T}_{n}}, s_1, s_2, \dots, s_{\underbrace{\dim W}_{m}}$$

P: punto generico in S; Q: punto generico in T

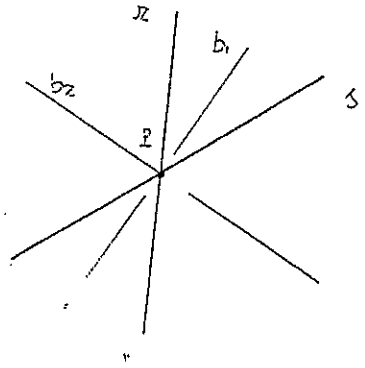
$$\equiv \varphi(t_1, \dots, t_n, s_1, \dots, s_m)$$

Si studiano i pti critici di tale funzione (cfr. capitolo sul calcolo differenziale):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_i} = 0 \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial s_j} = 0 \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, n \\ j = 1, 2, \dots, m \end{array}$$

Si ottiene un sistema lineare che ammette sempre soluzione (perché?)

◈ bisettrici di r e s



☆ Possiamo pensare r e s come asintoti di un'iperbole (si potrebbe ragionare in termini di geom. proiettiva ...)

b_1 e b_2 forniscono gli assi ..

$$r: \quad ax + by + c = 0$$
$$s: \quad a'x + b'y + c' = 0$$

Le direzioni di b_1 e b_2 (ortogonali tra loro) si possono ottenere così: si forma

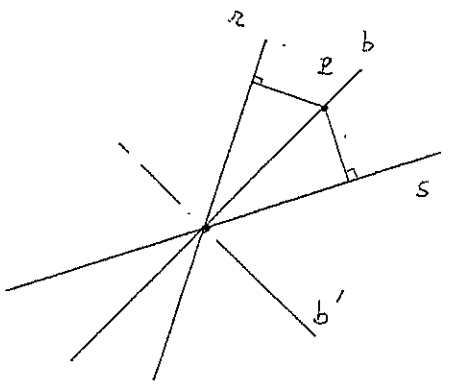
$$(ax + by)(a'x + b'y) =$$
$$= \underbrace{aa'}_{A} x^2 + \underbrace{(ab' + a'b)}_{2B} xy + \underbrace{bb'}_{C} y^2$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

Si risolve ☆ $(l \;\; m) \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = 0$ $(l, m) \neq (0, 0)$

Le due sol. danno le direzioni di b_1 e b_2 ..

Ovviamente, è possibile dare al problema anche una soluzione elementare (che, per esempio, può essere utilizzata per trovare gli assi di un'iperbole, dati gli asintoti) molto rapida.



$r: ax+by+c=0$
$s = a'x+b'y+c'=0$
incidenti

b è il luogo di pti P equidistanti da r e s. Se $P:(x,y) \in b$, deve essere

$$\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|a'x+b'y+c'|}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$$

Sia $a^2+b^2 = a'^2+b'^2 = 1$, si ha

$$|ax+by+c| = |a'x+b'y+c'|$$

ovvero $(ax+by+c)^2 - (a'x+b'y+c')^2 = 0$

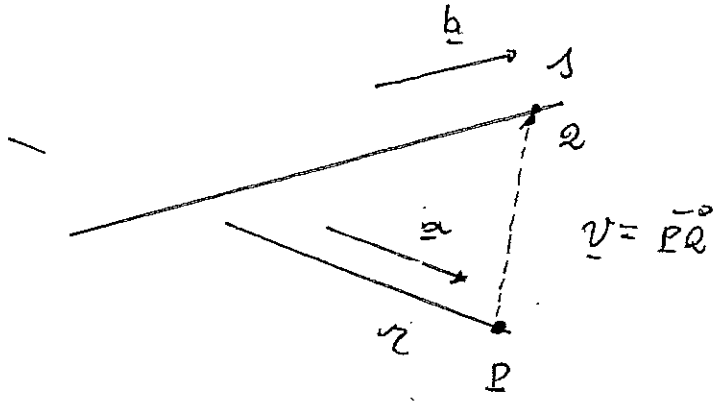
$\Rightarrow (a \pm a')x + (b \pm b')y + (c \pm c') = 0$.

Si ottengono ovviamente 2 sol. b e b', perp. tra loro

(verifichiamolo analiticamente:

$$(a+a')(a-a') + (b+b')(b-b')$$
$$= a^2 - a'^2 + b^2 - b'^2 = a^2+b^2-a'^2-b'^2 = 0,$$

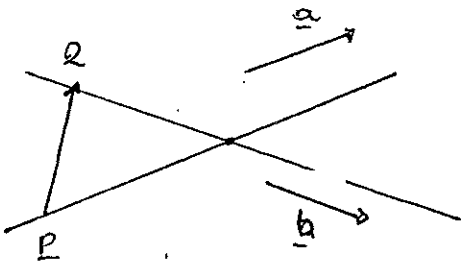
◆ Altro modo per controllare se due rette risultano sghembe ($\underline{a}$, $\underline{b}$ individuano le rispettive direzioni)

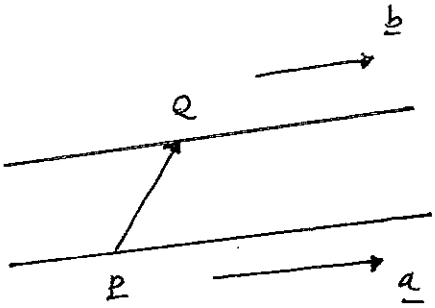


Presi due pti qualsiasi P, Q, $P \in r$, $Q \in s$ e posto $\underline{v} = \overrightarrow{PQ}$, deve risultare

$$\boxed{\det(\underline{a}, \underline{b}, \underline{v}) \neq 0}$$

(v. figure)



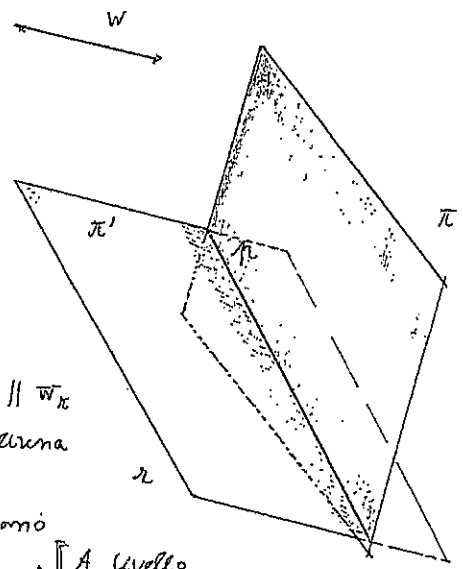


Pertanto, la condizione di complanarità prende anche la forma

$$\boxed{\det(\underline{a}, \underline{b}, \underline{v}) = 0}$$

* <u>Problema</u> : proiettare una retta r su un piano π secondo una direzione $\overline{w} = \langle w \rangle_{*0}$

<u>Sol.</u> Se $r \subset \pi$ non vi è nulla da fare, altrimenti si considera il piano del fascio di asse r parallelo a $\overline{w}$ (sia esso π') Quindi si considera $p = \pi \cap \pi'$: questa è la proiezione cercata



Nota: se $\overline{w} \parallel \overline{w}_\pi$ non si ottiene alcuna retta poiché si considera il piano per $r \parallel \pi$. [[A livello proiettivo si ottiene una retta all'∞ che altro non è che la giacitura di π, vedi oltre]]

* <u>Problema</u> Dato P, trovarne il simmetrico P^* rispetto ad un piano π, in una direzione prefissata $\overline{w}$

<u>Sol.</u> Si scrive l'equazione della retta per P avente direzione $\overline{w}$.

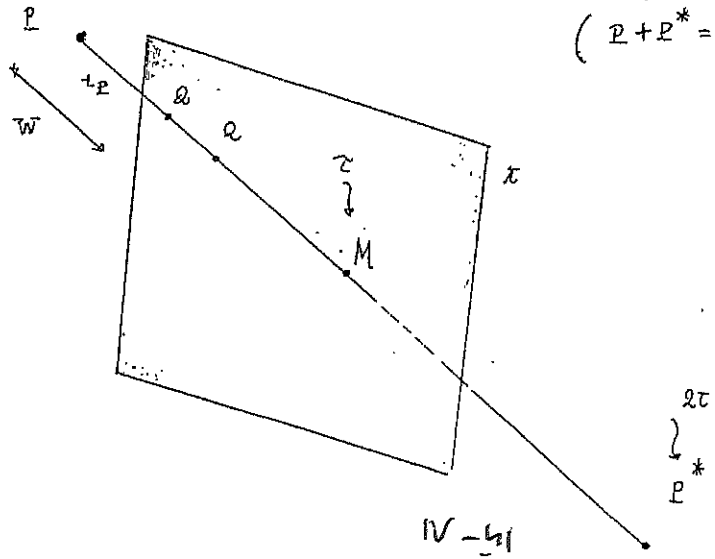
$$r_P : Q = P + t\,w \qquad \langle w \rangle = \overline{w}$$

Si determina $M' = r_P \cap \pi$: sia τ il valore corrispondente di t

Allora $P^* = P + 2\tau\, w$ ⚠ ha senso in A^3 o E^3

[se $P \in \pi$ è $\tau = 0$ $P = P^*$]

($P + P^* = 2M$)



☆ <u>Sfera di centro</u> $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ <u>e raggio R</u>

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x_0 x - 2y_0 y - 2z_0 z + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2 = 0$$

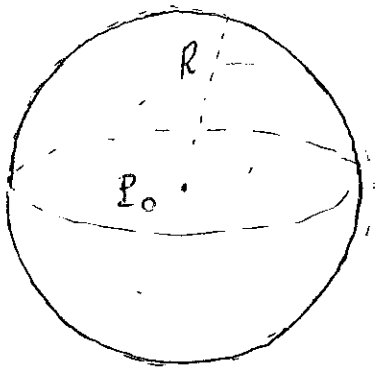
Inversamente, data una quadrica del tipo

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

rappresenta una sfera di centro

$$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

con
$$\begin{cases} x_0 = -\dfrac{a}{2} \\ y_0 = -\dfrac{b}{2} \\ z_0 = -\dfrac{c}{2} \end{cases}$$



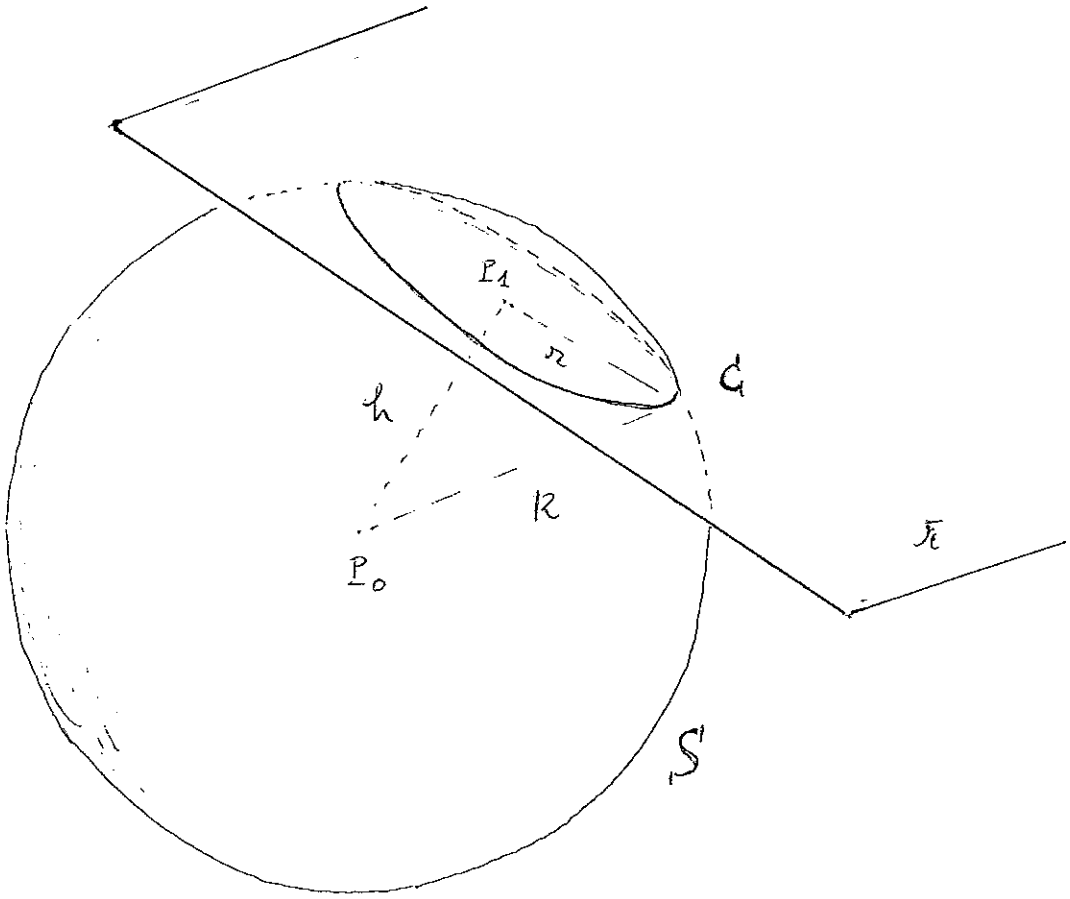
e raggio R t.c. $R^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - d$

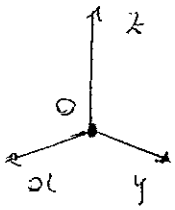
$$= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} - d = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}{4}$$

R è reale se $\boxed{a^2 + b^2 + c^2 - 4d \geq 0}$ (*)

(e la sfera è tale)

☆ circonferenze nello spazio





sistema di riferimento cartesiano (O, x, y, z)

$$C = S \cap \pi$$

circonferenza nello spazio

sfera piano

soddisfacente (*) di pag 1'

$S: (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2$

$\pi: a'x+b'y+c'z+d' = 0$

$(a', b', c') \neq (0,0,0)$

Si ha: $h = d(P_0, \pi) = \dfrac{|a'x_0+b'y_0+c'z_0+d'|}{\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}$

affinché C sia reale deve essere $h \leq R$. In tal caso, il raggio di C vale $r = \sqrt{R^2-h^2}$. P_1, centro di C, si può ottenere intersecando π con la perpendicolare ad esso condotta da P_0, centro di S.

☆ <u>Teorema</u> (Eulero)

Sia $O \in SO(3)$ (ossia $O^{-1} = O^t$).

Allora O rappresenta una rotazione attorno ad un asse opportuno (passante per $\underline{0}$)
[v. anche disp. cap. 6: la presente dimostrazione è elementare]

<u>Sol.</u> L'asserzione data equivale al fatto che O possiede un autovalore uguale ad 1. Dato un autovettore $u \in V_1$, è allora $Ou = u$.
In generale, come vedremo tra un momento, V_1 è unidimensionale, e funge pertanto da asse di rotazione. Esamineremo poi due casi particolari.

Dunque, da $OO^t = O^tO = I_3$ segue

$\det(OO^t) = \det I_3 = 1$, e, per Binet

$1 = \det O \cdot \det O^t = (\det O)^2 \Rightarrow \det O = \pm 1$

Se $O \in SO(3)$, è, per definizione, $\det O = 1$

Il polinomio caratteristico di O è di grado 3 e possiede coefficienti reali. In virtù del fatto che le radici di un polinomio a coefficienti

reali sono reali o complesse coniugate a coppie, si ha che $P_C^O = P_C^O(\lambda)$ ha almeno una radice reale (contavalore), sia per es λ_1.

Se $v_1 \neq \underline{0}$ è un autovettore corrispondente a λ_1 $(O v_1 = \lambda_1 v_1)$ è immediato verificare che $\lambda_1 = \pm 1$ (O è isometrica...)

ora, da $\det O = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$

e dal fatto che $\lambda_2 = a + ib$, $\lambda_3 = a - ib$ (a, b opportuni), segue subito

$$(a^2 + b^2)\lambda_1 = 1$$

che fornisce subito $\lambda_1 = 1$, $a^2 + b^2 = 1$ $\square$

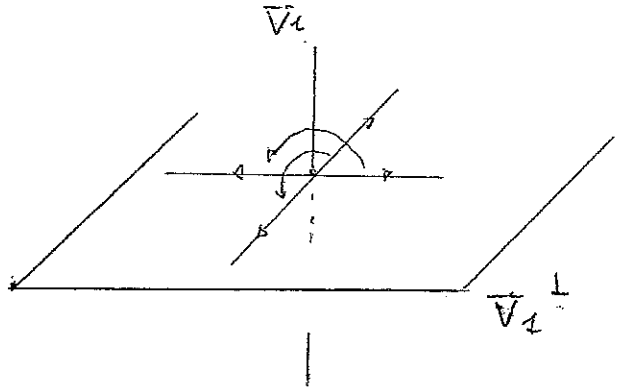
<u>Casi particolari</u>: se λ_2 e λ_3 sono pure reali, si ha $b = 0$ e $a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$, il che conduce ai casi particolari

$$O = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

e $\lambda_1 = 1$: rotazione di π attorno
$\lambda_2 = \lambda_3 = -1$

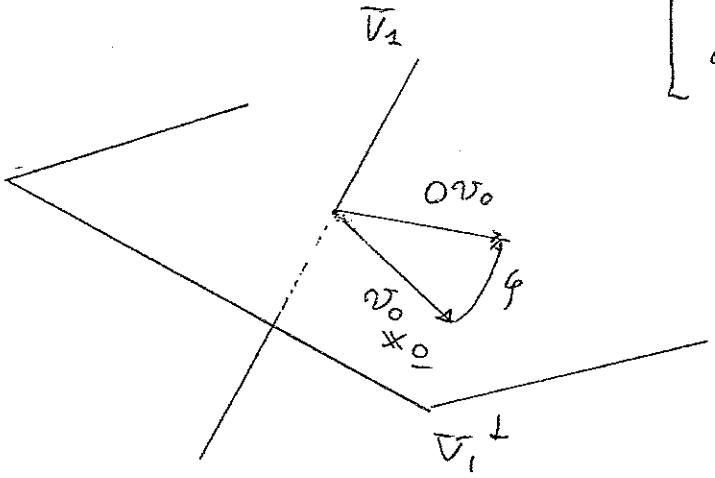
ad piano $\perp$ a V_1



In generale, da $a + ib = \cos\varphi + i\sin\varphi$

segue che O agisce come una rotazione di angolo φ (non orientato) sul piano $V_1^{\perp}$ attorno a V_1

[un vettore $\perp$ a V_1, per effetto di O, rimane ancora perpendicolare a V_1, poiché O conserva i prodotti scalari]



Un altro modo per ricostruire φ (a meno dell'orientamento) è, ovviamente, il seguente:

$$\frac{\langle Ov_0 \mid v_0 \rangle}{\|v_0\|^2} = \cos\varphi \qquad v_0 \neq \underline{0} \quad v_0 \in V_1^{\perp}$$

Prodotto vettoriale e rotazioni

Consideriamo il seguente endomorfismo di $S \cong \mathbb{R}^3$

$$L_{\underline{x}} = \underline{k} \times \cdot$$

$$L_{\underline{k}}(\underline{i}) = \underline{k} \times \underline{i} = \underline{j}$$

$$L_{\underline{k}}(\underline{j}) = \underline{k} \times \underline{j} = -\underline{i}$$

$$L_{\underline{k}}(\underline{k}) = \underline{k} \times \underline{k} = \underline{0}$$

In forma matriciale, se $e = (\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$

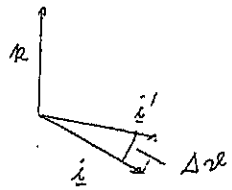
$$m_{ee}(L_{\underline{k}}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$L_{\underline{k}}$ "genera" una rotazione attorno all'asse z: è una "rotazione infinitesima attorno a tale asse: infatti da

$$R^z_\varphi : \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\frac{d R^z_\varphi}{d\varphi}\right|_{\varphi=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = m_{ee}(L_{\underline{k}})$$

intuitivamente, si arriva allo stesso risultato



$$\frac{\Delta \underline{i}}{\Delta \varphi} = \frac{\underline{i}' - \underline{i}}{\Delta \varphi} \xrightarrow{\Delta\varphi \to 0} \underline{j}$$

ovvero $\underline{i} \longmapsto \underline{j}$ (ruotando infinitesimalmente $\underline{i}$ si ottiene $\underline{j}$)

$$\underline{j} = \underline{k} \times \underline{i} = L_{\underline{k}}(\underline{i})$$

o, anche:

$$\underline{i}' = \underline{i} + \varepsilon \underbrace{\underline{j}}_{= \underline{k} \times \underline{i}} + o(\varepsilon)$$

INCISO

Altri esempi di algebre di Lie

Consideriamo $(M_n(\mathbb{R}), [\,,\,])$

con $[A, B] := AB - BA$

commutatore di A e B

Se ora $n=3$ e consideriamo le sole matrici antisimmetriche, denotate con $so(3)$, queste formano ancora un'algebra di Lie, rispetto al commutatore. Una matrice antisimmetrica 3×3 generica ha la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & -\alpha & -\beta \\ \alpha & 0 & -\gamma \\ \beta & \gamma & 0 \end{pmatrix} = \alpha \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{\mathcal{L}_k} + \beta \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathcal{L}_j} + \gamma \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathcal{L}_i}$$

La posizione

$$(\mathbb{R}^3, \times) \longrightarrow (so(3), [\,,\,])$$
$$\underline{a} \longmapsto \mathcal{L}_{\underline{a}} = \underline{a} \times$$

è un isomorfismo di algebre di Lie

$$[\mathcal{L}_{\underline{a}}, \mathcal{L}_{\underline{b}}] = \mathcal{L}_{\underline{a}\times\underline{b}}$$

Verifichiamo, per esempio che

$$[\mathcal{L}_{\underline{k}}, \mathcal{L}_{\underline{i}}] = \mathcal{L}_{\underline{j}} = \mathcal{L}_{\underline{k}\times\underline{i}}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathcal{L}_{\underline{j}}}$$

Si confronti il tutto col teorema di Eulero.

FINE DELL'INCISO